

流体力学拉氏守恒滑移线算法设计

刘全 于明 林忠 王瑞利

Conservative sliding algorithms for hydrodynamics

Liu Quan Yu Ming Lin Zhong Wang Rui-Li

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 194701 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.194701

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.194701>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I19>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

干斜压大气拉格朗日原始方程组的半解析解法和非线性密度流数值试验

Semi-analytical solution of the dry baroclinic Lagrange primitive equation and numerical experiment of a non-linear density current

物理学报.2015, 64(19): 194702 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.194702>

疏水表面减阻的格子 Boltzmann 方法数值模拟

Numerical investigation on drag reduction with hydrophobic surface by lattice Boltzmann method

物理学报.2015, 64(18): 184702 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.184702>

液滴在梯度微结构表面上的铺展动力学分析

Spreading dynamics of liquid droplet on gradient micro-structured surfaces

物理学报.2015, 64(15): 154705 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.154705>

脉动流在分叉管中通栓效果的晶格玻尔兹曼方法研究

Pulsation effect on thrombus in a bifurcation pipe by the lattice Boltzmann method

物理学报.2015, 64(14): 144701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.144701>

低速湍流模拟的预处理技术研究

Study of precondition for simulating low-speed turbulence

物理学报.2015, 64(13): 134701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.134701>

流体力学拉氏守恒滑移线算法设计*

刘全 于明† 林忠 王瑞利

(北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100094)

(2015年3月28日收到; 2015年5月7日收到修改稿)

本文在 Wilkins 滑移线算法的基础上, 设计了从区网格边人工黏性对主点施加算法. 结合拉氏“相容性格式”, 通过定义“接触力”和“接触力做功”, 利用局部修正内能的方法设计了总能量守恒的流体力学拉氏格式. 该修正方法可保证对称性、守恒性; 提高数值模拟分辨率.

关键词: 相容格式, 滑移算法, 守恒, 接触力

PACS: 47.11.-j, 47.11.Fg

DOI: 10.7498/aps.64.194701

1 引言

流体力学数值模拟一般可分为欧氏 (Eulerian)、拉氏 (Lagrangian) 和 ALE (arbitrary Lagrangian-Eulerian) 方法. 由于拉氏方法能较精确描述物质界面和自由面, 在空间物理量交错网格配置下, 还能方便描述材料的本构关系, 因此在武器物理数值模拟中得到广泛应用^[1]. 采用交错型的拉氏方法计算多介质流体力学问题, 需要用滑移线算法处理物质界面的相互作用. 但由于传统滑移线算法在主、从两侧使用了不同模板且采用插值方法校正从点法向速度, 破坏了守恒性, 理论上不易分析, 从而难以构造符合物理规律的总能量守恒格式. 由于实际问题对数值模拟的守恒性提出了更高要求, 基于交错网格拉氏守恒格式的研究得到了广泛关注.

自相容 Lagrangian 格式是由 Shashkov 等提出的一种交错网格型、总能量守恒格式.

考虑流体力学 Lagrangian 方程组

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p, \quad (2)$$

$$\rho \frac{de}{dt} = -p\nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (3)$$

采用交错网格计算时, 速度、位移定义在网格节点, 密度、内能、压力定义在网格中心, 拉氏计算中, 网格质量保持不变, 因此守恒型格式设计的关键是动量和内能方程的离散^[2-6]. 自相容格式的动量和内能方程的半离散为

$$M_p \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = \mathbf{f}_p = \sum_z \mathbf{f}_z^p, \quad (4)$$

$$M_z \frac{de_z}{dt} = -\sum_p \mathbf{f}_p^z \cdot \mathbf{u}_p, \quad (5)$$

其中隅角力 \mathbf{f}_z^p 利用有限体积或有限元离散得到且 $\mathbf{f}_p^z = \mathbf{f}_z^p$. 点质量、网格质量需满足

$$\begin{aligned} \sum_z M_z &= \sum_p M_p, \quad M_z = \sum_p M_p^z, \\ M_p &= \sum_z M_z^p, \quad M_z^p = M_p^z, \end{aligned} \quad (6)$$

其中 M_z^p 为 z 网格所分给 p 点的隅角质量, M_p 为节点 p 的质量, M_z 为网格 z 的质量. 定义单个网格的总能量 $E_z = M_z e_z + \sum_p M_p^z \mathbf{u}_p^2 / 2$, 其中 \sum_p 为 z 网格所有节点的和.

全离散总能量的守恒性, 内能方程中速度应用

* 国家自然科学基金 (批准号: 11372051, 11172050, 11272064) 和中物院联合基金 (批准号: NASF-11076015) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: yu_ming@iapcm.ac.cn

到动量离散中的两个速度的平均. 即

$$M_p \frac{\mathbf{u}_p^{n+1} - \mathbf{u}_p^n}{\Delta t^{n+1/2}} = \sum_z \mathbf{f}_z^p,$$

$$M_z \frac{e_z^{n+1} - e_z^n}{\Delta t^{n+1/2}} = \sum_p \mathbf{f}_p^z \cdot \frac{\mathbf{u}_p^{n+1} + \mathbf{u}_p^n}{2}.$$

注意到单步时间离散, 格式不稳定, 因此 Shashkov 等在时间方向离散采用预估-校正的方法实现格式的稳定性, 关于该格式守恒性证明及边人工黏性、沙漏黏性等设计的进一步了解可参见文献 [2—6].

当计算问题为多个物质区时, 可以在每一个物质区内部采用 Shashkov 的自相容拉氏格式, 而在物质间使用滑移算法进行处理. 滑移线算法可分为运动学滑移算法和力约束滑移算法. 算法的主要步骤有: 1) 接触搜索, 2) 接触和分离条件, 3) 接触力的计算. 本文讨论运动学滑移算法, 将该滑移线两侧分为主侧 (或主区) 和从侧 (或从区), 将从点 (滑移线上属于从侧的点) 的质量、作用力按一定原则施加到相应的主点 (滑移线上属于主侧的点) 上, 然后计算主点速度, 而从点的法向速度用主点的法向速度插值得到, 从点的切向速度由从区网格结合标准的计算格式 (如有限体积格式) 得到, 主体思想是 Wilkins 在文献 [7] 中提出, 其本质是 Wilkins 有限体积格式在非匹配网格上实现, 并允许接触面之间有不同的切向速度.

