

横场中非束缚类准周期伊辛链的膺临界点

张振俊 李文娟 朱璇 熊烨 童培庆

Quantum pseudocritical point in the unbounded quasiperiodic transverse field Ising chain

Zhang Zhen-Jun Li Wen-Juan Zhu Xuan Xiong Ye Tong Pei-Qing

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 190501 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.190501

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.190501>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I19>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

拥堵疏散的行人拥挤力仿真研究

[Simulation of pedestrian push-force in evacuation with congestion](#)

物理学报.2015, 64(6): 060505 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.060505>

三维空间行人疏散的元胞自动机模型

[A cellular automata model of pedestrian evacuation in three-dimensional space](#)

物理学报.2014, 63(8): 080507 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.080507>

交叉口混合交通流元胞自动机模型及仿真研究

[Research and simulation on cellular automaton model of mixed traffic flow at intersection](#)

物理学报.2014, 63(1): 010508 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.010508>

基于动态地场和元胞自动机的自行车流建模

[Modeling of bicycle flow based on dynamic floor field and cellular automata](#)

物理学报.2013, 62(24): 240511 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.240511>

机动车协商模型与分岔特性研究

[Vehicle negotiation model and bifurcation dynamic characteristics research](#)

物理学报.2013, 62(21): 210507 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.210507>

# 横场中非束缚类准周期伊辛链的膺临界点\*

张振俊<sup>1)†</sup> 李文娟<sup>2)</sup> 朱璇<sup>3)</sup> 熊焱<sup>4)</sup> 童培庆<sup>4)5)‡</sup>

1)(河海大学理学院, 南京 210098)

2)(长沙师范学院初等教育系, 长沙 410100)

3)(江苏建康职业学院基础部, 南京 210029)

4)(南京师范大学物理科学与技术学院, 南京 210023)

5)(江苏省“大规模复杂系统数值模拟”重点实验室, 南京 210023)

(2015年3月26日收到; 2015年5月15日收到修改稿)

本文系统地研究了有限尺寸下非束缚类准周期量子伊辛链在横场中的膺临界点的行为. 首先, 通过计算平均磁矩和协作参量, 发现这两个量的导数随着横场的变化都会出现两个清晰的峰. 这与束缚类伊辛链和无序伊辛链的结果明显不同. 其次, 研究了横场中膺临界点的概率分布情况, 发现概率分布并不是高斯型的. 这也与无序的结果不同. 最后, 分析了膺临界点产生的原因, 发现膺临界点是由非束缚类准周期伊辛链中的集团结构造成的.

**关键词:** 非束缚类, 准周期, 伊辛链, 膺临界点

**PACS:** 05.50.+q, 75.40.Mg, 71.23.Ft

**DOI:** 10.7498/aps.64.190501

## 1 引言

量子相变问题一直是凝聚态物理中极为重要的研究课题<sup>[1-5]</sup>. 横场中的量子伊辛链是研究量子相变问题的一个重要的理论模型. 对横场中的非均匀量子伊辛链的相变问题, 一般没有解析的结果, 通常是对有限的系统进行数值的研究. 对有限的系统, 其物理量(比如平均磁矩)的导数通常有最大值. 人们把该最大值在横场中所对应的位置称为膺临界点<sup>[6]</sup>. 最近, Iglói 等人对横场中的无序量子伊辛链的膺临界点的行为做了系统地研究<sup>[6]</sup>. 发现对有限链长的系统, 无序会对系统的膺临界点的位置产生影响, 即对不同的无序样品, 其膺临界点出现的位置会不同. 他们进一步研究了横场中膺临界点出现的概率. 发现膺临界点的概率分布是高斯型

的, 随着链长的增加, 高斯分布的宽度会随之减小, 其中心位置逐渐趋近于热力学极限下的相变点.

另一方面, 自从1984年人们第一次发现了具有5度对称性的准晶体<sup>[7,8]</sup>, 并在实验室中制备出具有Fibonacci和Thue-Morse准周期排列的GaAs-AlAs超晶格<sup>[9]</sup>之后, 准晶体的物理性质成为一个重要的研究课题<sup>[10-16]</sup>. 虽然这类系统不具有平移不变性, 但它们的结构有一定的规律. 这类系统被认为是介于均匀和无序系统之间的一类系统. 它们具有不同于均匀和无序系统的特殊的物理性质. 例如, 处在准周期势场中的单电子能谱是奇异连续的, 其波函数既不是局域的也不是扩展的, 而是介于两者之间的临界态<sup>[10,11]</sup>等等. 近年来, 人们广泛的研究了横场中准周期伊辛链的量子相变<sup>[17-24]</sup>. 其中, Luck通过对横场中准周期伊辛链的基态和低激发态能量的研究, 将准周期伊辛链的

\* 国家自然科学基金(批准号: 11175087, 11305045)、湖南省自然科学基金(批准号: 2015JJ6006)和中央高校基本科研业务费(批准号: 2013B00414)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: hi\_zhangzhenjun@sina.com

‡ 通信作者. E-mail: pqotong@njnu.edu.cn

相变行为进行了归类<sup>[19]</sup>. 发现束缚类的准周期伊辛链的相变行为与均匀量子伊辛链的属于同一普适类. 而非束缚类的准周期伊辛链的相变行为与无序量子伊辛链的属于同一普适类. 虽然非束缚类准周期伊辛链的相变行为与无序伊辛链的属于同一普适类, 但是有研究发现非束缚类准周期伊辛链的低激发态行为与无序的情况不同<sup>[20]</sup>. 因此, 对有限链长的系统, 横场中非束缚类准周期伊辛链临界点的行为是否与无序的类似, 是一个值得研究的课题.