首先主体程序中, 对于非滑移上点, 利用相容性格式计算网格节点加速度、速度. 为方便起见, 统一将预估-校正步的时间上标写为 $n+1, n$. 在下面表达式中, 设 α 为非滑移上点, 则

$$u_\alpha^{n+1} = u_\alpha^n + \frac{F_{\alpha,x}}{m_\alpha} \Delta t = u_\alpha^n + (\Delta u)_\alpha^n,$$

$$v_\alpha^{n+1} = v_\alpha^n + \frac{F_{\alpha,r}}{m_\alpha} \Delta t = v_\alpha^n + (\Delta v)_\alpha^n, \quad (7)$$

其中 $\mathbf{a}_\alpha = \left(\frac{F_{\alpha,x}}{m_\alpha}, \frac{F_{\alpha,r}}{m_\alpha} \right)$ 为节点加速度, $\mathbf{F}_\alpha = (F_{\alpha,x}, F_{\alpha,r})$ 为节点作用力, $\Delta U_\alpha^n = ((\Delta u)_\alpha^n, (\Delta v)_\alpha^n)$ 为节点速度增量, m_α 为节点质量, Δt 为时间步长; 节点作用力和节点质量由相容性格式得到.

假设 t^n 时刻 $\alpha_-, \alpha, \alpha_+$ 为滑移线上的主点, β_1, β_2 为从点, 上面为从侧, 下面为主侧, 如图 1 所示. 在主侧和从侧分别使用隅角力合成公式 $\mathbf{f}_p = \sum_z \mathbf{f}_z^p$, 计算节点力 $\mathbf{F}_{\alpha,主}, \mathbf{F}_{\beta_1,从}, \mathbf{F}_{\beta_2,从}$ 和节点质量 $m_{\alpha,主}, m_{\beta_1,从}, m_{\beta_2,从}$, 则利用“参数分配

法”得到主点 α 的合成节点加速度为

$$\mathbf{a}_\alpha = \frac{\mathbf{F}_{\alpha,主} + f_{\beta_1} \mathbf{F}_{\beta_1,从} + f_{\beta_2} \mathbf{F}_{\beta_2,从}}{m_{\alpha,主} + f_{\beta_1} m_{\beta_1,从} + f_{\beta_2} m_{\beta_2,从}}, \quad (8)$$

其中, f_{β_1}, f_{β_2} 为从点 β_1, β_2 对主点 α 节点力和节点质量贡献的份额, 如 $f_{\beta_1} = \frac{1}{2} \frac{|\alpha - \beta_1|}{|\alpha - \alpha_+|}$, 或其他比例因子, 如由节点在网格中心连线上的投影长度得到的比例因子.

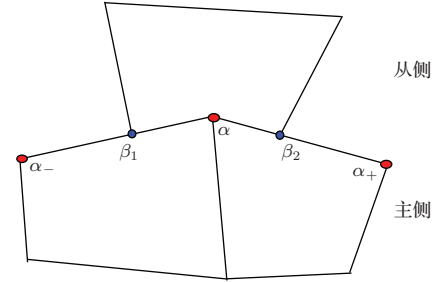


图 1 (网刊彩色) 简单滑移线示意图

Fig. 1. (color online) Simple example for sliding surface.

则主点速度为

$$\mathbf{U}_\alpha^{n+1} = \mathbf{U}_\alpha^n + \Delta t^n \mathbf{a}_\alpha^n \mathbf{U}_\alpha^n + \Delta \mathbf{U}_\alpha^n,$$

其中 $\mathbf{U} = (u, v)$. 下面求从点速度, 设点 α 处的滑移线单位法向量为 $\mathbf{n} = (n_x, n_r)^T$, 单位切向量为 $\boldsymbol{\tau} = (\tau_x, \tau_r)^T = (-n_r, n_x)^T$, 对于从点 β_1 的切向速度有

$$u_{\beta_1, \tau}^{n+1} = U_{\beta_1}^n + \Delta t^n \frac{\mathbf{F}_{\beta_1,从}}{m_{\beta_1,从}} \cdot \boldsymbol{\tau}$$

$$= U_{\beta_1}^n + \Delta U_{\beta_1,从}^n \cdot \boldsymbol{\tau}.$$

β_1 的法向加速度由主点 α_- 与 α 的法向速度插值得到

$$u_{\beta_1, n}^{n+1} = (1 - f_{\beta_1}) U_\alpha^{n+1} \cdot \mathbf{n} + f_{\beta_1} U_\alpha^{n+1} \cdot \mathbf{n}.$$

所以从点 β_1 的速度为

$$\begin{pmatrix} u_{\beta_1}^{n+1} \\ v_{\beta_1}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_x & \tau_r \\ n_x & n_r \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_{\beta_1, \tau}^{n+1} \\ u_{\beta_1, n}^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} n_r & n_x \\ n_x & -n_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\beta_1, \tau}^{n+1} \\ u_{\beta_1, n}^{n+1} \end{pmatrix}.$$

从点 β_2 的速度由切向和法向速度类似获得.

对于多个从点属于同一主线段, 从点对主线段的两个主点的作用力和节点质量的施加类似于 (8)

式, 即

$$\mathbf{a}_\alpha = \frac{\mathbf{F}_{\alpha, \text{主}} + \sum_{j=1}^{K_{\alpha-}} f_{\beta_j} \mathbf{F}_{\beta_j, \blacklozenge} + \sum_{j=1}^{K_{\alpha+}} f_{\beta_j} \mathbf{F}_{\beta_j, \blacklozenge}}{m_{\alpha, \text{主}} + \sum_{j=1}^{K_{\alpha-}} f_{\beta_j} m_{\beta_j, \blacklozenge} + \sum_{j=1}^{K_{\alpha+}} f_{\beta_j} \mathbf{F}_{\beta_j, \blacklozenge}},$$

其中, $K_{\alpha-}$, $K_{\alpha+}$ 分别为主线段 $\alpha-\alpha$ 和 $\alpha\alpha+$ 的从点数. 上面给出了 Wilkins 滑移线算法的主体思想, 进一步描述参见 [7—11].

Wilkins 滑移算法中, 由于采用分配与插值的原则进行速度与加速度的计算, 很难分析耦合 Shashkov 自相容格式后的总能量守恒性, 国内外还从未见带滑移算法的总能量守恒拉氏格式的相关文章.

本文将结合自相容格式, 分析滑移线的接触间断条件, 引进“接触力”概念, 利用“接触力做功”想法, 结合全局或局部修正构造守恒型滑移线算法, 以改进拉氏流体计算的守恒性, 提高多介质大变形问题的数值模拟能力. 由于在 Shashkov 自相容格式设计中边人工黏性是格式设计中的一个重要组成部分, 因此有必要研究滑移算法中从区网格边人工黏性对滑移线主点的施加. 本文采用 MIN, MAX 函数方式研究了 Wilkins 滑移算法中的施加方法, 减少传统算法的分支判断.