在本文中, 我们通过计算平均磁矩和量子纠缠中广泛使用的协作参量 (Concurrence)<sup>[25]</sup>, 研究了有限尺寸下横场中非束缚类准周期量子伊辛链临界点的行为.

## 2 模型、计算方法、相关的物理量

横场中量子伊辛链的哈密顿量可写为

$$H = - \sum_{i=1}^N [J_i \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + h \sigma_i^z], \quad (1)$$

其中,  $\sigma_i^{x,z}$  是在位置  $i$  上的泡利矩阵.  $J_i$  是最近邻相互作用,  $h$  是均匀的外磁场,  $N$  是总的自旋数. 如果  $J_i = J$ , 那么这个模型就是均匀伊辛链. 如果  $J_i$  随机的取  $J_A$  或者  $J_B$ , 就是无序伊辛链. 如果  $J_i$  取为  $J_A$  或者  $J_B$ , 并且  $J_A$  和  $J_B$  按照准周期序列排列, 那么这个模型就是准周期伊辛链. 本文中, 我们讨论一般的二元准周期序列, 其生成规则是

$$A \rightarrow A^n B^m; \quad B \rightarrow A^l B^k. \quad (2)$$

其中,  $n, m, l, k$  都是非负整数,  $A^n$  表示  $n$  个字母  $A$ . 与这类生成规则联系的矩阵为

$$T = \begin{pmatrix} n & l \\ m & k \end{pmatrix}. \quad (3)$$

对于横场中的准周期伊辛链, Luck 证明可以通过 wandering 指数  $\omega$  对其进行分类<sup>[19]</sup>.  $\omega$  的定义为

$$\omega = \frac{\ln|\lambda_2|}{\ln\lambda_1}. \quad (4)$$

上式中

$$\lambda_1 = \frac{n+k+\sqrt{(n-k)^2+4ml}}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{n+k-\sqrt{(n-k)^2+4ml}}{2},$$

分别是矩阵  $T$  的本征值. Luck 指出, 当  $\omega < 0$  时, 对应的准周期系统属于束缚类, 其相变行为与均匀伊辛链属于同一普适类; 当  $\omega > 0$  时, 对应的准周期系统属于非束缚类, 其相变行为与无序伊辛链属于同一普适类.

Pfeuty 曾证明, 在热力学极限下横场中的非均匀量子伊辛链有一个相变点, 其位置为

$$h_c^N = \prod_{i=1}^N J_i(N \rightarrow \infty)^{[26]}.$$

那么, 对于二元准周期链,  $h_c = J_A^{\rho_A} J_B^{\rho_B}$ . 其中,  $\rho_A$  和  $\rho_B$  分别是无穷长准周期链中,  $J_A$  和  $J_B$  所占的比例.

应用 Jordan-Wigner 变换<sup>[27]</sup>, 由方程 (1) 所描述的哈密顿量  $H$  可变为

$$H = \sum_{i,j=1}^N c_i^\dagger A_{ij} c_j + \frac{1}{2}(c_i^\dagger B_{ij} c_j^\dagger + \text{H.C.}), \quad (5)$$

其中,  $c_i$  和  $c_i^\dagger$  是费米子算符,  $A$  和  $B$  都是  $N \times N$  的矩阵, 分别为

$$A = \begin{pmatrix} -h & -\frac{J_1}{2} & 0 & \dots & -\frac{J_N}{2} \\ -\frac{J_1}{2} & -h & -\frac{J_2}{2} & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{J_2}{2} & -h & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{J_N}{2} & 0 & 0 & \dots & -h \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{J_1}{2} & 0 & \dots & \frac{J_N}{2} \\ \frac{J_1}{2} & 0 & -\frac{J_2}{2} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{J_2}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{J_N}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

然后通过如下的 Bogliubov 变换,

$$\eta_k = \sum_{i=1}^N (u_{k_i} c_i + v_{k_i} c_i^\dagger),$$

$$\eta_k^\dagger = \sum_{i=1}^N (u_{k_i}^* c_i^\dagger + v_{k_i}^* c_i). \quad (7)$$

可以把哈密顿量对角化为

$$H = \sum_{k=1}^N \Lambda_k (\eta_k^\dagger \eta_k - 1/2). \quad (8)$$

(7) 式中,  $u_{k_i} = \phi_{k_i} + \psi_{k_i}$ ,  $v_{k_i} = \phi_{k_i} - \psi_{k_i}$ , 且  $\phi_{k_i}$  和  $\psi_{k_i}$  满足如下方程:

$$\begin{aligned} \phi_k(A - B)(A + B) &= \Lambda_k^2 \phi_k, \\ \psi_k(A + B)(A - B) &= \Lambda_k^2 \psi_k. \end{aligned} \quad (9)$$

上式中,

$$\begin{aligned} \phi_k &= (\phi_{k_1}, \phi_{k_2}, \dots, \phi_{k_N}), \\ \psi_k &= (\psi_{k_1}, \psi_{k_2}, \dots, \psi_{k_N}). \end{aligned}$$

由方程 (9) 就可以得到本征值  $\Lambda_k^2$  和本征矢  $\phi_k, \psi_k$ .

这里, 所有的  $\Lambda_k > 0$ . 故系统的基态  $|\text{GS}\rangle$  满足对所有的  $k$  有  $\eta_k |\text{GS}\rangle = 0$ . 那么, 在此基态下格点  $i$  处的磁矩  $m_{iz}$  为

$$m_{iz} = \langle \text{GS} | \sigma_i^z | \text{GS} \rangle = G_{ii}, \quad (10)$$

其中,

$$G_{ii} = - \sum_k \psi_{k_i}^* \phi_{k_i}. \quad (11)$$

由于准周期结构的非均匀性, 磁矩  $m_{iz}$  与格点位置  $i$  有关. 因此, 为了得到一般的结果, 我们计算了系统的平均磁矩  $M_Z$ , 其定义为

$$M_Z = \frac{1}{N} \sum_i m_{iz} = \frac{1}{N} \sum_i G_{ii}. \quad (12)$$

除了平均磁矩之外, 近些年来, 量子信息中的一些方法和概念, 如量子纠缠、保真度等, 也被广泛的应用到对量子相变的讨论中 [25, 28-39]. 研究发现, 在相变点附近, 这些物理量通常会表现出奇异的行为. 本文中, 我们计算了量子纠缠中广泛使用的协作参量 [25].  $i$  和  $j$  两个格点间的协作参量为

$$C_{ij} = \max\{0, r_1 - r_2 - r_3 - r_4\}. \quad (13)$$

其中,  $r_1 \geq r_2 \geq r_3 \geq r_4 \geq 0$  是算符

$$R_{ij} = \rho_{ij}(\sigma^y \otimes \sigma^y) \rho_{ij}^*(\sigma^y \otimes \sigma^y) \quad (14)$$

本征值的平方根.  $\rho_{ij}$  是自旋  $i$  和  $j$  的约化密度矩阵,

$$\rho_{ij} = \frac{1}{4} \sum_{\alpha, \beta=0}^3 p_{\alpha\beta} \sigma_i^\alpha \otimes \sigma_j^\beta,$$

$p_{\alpha\beta} = \langle \sigma_i^\alpha \sigma_j^\beta \rangle$ ,  $\sigma^{1,2,3}$  分别对应泡利矩阵  $\sigma^{x,y,z}$ ,  $\sigma^0$  是  $2 \times 2$  的单位矩阵 [40].

这里, 我们考虑最近邻格点间的协作参量  $C_{i,i+1}$ . 与平均磁矩一样, 我们计算了平均的协作参量. 其定义为

$$C = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} C_{i,i+1}. \quad (15)$$

### 3 数值结果

由于结构的非均匀性, 对于无序链和准周期链, 一般需要对不同样品得到的结果进行平均. 因此, 在本文具体的计算中, 首先生成一条非常长的准周期链, 长度为  $L = 10^5 (L \gg N)$ . 然后, 在这条长链上随机的取一段长度为  $N$  的子链, 称为一个样品, 计算得到  $M_Z$  和  $C$  的结果. 最后对不同样品的结果再进行平均. 下面给出的  $M_Z$  和  $C$  是 1000 个样品平均后的结果.

图 1 (a) 给出了一种非束缚类伊辛链 (对应于  $n = l = 1, k = 0, m = 4$ ) 的平均磁矩  $M_Z$  的导数随着横场  $h$  的变化情况. 从中可以看到, 平均磁矩的导数在  $h \approx 0.61$  附近和  $h \approx 0.71$  附近出现了清晰的峰. 并且, 这两个峰随着链长的增加并没有明显的变化. 而在热力学极限的相变点处  $h_c \approx 0.655$  处却不存在峰. 图 1 (b) 给出了相应的协作参量  $C$  的导数随着横场  $h$  的变化情况. 与平均磁矩一样, 协作参量的导数也在  $h \approx 0.61$  附近和  $h \approx 0.71$  附近各出现了一个清晰的峰. 图 1 (c) 和 (d) 是另一种非束缚类伊辛链 (对应于  $n = m = 1, l = 4, k = 0$ ) 的结果. 此时, 平均磁矩和协作参量在  $h \approx 0.80$  和  $h \approx 0.84$  附近都出现了清晰的峰, 而在  $h_c \approx 0.823$  处不存在峰. 同样, 随着链长的增大, 这两个峰也没有明显的变化. 我们也研究了其它结构的非束缚类伊辛链, 发现平均磁矩和协作参量随着横场的增加都出现了两个清晰的峰. 作为比较, 我们研究了束缚类伊辛链和有序伊辛链的情况. 图 2 (a) 和 (b) 是一种束缚类伊辛链 (对应于  $n = 4, m = 1, l = 1, k = 0$ ) 的结果. 从中可以看到, 平均磁矩和协作参量的导数随着横场增加均只出现一个峰, 而且这个峰随着链长的增加显著的变高, 峰值所对应的横场的位置趋近于  $h_c \approx 0.876$ . 这与非束缚类伊辛链的结果明显不同, 而与均匀伊辛链的结果相似. 图 2 (c) 和 (d) 是无序伊辛链的结果. 此时, 平均磁矩和协作参量的导数随着横场的增加也只出现一个峰, 而且峰值所对应的横场位置也趋近于  $h_c \approx 0.707$ . 这与非束缚类伊辛链的结果也明显不同. 由此可以看出, 对有限的系统, 非束缚类伊辛链与束缚类伊辛链和有序伊辛链的膺临界点行为存在明显的不同.