2 边人工黏性力对主点施加算法

在下面的滑移线图示中, 将主、从滑移线分离显示, 以便能清楚描述. 设一主网格 Z 的主点为 L, M , 在滑移线上的顺序为 L 到 M . 主点 L 所属从网格为 Z_1 , 主点 M 所属从网格为 Z_s , $s \geq 1$, 当 $s = 1$ 时, 主点 L, M 属于同一个从网格. 目的是将从点所在从网格的边人工黏性力施加到主点. 首先考查从网格 Z_1 的从点 i, k 边人工黏性力对主点 L, M 法向力的施加, 由于 L 属于 Z_1 , 则主线段 \overline{LM} 的中点 c 可能情形如图 2 所示.

从点 i 对主点 L 的边人工黏性力的施加为 $\alpha_1^{Z_1}(\mathbf{f}_{\text{edge}, i}^{Z_1} \cdot \mathbf{n}_{L, M})\mathbf{n}_{L, M}$, 其中

$$\alpha_1^{Z_1} = \left[\min \left(\mathbf{ic} \cdot \mathbf{e}_{i, k}, \frac{1}{2} |\mathbf{ik}| \right) - \min \left(\mathbf{iL} \cdot \mathbf{e}_{i, k}, \frac{1}{2} |\mathbf{ik}| \right) \right] \times \left(\frac{1}{2} |\mathbf{ik}| \right)^{-1}.$$

从点 i 对主点 M 的边人工黏性力的施加为 $\alpha_2^{Z_1}(\mathbf{f}_{\text{edge}, i}^{Z_1} \cdot \mathbf{n}_{L, M})\mathbf{n}_{L, M}$, 其中

$$\alpha_2^{Z_1} = \left[\min \left(\mathbf{im} \cdot \mathbf{e}_{i, k}, \frac{1}{2} |\mathbf{ik}| \right) - \min \left(\mathbf{ic} \cdot \mathbf{e}_{i, k}, \frac{1}{2} |\mathbf{ik}| \right) \right] \times \left(\frac{1}{2} |\mathbf{ik}| \right)^{-1}.$$

从点 k 对主点 L 的边人工黏性力的施加为 $\alpha_3^{Z_1}(\mathbf{f}_{\text{edge}, k}^{Z_1} \cdot \mathbf{n}_{L, M})\mathbf{n}_{L, M}$, 其中

$$\alpha_3^{Z_1} = \left[\min \left(\mathbf{kL} \cdot \mathbf{e}_{k, i}, \frac{1}{2} |\mathbf{ik}| \right) - \min \left(\max(\mathbf{kc} \cdot \mathbf{e}_{k, i}, 0), \frac{1}{2} |\mathbf{ik}| \right) \right] \times \left(\frac{1}{2} |\mathbf{ik}| \right)^{-1}.$$

从点 k 对主点 M 的边人工黏性力的施加为 $\alpha_4^{Z_1}(\mathbf{f}_{\text{edge}, k}^{Z_1} \cdot \mathbf{n}_{L, M})\mathbf{n}_{L, M}$, 其中

$$\alpha_4^{Z_1} = \left[\min \left(\max(\mathbf{kc} \cdot \mathbf{e}_{k, i}, 0), \frac{1}{2} |\mathbf{ik}| \right) - \min \left(\max(\mathbf{kM} \cdot \mathbf{e}_{k, i}, 0), \frac{1}{2} |\mathbf{ik}| \right) \right] \times \left(\frac{1}{2} |\mathbf{ik}| \right)^{-1}.$$

在上面的表达式中, $\mathbf{e}_{i, k}$ 表示线段 \overline{ik} 的单位法向量, $\mathbf{e}_{k, i} = -\mathbf{e}_{i, k}$, $\mathbf{ic} \cdot \mathbf{e}_{i, k}$ 表示向量 \mathbf{ic} 在 $\mathbf{e}_{i, k}$ 方向上的投影长度, $\mathbf{n}_{L, M}$ 表示线段 \overline{LM} 的单位外法向量, $\mathbf{f}_{\text{edge}, i}^{Z_1}$ 为节点 i 在从网格 Z_1 的边人工黏性力, 其余量类似. 当 $s \geq 2$, 考查从网格 Z_2 所在从点 k, j 对主点 L, M 边人工黏性力的施加, 见图 3 所示.

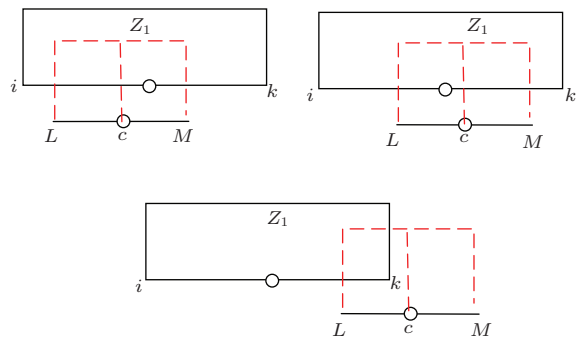


图 2 主网格 Z_1 所属第一从网格从点对 L, M 边人工黏性力施加示意图

Fig. 2. First slave mesh Z_1 for master point L, M .

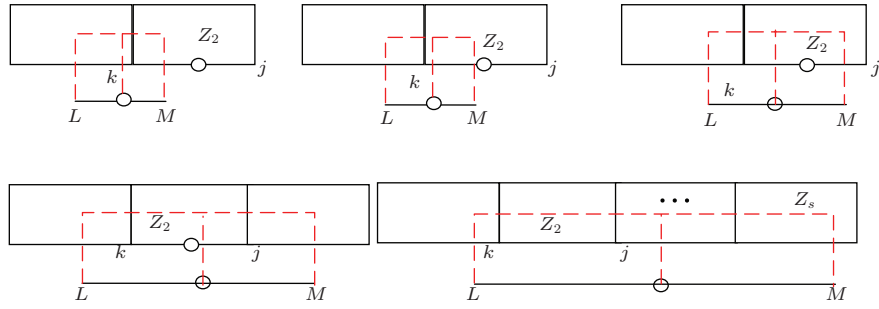


图3 主网格 Z_2 所属第二从网格从点对 L, M 边人工黏性力施加示意图

Fig. 3. Second slave mesh Z_2 for master point L, M .