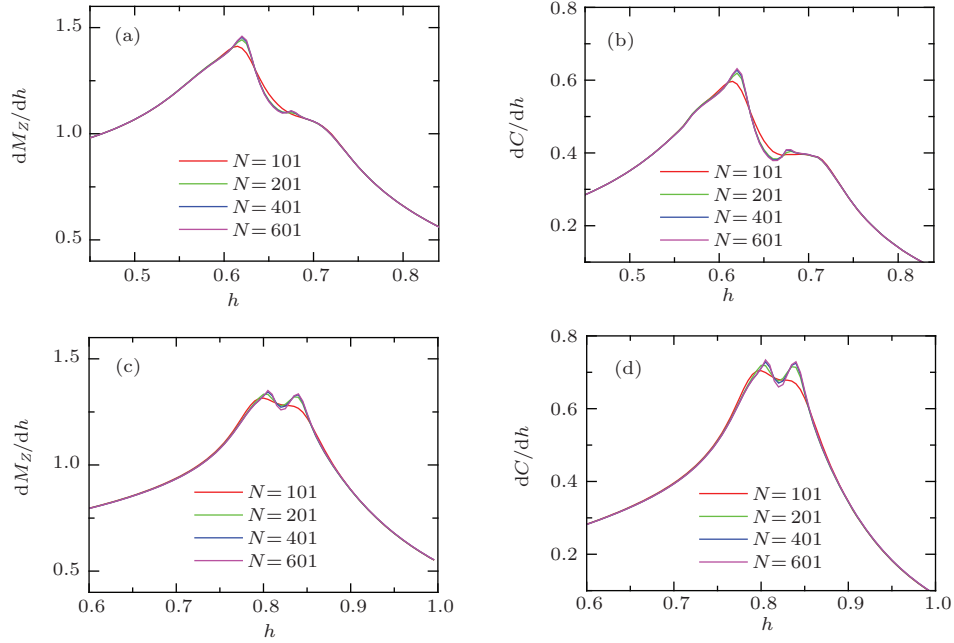


图1 (网刊彩色) (a) 一种非束缚类伊辛链 (对应于  $n = l = 1, k = 0, m = 4$ ) 的平均磁矩  $M_Z$  的导数随着横场  $h$  的变化情况; (b) 相应的协作参量  $C$  的导数随着横场  $h$  的变化情况; (c) 另一种非束缚类伊辛链 (对应于  $n = m = 1, l = 4, k = 0$ ) 的平均磁矩  $M_Z$  的导数随着横场  $h$  的变化情况; (d) 相应的协作参量  $C$  的导数随着横场  $h$  的变化情况 (在计算中, 取  $J_A = 1, J_B = 0.5$ )  
 Fig. 1. (color online) (a) The derivative of averaged magnetic moment  $M_Z$  changes with the transverse fields for a kind of unbounded quasiperiodic Ising chain (corresponding to  $n = l = 1, k = 0, m = 4$ ); (b) parameters are the same as those in (a), but for concurrence  $C$ ; (c) the derivative of averaged magnetic moment  $M_Z$  changes with transverse fields for another kind of unbounded quasiperiodic Ising chain (corresponding to  $n = m = 1, l = 4, k = 0$ ); (d) parameters are the same as those in (c), but for concurrence  $C$ . For all cases, we take  $J_A = 1, J_B = 0.5$ .

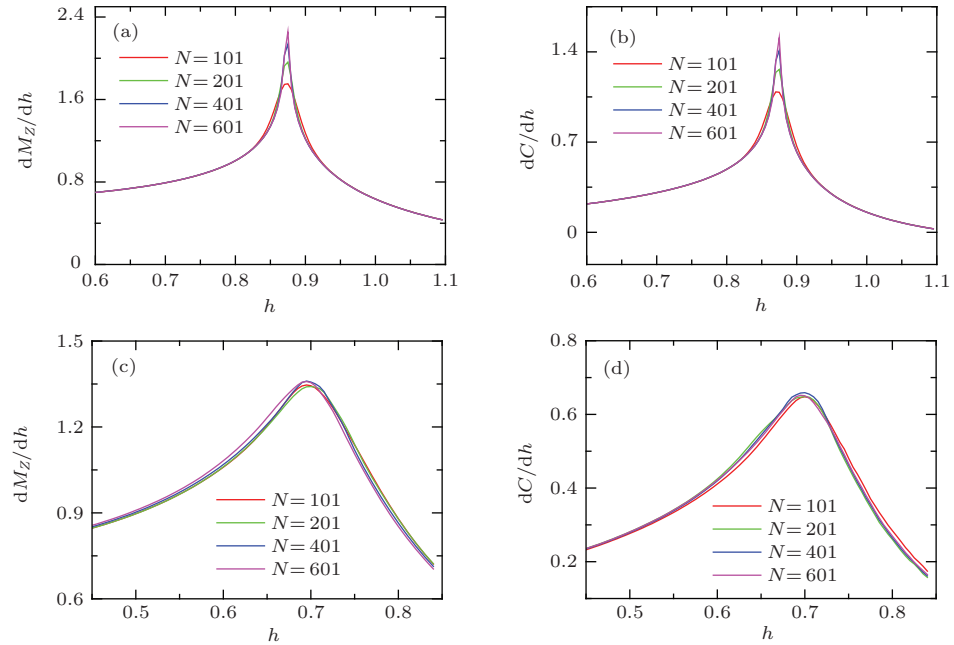


图2 (网刊彩色) (a) 束缚类伊辛链 (对应于  $n = 4, m = 1, l = 1, k = 0$ ) 的平均磁矩  $M_Z$  的导数随着横场  $h$  的变化情况; (b) 相应的协作参量  $C$  的导数随着横场  $h$  的变化情况; (c) 无序伊辛链的平均磁矩  $M_Z$  的导数随着横场  $h$  的变化情况; (d) 相应的协作参量  $C$  的导数随着横场  $h$  的变化情况 (在计算中, 取  $J_A = 1, J_B = 0.5$ )  
 Fig. 2. (color online) (a) The derivative of averaged magnetic moment  $M_Z$  changes with transverse fields for a kind of bounded quasiperiodic Ising chain (corresponding to  $n = 4, m = 1, l = 1, k = 0$ ); (b) parameters are the same as those in (a), but for concurrence  $C$ ; (c) the derivative of averaged magnetic moment  $M_Z$  changes with transverse fields for disordered Ising chain; (d) parameters are the same as those in (c), but for concurrence  $C$ . For all cases, we take  $J_A = 1, J_B = 0.5$ .

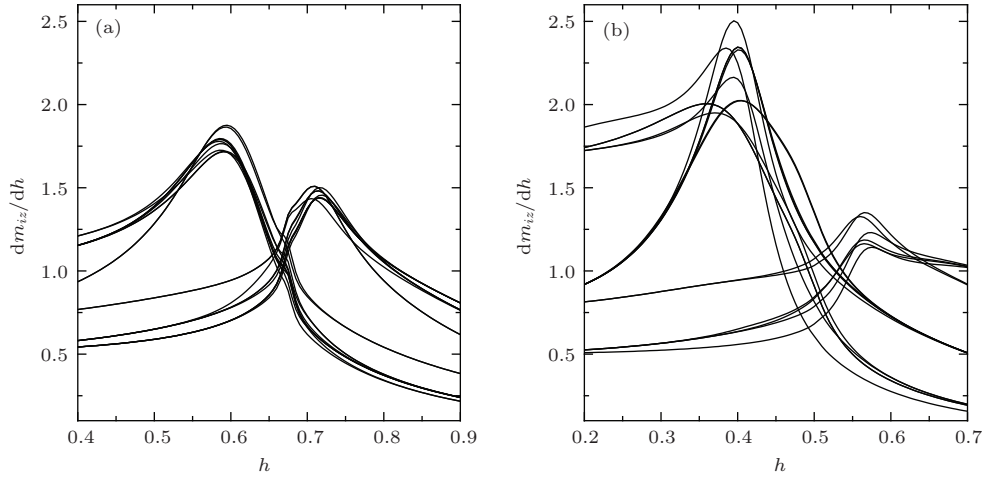


图3 (a)  $J_A = 1, J_B = 0.5$ 时非束缚类伊辛链(对应于  $n = l = 1, k = 0, m = 4$ )的20个不同位置的磁矩  $m_{iz}$  的导数随着横场  $h$  的变化情况; (b)  $J_A = 1, J_B = 0.3$ 时非束缚类伊辛链(对应于  $n = l = 1, k = 0, m = 4$ )的20个不同位置的磁矩  $m_{iz}$  的导数随着横场  $h$  的变化情况(在计算中,取  $N = 201$ )

Fig. 3. (a) The derivatives of magnetic moments  $m_{iz}$  of twenty different places change with transverse fields for a kind of unbounded quasiperiodic Ising chain (corresponding to  $n = l = 1, k = 0, m = 4$ ) for  $J_A = 1, J_B = 0.5$ ; (b) the derivatives of magnetic moments  $m_{iz}$  of twenty different places change with transverse fields for a kind of unbounded quasiperiodic Ising chain (corresponding to  $n = l = 1, k = 0, m = 4$ ) for  $J_A = 1, J_B = 0.3$ . For all cases, we use  $N = 201$ .

为了分析非束缚类伊辛链平均磁矩的导数随横场变化出现双峰的原因,我们研究同一样品中不同格点的磁矩  $m_{iz} = G_{ii}$  的导数随横场  $h$  变化的情况. 图3(a)给出了任意选取的20个不同位置的磁矩  $m_{iz}$  的导数随着横场  $h$  的变化情况. 从中可看到所有位置的磁矩的导数均只存在一个峰,但是峰的位置并不是随机的,而是集中出现在两个区域. 对于有些位置,磁矩的导数会在  $h \approx 0.61$  附近出现尖峰,而对另一些位置,磁矩的导数会在  $h \approx 0.71$  附近出现尖峰. 因此,平均的结果

$$M_Z = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G_{ii}$$

会在  $h \approx 0.61$  附近和  $h \approx 0.71$  附近各出现一个峰. 我们进一步研究横场中非束缚类伊辛链赝临界点的概率分布. 图4给出了计算1000个样品得到的赝临界点随着横场的概率分布情况. 从中可以看到赝临界点的概率分布并不是高斯型的. 而且,在相变点处,赝临界点出现的概率几乎为零,赝临界点集中的出现在相变点的两侧. 随着链长的增加,概率分布没有明显的变化. 这些结果都与无序量子伊辛链的明显不同<sup>[6]</sup>.