从点 k 对主点 L 的边人工黏性力的施加为 $\alpha_1^{Z2}(\mathbf{f}_{\text{edge},k}^{Z2} \cdot \mathbf{n}_{L,M})\mathbf{n}_{L,M}$, 其中

$$\alpha_1^{Z2} = \frac{\min\left(\max(\mathbf{k}\mathbf{c} \cdot \mathbf{e}_{k,j}, 0), \frac{1}{2}|\mathbf{k}\mathbf{j}|\right)}{\frac{1}{2}|\mathbf{k}\mathbf{j}|}$$

从点 k 对主点 M 的边人工黏性力的施加为 $\alpha_2^{Z2}(\mathbf{f}_{\text{edge},k}^{Z2} \cdot \mathbf{n}_{L,M})\mathbf{n}_{L,M}$, 其中

$$\alpha_2^{Z2} = \left[\min\left(\mathbf{k}\mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_{k,j}, \frac{1}{2}|\mathbf{k}\mathbf{j}|\right) - \min\left(\max(\mathbf{k}\mathbf{c} \cdot \mathbf{e}_{k,j}, 0), \frac{1}{2}|\mathbf{k}\mathbf{j}|\right) \right] \times \left(\frac{1}{2}|\mathbf{k}\mathbf{j}|\right)^{-1}$$

从点 j 对主点 L 的边人工黏性力的施加为 $\alpha_3^{Z2}(\mathbf{f}_{\text{edge},j}^{Z2} \cdot \mathbf{n}_{L,M})\mathbf{n}_{L,M}$, 其中

$$\alpha_3^{Z2} = \left[\min\left(\mathbf{j}\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_{j,k}, \frac{1}{2}|\mathbf{k}\mathbf{j}|\right) - \min\left(\max(\mathbf{j}\mathbf{c} \cdot \mathbf{e}_{j,k}, 0), \frac{1}{2}|\mathbf{k}\mathbf{j}|\right) \right] \times \left(\frac{1}{2}|\mathbf{k}\mathbf{j}|\right)^{-1}$$

从点 j 对主点 M 的边人工黏性力的施加为 $\alpha_4^{Z2}(\mathbf{f}_{\text{edge},j}^{Z2} \cdot \mathbf{n}_{L,M})\mathbf{n}_{L,M}$, 其中

$$\alpha_4^{Z2} = \left[\min\left(\max(\mathbf{j}\mathbf{c} \cdot \mathbf{e}_{j,k}, 0), \frac{1}{2}|\mathbf{k}\mathbf{j}|\right) - \min\left(\max(\mathbf{j}\mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_{j,k}, 0), \frac{1}{2}|\mathbf{k}\mathbf{j}|\right) \right] \times \left(\frac{1}{2}|\mathbf{k}\mathbf{j}|\right)^{-1}$$

在上面的表达式中, 向量定义类似于从网格 Z_1 所在从点对 L, M 主点边人工黏性力施加时的定义. 从网格 Z_3, \dots, Z_s 所在从点对主点 L, M 的

边人工黏性力类似. 从上面的力的附加方式中可以看出, 当主、从点一一匹配时, 上述边人工黏性的施加等价于标准的有限体积积分得到的离散公式.

3 守恒滑移线设计

为描述问题方便, 设所有网格集合为 Ω , 包含从点的网格集合为 Ω_s , 包含主点的网格集合为 Ω_m , 其余网格集合为 Ω_n ; 所有节点集合为 Λ , 从点集合为 Λ_s , 主点集合为 Λ_m , 其余节点集合为 Λ_n . 满足如下关系式:

$$\Omega = \Omega_n + \Omega_s + \Omega_m,$$

$$\Lambda = \Lambda_n + \Lambda_s + \Lambda_m.$$

假定无外边界做功、无外源情形, 离散形式的总能量守恒为(对于预估-校正步做两次)

$$\begin{aligned} E^{n+1} &:= \sum_{z \in \Omega} M_z e_z^{n+1} + \sum_{p \in \Lambda} \frac{1}{2} M_p |\mathbf{v}_p^{n+1}|^2 \\ &= \sum_{z \in \Omega} M_z e_z^n + \sum_{p \in \Lambda} \frac{1}{2} M_p |\mathbf{v}_p^n|^2 =: E^n. \end{aligned}$$

将 $n+1$ 时刻的总能量改写为

$$\begin{aligned} &\sum_{z \in \Omega} M_z e_z^{n+1} + \sum_{p \in \Lambda} \frac{1}{2} M_p |\mathbf{v}_p^{n+1}|^2 \\ &= \sum_{z \in \Omega_n} M_z e_z^{n+1} + \sum_{p \in \Lambda_n} \frac{1}{2} M_p |\mathbf{v}_p^{n+1}|^2 \\ &\quad + \sum_{z \in \Omega_s} M_z e_z^{n+1} + \sum_{p \in \Lambda_s} \frac{1}{2} M_p |\mathbf{v}_p^{n+1}|^2 \\ &\quad + \sum_{z \in \Omega_m} M_z e_z^{n+1} + \sum_{p \in \Lambda_m} \frac{1}{2} M_p |\mathbf{v}_p^{n+1}|^2. \end{aligned}$$

我们总假定, 除主、从滑移界面处节点速度及网格的内能外, 其他节点速度和网格内能计算正

确. 因此在 $n + 1$ 时刻, 主、从界面处总能量应该为

$$E_{\text{slide}}^{n+1} = E^n - \left(\sum_{z \in \Omega_n} M_z e_z^{n+1} + \sum_{p \in \Lambda_n} \frac{1}{2} M_p |\mathbf{v}_p^{n+1}|^2 \right).$$

总能量守恒为 $E^{n+1} = E^n + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \oint_{\partial} \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} ds$, 一般地由于滑移线的存在, 守恒性难以得到保证. 在守恒滑移算法设计中, 我们需有两个前提条件: 1) 非滑移点, 即普通计算点采用相容格式进行离散; 2) 已有 Wilkins 类型的滑移线算法或其他算法是正确的.

因此我们守恒滑移的总体思想是, 假定滑移点的速度(加速度、位移)已正确得到. 而在滑移线两侧, 从区、主区网格的内能计算有待修正, 以满足总能量守恒. 首先介绍主、从点一致匹配时, 力的分解方法, 对节点 p , 设对应 p, s 为从点, p, m 为主点, 由牛顿第二定律得到的公式为(4)式.

$$M_p \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \mathbf{f}_p,$$

其中, \mathbf{f}_p 为包含节点 p 的四个网格相应隅角力得到(也可用回路积分得到)的节点力, $\mathbf{f}_p = \sum_z \mathbf{f}_z^p$. 将(4)式分解为如下两式^[10]:

$$M_{p,s} \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \mathbf{f}_{p,s} + \mathbf{g}_{p,s}, \quad (9)$$

$$M_{p,m} \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \mathbf{f}_{p,m} + \mathbf{g}_{p,m}, \quad (10)$$

其中, $\mathbf{f}_{p,m} = \sum_{z \in \Omega_m} \mathbf{f}_z^p$, $\mathbf{f}_{p,s} = \sum_{z \in \Omega_s} \mathbf{f}_z^p$ 为主、从点分别在主、从区网格的隅角力之和; $M_{p,m}$, $M_{p,s}$ 为主、从点的节点质量, 且 $M_{p,m} = \sum_{z \in \Omega_m} m_z^p$, $M_{p,s} = \sum_{z \in \Omega_s} m_z^p$, $M_p = M_{p,m} + M_{p,s}$; $\mathbf{g}_{p,m}$, $\mathbf{g}_{p,s}$ 为接触力, 且 $\mathbf{g}_{p,m} = -\mathbf{g}_{p,s}$. 注意到节点 p 的速度唯一性, 则由上面的关系式不难得到

$$\mathbf{g}_{p,m} = -\mathbf{g}_{p,s} = \frac{M_{p,s} \mathbf{f}_{p,m} - M_{p,s} \mathbf{f}_{p,m}}{M_{p,s} + M_{p,m}}.$$

因此上述的分解满足, 动量守恒, 接触力做功和为0. 我们将利用此思想结合内能校正, 构造守恒滑移算法.