为了进一步分析赝临界点产生的原因,我们研究自旋的磁矩  $m_{iz} = G_{ii}$  与该自旋的位置之间的联系. 在图3(a)中,磁矩的导数在  $h \approx 0.71$  附近出现尖峰时所对应的自旋均在一个集团内,该集团

为  $J_B^4 J_A^5 J_B^4 J_A^5 J_B^4 J_A^5 J_B^4 J_A^5 J_B^4 J_A^5 J_B^4$ . 其中,  $J_B^4$  表示有4个  $J_B$ . 而磁矩的导数在  $h \approx 0.61$  附近出现尖峰时所对应的自旋均在另一个集团内,该集团为  $J_B^4 J_A J_B^4 J_A J_B^4 J_A J_B^4 J_A J_B^4 J_A J_B^4 J_A J_B^4 J_A J_B^4 J_A J_B^4 J_A$ . 在第一个集团中,  $J_B$  所占比重为  $\rho_{B1} = 24/49 \approx 0.49$ . 这个集团所得到的赝临界点  $h_{p1} = J_B^{\rho_{B1}} \approx 0.71$ . 在第二个集团中,  $J_B$  所占比重为  $\rho_{B2} = 36/49 \approx 0.73$ . 这个集团所得到的赝临界点  $h_{p2} = J_B^{\rho_{B2}} \approx 0.60$ . 这两个结果均与数值计算得到的结果符合的很好. 为了进一步验证上述的结论,我们研究上述系统取不同  $J_B$  值时的情况. 图3(b)

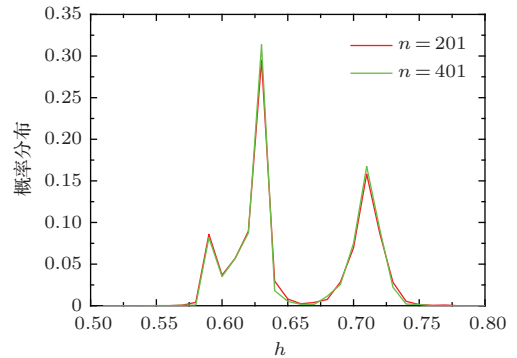


图4 (网刊彩色)非束缚类伊辛链(对应于  $n = l = 1, k = 0, m = 4$ )的赝临界点随着横场的概率分布(在计算中,取  $J_A = 1, J_B = 0.5$ )

Fig. 4. (color online) The probability distribution for a kind of unbounded quasiperiodic Ising chain (corresponding to  $n = l = 1, k = 0, m = 4$ ) for  $J_A = 1, J_B = 0.5$ .

给出了  $J_B = 0.3$  时, 20 个不同位置的磁矩  $m_{iz}$  的导数随着横场  $h$  的变化情况. 此时, 磁矩的导数在  $h \approx 0.55$  附近出现尖峰时对应的自旋都处在集团 1 中, 而磁矩的导数在  $h \approx 0.40$  附近出现尖峰时对应的自旋都处在集团 2 中. 而集团 1 所得到的赝临界点  $h_{p_1} = J_B^{\rho_{B_1}} \approx 0.55$ , 集团 2 所得到的赝临界点  $h_{p_2} = J_B^{\rho_{B_2}} \approx 0.41$ . 这与数值计算得到的结果也符合的很好. 最后, 我们分析不同准周期结构的伊辛链中, 相应的两个集团所得到的赝临界点的位置. 表 1 给出了  $n = l = 1, k = 0, m$  取不同值时所对应的两个集团, 以及由此得到的赝临界点的位置. 从表中的分析可以看到, 当  $m$  增大时, 集团 1 造成的赝临界点的位置基本不变, 而集团 2 造成的赝临界点的位置朝着  $h$  变小的方向移动. 图 5 给出了数值计算的结果. 正如分析的那样, 随着  $m$  的增大, 一个峰的位置基本不变, 而另一个峰的位置朝着  $h$  变小的方向移动, 并且峰的位置与我们分析得到的结果也符合的很好. 这是由非束缚类准周期系统的结构造成的. 非束缚类伊辛链的最近邻相互作用中存在一系列的集团 1 和集团 2. 通过表 1 可以看到集

团 1 中  $J_B^m$  和  $J_A^{m+1}$  是周期排列的. 自旋处在集团 1 时, 起主要作用的是集团 1 中的周期排列的相互作用, 这个相互作用决定了赝临界点  $h_{p_1}$  的位置. 而自旋处在集团 2 时, 起主要作用的是集团 2 中的相互作用, 这个相互作用决定了赝临界点  $h_{p_2}$  的位置.

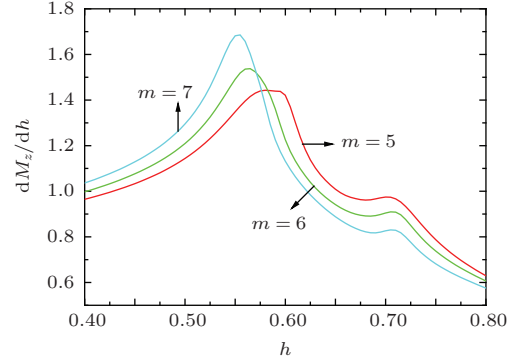


图 5 (网刊彩色)  $n = l = 1, k = 0, m$  取不同值时所对应的伊辛链中, 平均磁矩  $M_Z$  的导数随着横场  $h$  的变化情况 (在计算中, 取  $N = 201, J_A = 1, J_B = 0.5$ )  
 Fig. 5. (color online) The derivatives of averaged magnetic moments  $M_Z$  changes with the transverse fields for different values of  $m$  for unbounded quasiperiodic Ising chain (corresponding to  $n = l = 1, k = 0$ ). For all cases, we take  $N = 201, J_A = 1, J_B = 0.5$ .

表 1  $n = l = 1, k = 0, m$  取不同值时所对应的伊辛链中, 赝临界点的位置  
 Table 1. The places of pseudocritical points for different values of  $m$  for unbounded quasiperiodic Ising chain (corresponding to  $n = l = 1, k = 0$ ).

$m$ 的值	集团 1	$\rho_{B_1}$	$h_{p_1}$	集团 2	$\rho_{B_2}$	$h_{p_2}$
5	$J_B^5 J_A^6 J_B^5 J_A^6 J_B^5 J_A^6 J_B^5$	$\frac{35}{71} \approx 0.49$	0.71	$J_B^5 J_A^5 J_B^5 J_A^5 J_B^5 J_A^5 J_B^5 J_A^5 J_B^5 J_A^5$	$\frac{55}{71} \approx 0.77$	0.59
	$J_A^6 J_B^5 J_A^6 J_B^5 J_A^6 J_B^5$			$J_B^5 J_A^5 J_B^5 J_A^5 J_B^5 J_A^5 J_B^5 J_A^5$		
6	$J_B^6 J_A^7 J_B^6 J_A^7 J_B^6 J_A^7 J_B^6$	$\frac{48}{97} \approx 0.49$	0.71	$J_B^6 J_A^6 J_B^6 J_A^6 J_B^6 J_A^6 J_B^6 J_A^6 J_B^6 J_A^6$	$\frac{78}{97} \approx 0.80$	0.57
	$J_A^7 J_B^6 J_A^7 J_B^6 J_A^7 J_B^6 J_A^7$			$J_B^6 J_A^6 J_B^6 J_A^6 J_B^6 J_A^6 J_B^6 J_A^6$		
	$J_B^6$			$J_B^6 J_A$		
7	$J_B^7 J_A^8 J_B^7 J_A^8 J_B^7 J_A^8 J_B^7$	$\frac{63}{127} \approx 0.50$	0.71	$J_B^7 J_A^7 J_B^7 J_A^7 J_B^7 J_A^7 J_B^7 J_A^7 J_B^7 J_A^7$	$\frac{105}{127} \approx 0.83$	0.56
	$J_A^8 J_B^7 J_A^8 J_B^7 J_A^8 J_B^7 J_A^8$			$J_B^7 J_A^7 J_B^7 J_A^7 J_B^7 J_A^7 J_B^7 J_A^7$		
	$J_B^7 J_A^8 J_B^7$			$J_B^7 J_A^7 J_B^7 J_A^7 J_B^7 J_A^7$		

注 1: 对所有的情况, 取  $J_A = 1, J_B = 0.5$ .

### 4 结 论

本文系统地研究了在有限尺寸下非束缚类准周期量子伊辛链在横场中的赝临界点的行为. 首先, 计算了平均磁矩和协作参量. 发现这两个量的导数随着横场的变化都会出现两个清晰的峰. 这与

束缚类量子伊辛链和无序量子伊辛链的结果明显不同. 其次, 通过研究不同位置磁矩的导数随横场变化的情况, 发现双峰是由不同格点磁矩的不同行为造成的. 通过对非束缚类伊辛链在横场中的赝临界点的概率分布的研究, 发现其概率分布并不是高斯型的. 而且, 在相变点处, 赝临界点出现的概率几乎为零, 赝临界点大量的出现在相变点的两侧.

随着链长的增加, 概率分布没有明显的变化. 这些结果都与无序量子伊辛链的明显不同. 最后, 通过对非束缚类准周期结构的分析, 发现膺临界点是由非束缚类准周期伊辛链中的集团结构造成的. 通过我们的研究可以看到, 虽然在热力学极限下横场中非束缚类量子伊辛链的相变行为与无序量子伊辛链的属于同一普适类, 但是它们在有限尺寸下的热力学性质有很大的不同. 这是由非束缚类准周期系统的特殊结构造成的.