定义与主、从界面 Λ_s 和 Λ_m 相邻点集合为 $\Lambda_{s'}$ 和 $\Lambda_{m'}$, 如图4所示, 其中, $\Lambda_{s'} \subset \Lambda_n$, $\Lambda_{m'} \subset \Lambda_n$.

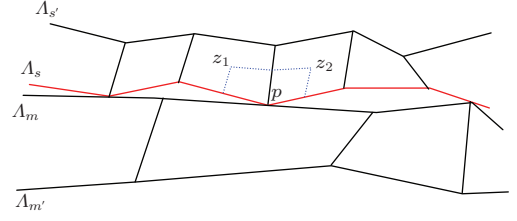


图4 主、从界面相邻点集合示意图

Fig. 4. the point set near the master, slave interface.

假定滑移线两侧的内能计算使用如下两式:

$$M_z (e_z^{n+1} - e_z^n) / \Delta t = - \sum_{p \in \Lambda_s} (\mathbf{f}_p^z)^{n+1*} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{v}_p^{n+1} + \mathbf{v}_p^n) - \sum_{p \in \Lambda_{s'}} \mathbf{f}_p^z \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{v}_p^{n+1} + \mathbf{v}_p^n), \quad (11)$$

$$M_z (e_z^{n+1} - e_z^n) / \Delta t = - \sum_{q \in \Lambda_m} (\mathbf{f}_q^z)^{n+1*} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{v}_q^{n+1} + \mathbf{v}_q^n) - \sum_{q \in \Lambda_{m'}} \mathbf{f}_q^z \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{v}_q^{n+1} + \mathbf{v}_q^n), \quad (12)$$

其中 $(\mathbf{f}_q^z)^{n+1*}$, $(\mathbf{f}_p^z)^{n+1*}$ 为滑移线上假想满足总能量守恒的隅角力. 对上述两式分别在从网格、主网格上求和有

$$\begin{aligned} & \sum_{z \in \Omega_s} M_z (e_z^{n+1} - e_z^n) / \Delta t \\ &= - \sum_{z \in \Omega_s} \sum_{p \in \Lambda_s} (\mathbf{f}_p^z)^{n+1*} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{v}_p^{n+1} + \mathbf{v}_p^n) \\ & \quad - \sum_{z \in \Omega_s} \sum_{p \in \Lambda_{s'}} \mathbf{f}_p^z \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{v}_p^{n+1} + \mathbf{v}_p^n), \\ & \sum_{z \in \Omega_m} M_z (e_z^{n+1} - e_z^n) / \Delta t \\ &= - \sum_{z \in \Omega_m} \sum_{q \in \Lambda_m} (\mathbf{f}_q^z)^{n+1*} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{v}_q^{n+1} + \mathbf{v}_q^n) \\ & \quad - \sum_{z \in \Omega_m} \sum_{q \in \Lambda_{m'}} \mathbf{f}_q^z \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{v}_q^{n+1} + \mathbf{v}_q^n). \end{aligned}$$

上面两式中, 影响守恒性的两个表达式为 $\sum_{z \in \Omega_s} \sum_{p \in \Lambda_s} (\mathbf{f}_p^z)^{n+1*} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{v}_p^{n+1} + \mathbf{v}_p^n)$, $\sum_{z \in \Omega_m} \sum_{q \in \Lambda_m} (\mathbf{f}_q^z)^{n+1*} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{v}_q^{n+1} + \mathbf{v}_q^n)$, 进一步利用接触力的思想, 可以写成如下表达式:

$$\sum_{z \in \Omega_s} \sum_{p \in \Lambda_s} (\mathbf{f}_p^z)^{n+1*} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{v}_p^{n+1} + \mathbf{v}_p^n)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{p \in \Lambda_s} \sum_{z \in \Omega_s} (\mathbf{f}_z^p)^{n+1*} \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{v}_p^{n+1} + \mathbf{v}_p^n) \\
 &= \sum_{p \in \Lambda_s} (\mathbf{f}_{p,s} + \mathbf{g}_{p,s}^*) \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{v}_p^{n+1} + \mathbf{v}_p^n), \\
 &\quad \sum_{z \in \Omega_m} \sum_{q \in \Lambda_m} (\mathbf{f}_q^z)^{n+1*} \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{v}_q^{n+1} + \mathbf{v}_q^n) \\
 &= \sum_{q \in \Lambda_m} \sum_{z \in \Omega_m} (\mathbf{f}_z^q)^{n+1*} \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{v}_q^{n+1} + \mathbf{v}_q^n) \\
 &= \sum_{q \in \Lambda_m} (\mathbf{f}_{q,m} + \mathbf{g}_{q,m}^*) \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{v}_q^{n+1} + \mathbf{v}_q^n),
 \end{aligned}$$

其中, $\mathbf{f}_{p,s} = \sum_{z \in \Omega_s} \mathbf{f}_z^p$, $\mathbf{f}_{q,m} = \sum_{z \in \Omega_m} \mathbf{f}_z^q$, 为 n 时刻的隅角力之和, $\mathbf{g}_{p,s}^*$, $\mathbf{g}_{q,m}^*$ 为接触力. 当点点匹配且一致时, 类似于一个区计算中, 可令

$$\mathbf{g}_{p,s}^* = \mathbf{g}_{p,s}, \quad \mathbf{g}_{q,m}^* = \mathbf{g}_{q,m},$$

且有 $\mathbf{g}_{p,s} = -\mathbf{g}_{p,m}$ 成立. 容易证明, 内能计算 (11), (12) 式中的隅角力采用 \mathbf{f}_z^p , \mathbf{f}_z^q 时, 总能量守恒. 在一般滑移情形下, 内能计算中采用 \mathbf{f}_z^p , \mathbf{f}_z^q 时, 总能量将不守恒, 因此需要修正网格的内能.