## 参考文献

- [1] Imada M, Fujimori A, Tokura Y 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 1039
- [2] Sachdev S 1999 *Quantum Phase Transitions* (Cambridge University Press, England)
- [3] Grenier M, Mandel O, Esslinger T, Hänsch and Bloch I 2002 *Nature* **415** 39
- [4] Vojta M 2003 *Rep. Prog. Phys.* **66** 2069
- [5] Wang W G, Qin P Q, He L W, Wang P 2010 *Phys. Rev. E* **81** 016214
- [6] Iglói F, Lin Y -C, Rieger H, Monthus C 2007 *Phys. Rev. B* **76** 064421
- [7] Shechtman D, Blech I, Gratias D, Cahn J W 1984 *Phys. Rev. Lett.* **53** 1951
- [8] Levine D, Steinhardt P 1984 *Phys. Rev. Lett.* **53** 2477
- [9] Merlin R, Bajema K, Clarke R, Juang F Y, Bhattacharya P K 1985 *Phys. Rev. Lett.* **55** 1768
- [10] Sütö A 1987 *Commun. Math. Phys.* **111** 409
- [11] Gumbs G, Ali M K 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 1081
- [12] Holzer M 1988 *Phys. Rev. B* **38** 5756
- [13] Severin M, Riklund R 1989 *Phys. Rev. B* **39** 10362
- [14] Chakrabarti A, Karmakar S N 1991 *Phys. Rev. B* **44** 896
- [15] Godrèche C, Luck J M 1992 *Phys. Rev. B* **45** 176
- [16] Oh G Y, Lee M H 1993 *Phys. Rev. B* **48** 12465
- [17] Doria M, Satija I 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 444
- [18] Benza V G 1989 *Europhys. Lett.* **8** 321
- [19] Luck J M 1993 *J. Stat. Phys.* **72** 417
- [20] Grimm U, Baake M 1994 *J. Stat. Phys.* **74** 1233
- [21] Hermisson J, Grimm U, Baake M 1997 *J. Phys. A* **30** 7315
- [22] Hermisson J, Grimm U 1998 *Phys. Rev. B* **57** R673
- [23] Tong P Q, Zhong M 2002 *Phys. Rev. B* **65** 064421
- [24] Tong P Q, Liu X X 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 017201
- [25] Wotters W 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2245
- [26] Pfeuty P 1979 *Phys. Lett. A* **72** 245
- [27] Jordan P, Wigner E 1928 *Z. Physik* **47** 631
- [28] Arnesen M, Bose S, Vedral V 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 017901
- [29] Gringrich R, Adami C 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 270402
- [30] Osterloh A, Amico L, Falci G, Fazio R 2002 *Nature* **416** 608
- [31] Vidal G, Latorre J I, Rico E, Kitaev A 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 227902
- [32] Wu L, Sarandy M S, Lidar D A 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 250404
- [33] Gu S, Deng S, Li Y, Lin H 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 086402
- [34] Amico L, Fazio R, Osterloh A, Vedral V 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 517
- [35] Gong L Y, Tong P Q 2008 *Phys. Rev. B* **78** 115114
- [36] Zhu X, Tong P Q 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1623
- [37] Zhang S J, Jiang J J, Liu Y J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 0531 (in Chinese) [张松俊, 蒋建军, 刘拥军 2008 物理学报 **57** 0531]
- [38] Wang P, Zheng Q, Wang W G 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 080301
- [39] Wang L C, Shen J, Yi X X 2011 *Chin. Phys. B* **20** 050306
- [40] Osborne T, Nielsen M 2002 *Phys. Rev. A* **66** 032110



# Quantum pseudocritical point in the unbounded quasiperiodic transverse field Ising chain \*

Zhang Zhen-Jun<sup>1)†</sup> Li Wen-Juan<sup>2)</sup> Zhu Xuan<sup>3)</sup> Xiong Ye<sup>4)</sup> Tong Pei-Qing<sup>4)5)‡</sup>

1) ( College of Science, Hohai University, Nanjing 210098, China)

2) ( Primary Education Department, Changsha Normal University, Changsha 410100, China)

3) ( Department of Basic Courses, Jiangsu Jiankang Vocational College, Nanjing 210029, China)

4) ( School of Physics and Technology, Nanjing Normal University, Nanjing 210023, China)

5) ( Jiangsu Key Laboratory for Numerical Simulation of Large Scale Complex Systems, Nanjing Normal University, Nanjing 210023, China)

( Received 26 March 2015; revised manuscript received 15 May 2015 )

## Abstract

We study the quantum pseudocritical points in the unbounded quasiperiodic transverse field Ising chain of finite-size systematically. Firstly, we study the derivatives of averaged magnetic moment and the averaged concurrence with transverse fields. Both of them show two visible peaks, with are nearly not raised when the length of chain is increased. Moreover, the places where the peaks occur in the transverse field are obviously different from that of the quantum phase transition point in the thermodynamic limit. These results are very different from those of the bounded quasiperiodic transverse field Ising chain and the disordered transverse field Ising chain. Then, we analyze the origin of the two visible peaks. For that we study the derivative of magnetic moment for each spin with transverse field. For all spins, the single magnetic moment only show one peak. However, the places where the peaks occur are not random. The peaks always occur in two regions. Thus, the derivatives of averaged magnetic moment reveal two peaks. Furthermore, we study the probability distribution of the pseudocritical points through finding out the peaks of the single magnetic moment in 1000 samples. The distribution is not Guassian. This result is obviously different from that of the disordered case. Besides, the pseudocritical points nearly do not occur at the quantum phase transition point. Finally, we analyze the origin of the pseudocritical points. For that we study the relationship between the spin places and the corresponding places of pseudocritical points. It is found that the pseudocritical points are caused by the two groups that exist in the nearest neighboring interactions of the unbounded quasiperiodic structure. When a spin is in one group, this group will decide the probable place of the pseudocritical point. Through this study, we find that although the quantum phase transition behaviors of the unbounded quasiperiodic transverse field Ising chain and the disordered transverse field Ising chain belong to the same universal class in the thermodynamic limit, the thermodynamic behaviors of the two Ising chains are very different as in finite sizes. The differences are caused by the special structure in the unbounded quasiperiodic system.

**Keywords:** unbounded, quasiperiodic, Ising chain, pseudocritical points

**PACS:** 05.50.+q, 75.40.Mg, 71.23.Ft

**DOI:** [10.7498/aps.64.190501](https://doi.org/10.7498/aps.64.190501)

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11175087, 11305045), the National Science Foundation of Hunan Province, China (Grant No. 2015JJ6006), and the Fundamental Research Funds for the Central Universities of China (Grant No. 2013B00414).

† Corresponding author. E-mail: [hi\\_zhangzhenjun@sina.com](mailto:hi_zhangzhenjun@sina.com)

‡ Corresponding author. E-mail: [pqtong@njnu.edu.cn](mailto:pqtong@njnu.edu.cn)