第一步 首先 (11), (12) 式中的隅角力使用 \mathbf{f}_z^p , \mathbf{f}_z^q 进行内能更新计算得到

$$\begin{aligned}
 &M_z(e_z^{n+1*} - e_z^n)/\Delta t \\
 &= - \sum_{p \in \Lambda_s} \mathbf{f}_p^z \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{v}_p^{n+1} + \mathbf{v}_p^n) \\
 &\quad - \sum_{p \in \Lambda_s'} \mathbf{f}_p^z \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{v}_p^{n+1} + \mathbf{v}_p^n), \\
 &M_z(e_z^{n+1*} - e_z^n)/\Delta t \\
 &= - \sum_{q \in \Lambda_m} \mathbf{f}_q^z \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{v}_q^{n+1} + \mathbf{v}_q^n) \\
 &\quad - \sum_{q \in \Lambda_m'} \mathbf{f}_q^z \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{v}_q^{n+1} + \mathbf{v}_q^n),
 \end{aligned}$$

得到主、从两侧网格的内能 e_z^{n+1*} .

第二步 计算接触力:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{g}_{p,s} &= M_{p,s} \frac{\mathbf{v}_p^{n+1} - \mathbf{v}_p^n}{\Delta t} - (\mathbf{f}_{p \in \Lambda_s}^{Z1} + \mathbf{f}_{p \in \Lambda_s}^{Z2}), \\
 \mathbf{g}_{q,m} &= M_{q,m} \frac{\mathbf{v}_q^{n+1} - \mathbf{v}_q^n}{\Delta t} - (\mathbf{f}_{q \in \Lambda_m}^{Z1} + \mathbf{f}_{q \in \Lambda_m}^{Z2}).
 \end{aligned}$$

第三步 计算内能修改量:

$$\begin{aligned}
 e_{\text{contact}} &= \sum_{p \in \Lambda_s} \mathbf{g}_{p,s} \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{v}_p^{n+1} + \mathbf{v}_p^n) \\
 &\quad + \sum_{q \in \Lambda_m} \mathbf{g}_{q,m} \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{v}_q^{n+1} + \mathbf{v}_q^n).
 \end{aligned}$$

第四步 主、从两侧网格内能修正:

如果 $e_{\text{contact}} = 0$, 则总能量守恒. 主、从两侧网格内能不修正, $e_z^{n+1} = e_z^{n+1*}$.

如果 $e_{\text{contact}} \neq 0$, 则修正主、从两侧网格的内能.

方式一 整体修正, 修正内能为

$$e_{z \in \Omega_s \cup \Omega_m}^{n+1} = e_{z \in \Omega_s \cup \Omega_m}^{n+1*} - \frac{e_{z \in \Omega_s \cup \Omega_m}^{n+1*}}{\sum_{j \in \Omega_s \cup \Omega_m} e_j^{n+1*}} e_{\text{contact}},$$

由于 e_{contact} 在每一计算步中相对总内能是一个小量, 一般不会破坏内能的非负性. 如果原来滑移线算法保持对称性, 则整体修正方法仍保持对称性.

方式二 局部修正, 以主点为基准, 对每一主点 q 所在主区两个网格的主边的中点 q_L , q_R , 判断哪些从点属于 $\overline{q_L q_R}$, 记为 S_q , 如果 $S_q = \phi$, 则记录下 q 所属从区网格 $\Omega_{q,s}$, 对于 $S_q \neq \phi$, 记录下 S_q 所属的从区网格, 不妨也定义为 $\Omega_{q,s}$. 记 q 点所属主区网格为 $\Omega_{q,m}$. 如图 5 所示, 则与 q 点相关的主、从点接触力做功为

$$\begin{aligned}
 e_{q,\text{contact}} &= \sum_{p \in S_q} \mathbf{g}_{p,s} \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{v}_p^{n+1} + \mathbf{v}_p^n) + \mathbf{g}_{q,m} \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{v}_q^{n+1} + \mathbf{v}_q^n).
 \end{aligned}$$

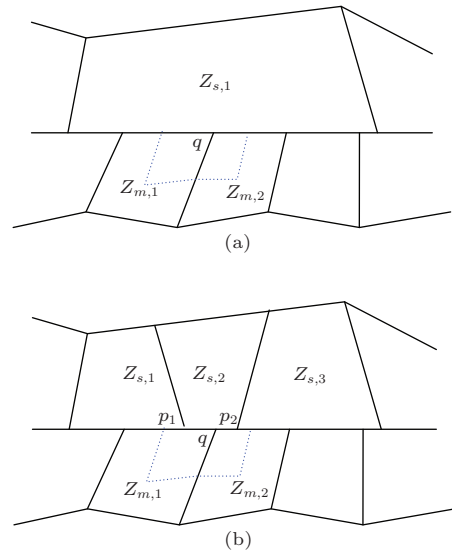


图 5 (a) $\Omega_{q,m} = \{Z_{1,m}, Z_{2,m}\}$, $S_q = \phi$, $\Omega_{q,s} = \{Z_{1,s}\}$; (b) $\Omega_{q,m} = \{Z_{1,m}, Z_{2,m}\}$, $S_q \neq \phi$, $\Omega_{q,s} = \{Z_{1,s}, Z_{2,s}, Z_{3,s}\}$

Fig. 5. (a) $\Omega_{q,m} = \{Z_{1,m}, Z_{2,m}\}$, $S_q = \phi$, $\Omega_{q,s} = \{Z_{1,s}\}$; (b) $\Omega_{q,m} = \{Z_{1,m}, Z_{2,m}\}$, $S_q \neq \phi$, $\Omega_{q,s} = \{Z_{1,s}, Z_{2,s}, Z_{3,s}\}$.

对每一个 $Z \in \Omega_{q,m} \cup \Omega_{q,s}$ 的网格进行内能修正

$$e_z = e_z - \frac{e_z}{\sum_{j \in \Omega_{q,s} \cup \Omega_{q,m}} e_j} e_{q,\text{contact}}.$$

在上面的接触力做功分解中, 满足完备性,

$$\begin{aligned} & \sum_{q \in \Lambda_m} e_{q,\text{contact}} \\ &= \sum_{q \in \Lambda_m} \sum_{p \in S_q} \mathbf{g}_{p,s} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{v}_p^{n+1} + \mathbf{v}_p^n) \\ & \quad + \mathbf{g}_{q,m} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{v}_q^{n+1} + \mathbf{v}_q^n) \\ &= \sum_{p \in \Lambda_s} \mathbf{g}_{p,s} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{v}_p^{n+1} + \mathbf{v}_p^n) \\ & \quad + \sum_{q \in \Lambda_m} \mathbf{g}_{q,m} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{v}_q^{n+1} + \mathbf{v}_q^n). \end{aligned}$$

所以局部修正后, 满足总能量守恒.

下面将证明局部修正满足对称性要求. 首先假定主、从区所在物质块分别按等角度划分, 原滑移线算法得到的速度满足对称性要求, 则由

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{p,s} &= (\mathbf{f}_{p \in \Lambda_s})^{n+1} - (\mathbf{f}_{p \in \Lambda_s}^{Z1} + \mathbf{f}_{p \in \Lambda_s}^{Z2}), \\ \mathbf{g}_{q,m} &= (\mathbf{f}_{q \in \Lambda_m})^{n+1} - (\mathbf{f}_{q \in \Lambda_m}^{Z1} + \mathbf{f}_{q \in \Lambda_m}^{Z2}). \end{aligned}$$

定义的接触力也满足对称性要求. 用局部修正方法时, 对每一个主点相应修改的网格 $\Omega_{q,m} \cup \Omega_{q,s}$ 的个数固定, 且 $e_{q,\text{contact}}$ 为同一值, 因此对内能的修正保持对称性.

4 数值模拟与算法验证

我们编制了基于 TVD 自相容守恒型格式^[12] 的两物质区相互作用的弹塑性流体力学程序 (程序 A, Code A), 并进行了相关 Benchmark 数值模拟测试和算法的验证, 由于篇幅所限, 下面仅给出 3 个算例.

算例 1 Sod 激波管问题是初始间断的分解问题, 在一无限长管道中, 在 $x = 0$ 处的右边是高压气体, 左边是低压气体, 在初始时刻处于静止状态, 两者之间用薄膜隔离. $t = 0$ 时刻薄膜破裂, 形成向左激波和向右稀疏波. Sod 问题初值为

$$\begin{aligned} (\rho, u, p)_L &= (1.0, 0, 1), \\ (\rho, u, p)_R &= (0.125, 0, 0.1). \end{aligned}$$

状态方程使用理想气体, 多方指数 $\gamma = 1.4$. 考查守恒滑移算法在非匹配网格下的计算, 初始网

格为: 第一物质区 50×13 , 第二物质区 50×25 , 如图 6; 计算到 $t = 0.4$ 时刻网格整体图及局部放大图, 见图 7 和图 8.

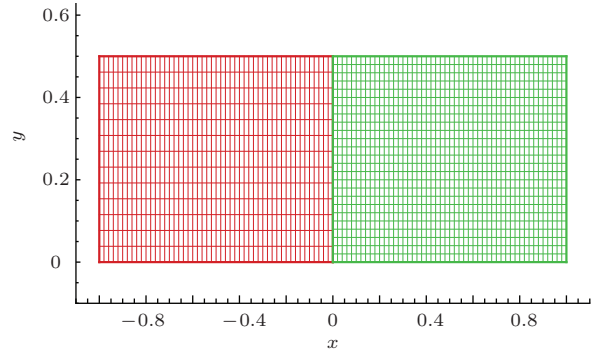


图 6 (网刊彩色) 程序 A, 初始网格图

Fig. 6. (color online) Initial mesh for code A.

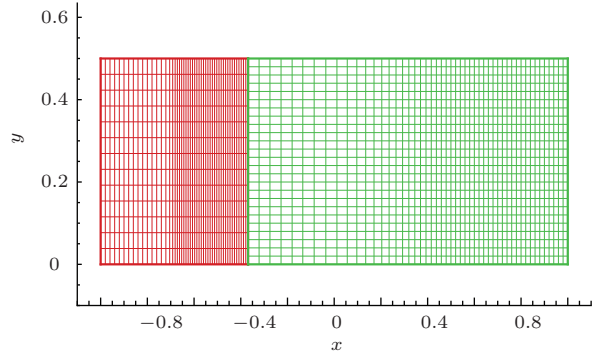


图 7 (网刊彩色) 程序 A, 计算到 $t = 0.4$ 时的网格图

Fig. 7. (color online) The mesh at $t = 0.4$ using code A.

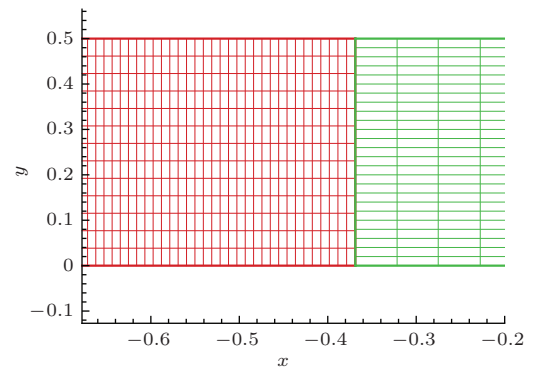


图 8 (网刊彩色) 程序 A, 计算到 $t = 0.4$ 时的局部网格图

Fig. 8. (color online) The local mesh at $t = 0.4$ using code A.

总能量修正后, 相对误差 $(E_t - E_0)/E_0$ 如图 9(a), 可以看到在本算例中, 可以做到完全守恒. 图 9(b) 是经典二维有限元程序 FEM2D 计算的总能量相对误差.

图 10 给出用程序 A 计算到 $t = 0.4$ 时刻的速度、密度、压力图.

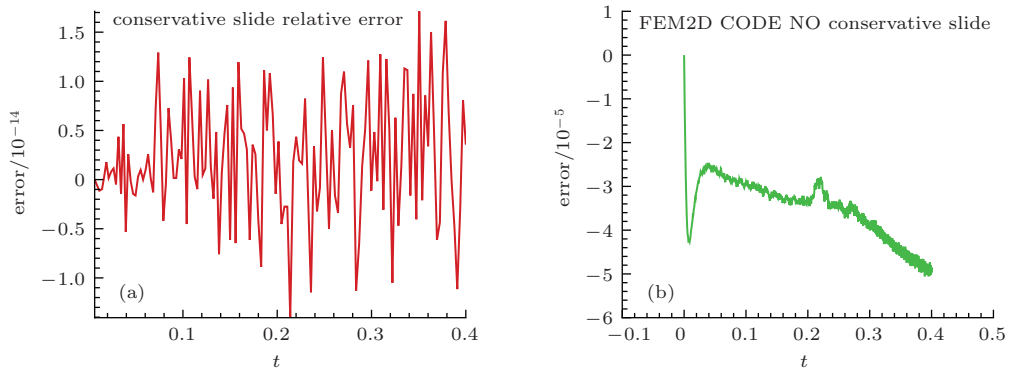


图9 (a) 程序 A 总能量相对误差; (b) 无守恒校正程序 FEM2D 总能量相对误差

Fig. 9. (a) The relative error with conservative correct using code A; (b) the relative error without conservative correct.

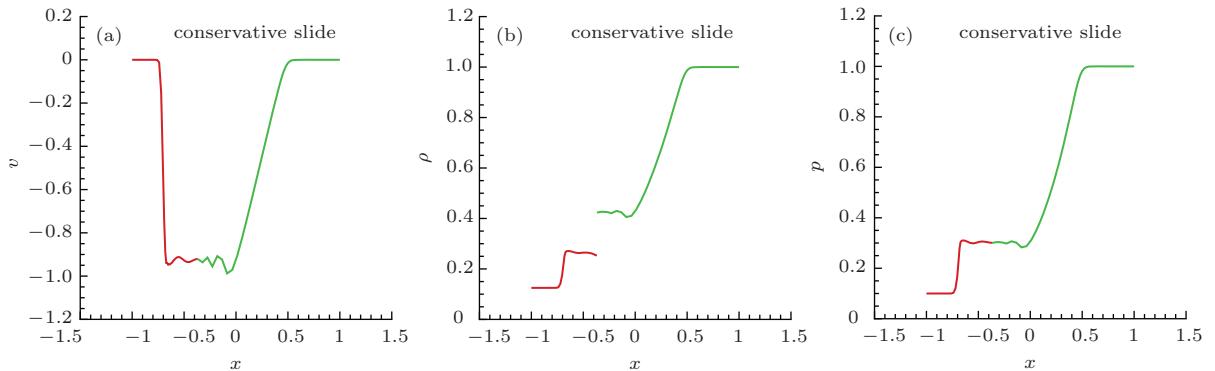


图10 (网刊彩色) 程序 A 计算到 $t = 0.4$ 时的速度、密度、压力

Fig. 10. (color online) the velocity, density, pressure at $t = 0.4$ using code A.

算例 2 在柱坐标系下, 考虑一维球对称 Noh 问题. 初始条件为 $u_0 = u(r, 0) = -1$, $\rho_0 = \rho(r, 0) = 1$, $e_0 = e(r, 0) = 0$, $p_0 = p(r, 0) = 0$ ($0 \leq r \leq 1$); 内边界条件为 $x(r_0 = 0, t) \equiv 0$, 外界面为自由面. 当反射激波未到达外界面时, $x(r_0 = 1, t) \equiv 1$. 状态方程使用理想气体, 绝热指数 $\gamma = 5/3$, 激波速度为 $D = 1/3$, 激波波后精确解为 $u^+ = 0$, $\rho^+ = 64$, $e^+ = 0.5$, $p^+ = 64/3$, 激波到达外界面时刻为 $t_c = 0.75$, 因此在 $t = 0.6$ 时刻, 外界面在理论上还是未扰动自由面边界, 保持原来的

初始速度 -1 .

计算条件为: 分两个物质区, 半径区间分别为 $[0, 0.4]$, $[0.4, 0.6]$; 网格数分别为 11×20 , 15×30 , CFL 条件数为 0.5, 计算终止时刻 $t = 0.6$. 图 11 (a) 为初始网格, (b) 为程序 A 计算到 $t = 0.6$ 时刻的网格图, (c) 为总能量相对误差, 图 12 密度、速度、压力分布. 可以看出程序 A 所使用的自相容守恒滑移算法是完全守恒的. 从 $t = 0.6$ 时刻的网格图, 还可以看出自相容守恒滑移算法的计算结果保持了对称性以及较为准确地捕捉了激波位置.

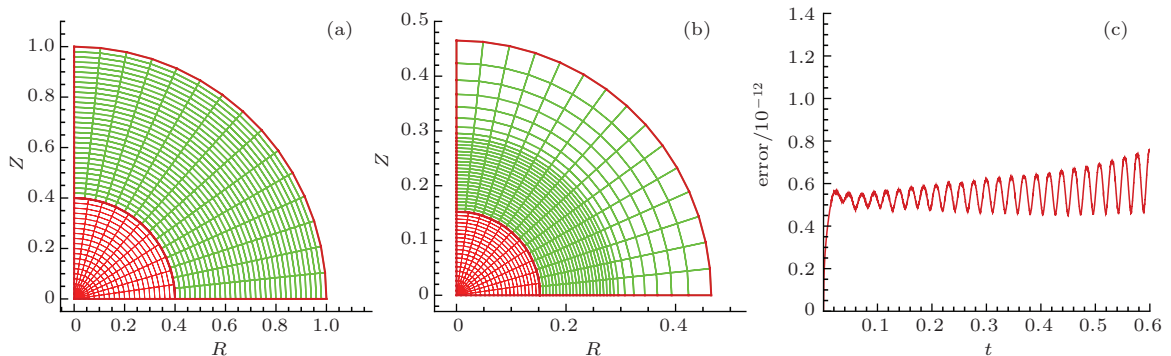


图11 (网刊彩色) 程序 A 计算 (a) 初始网格; (b) $t = 0.6$ 时刻网格图; (c) 总能量相对误差

Fig. 11. (color online) the mesh of different time at (a) $t = 0$ and (b) $t = 0.6$ and (c) the relative error of total energy.

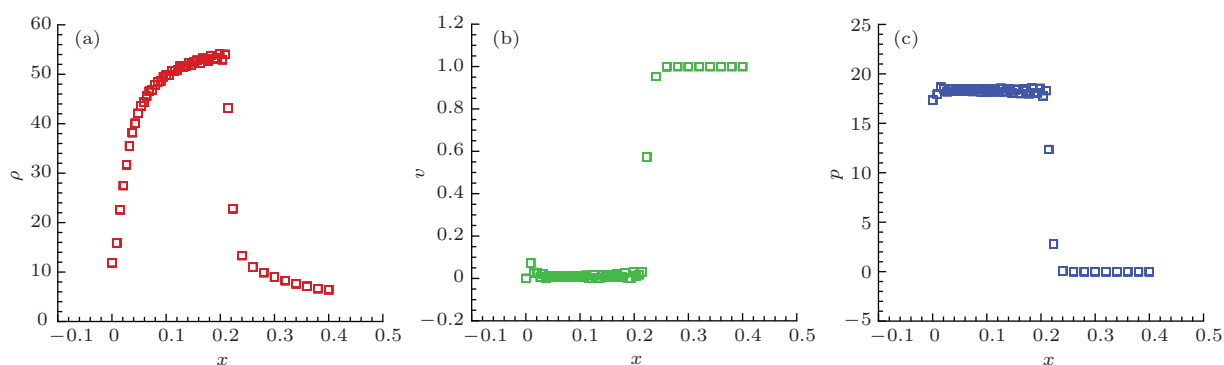


图 12 (网刊彩色) 程序 A 计算到 $t = 0.6$, (a) 密度; (b) 速度; (c) 压力

Fig. 12. (color online) The numerical result of (a) density, (b) velocity and (c) pressure at $t = 0.6$.

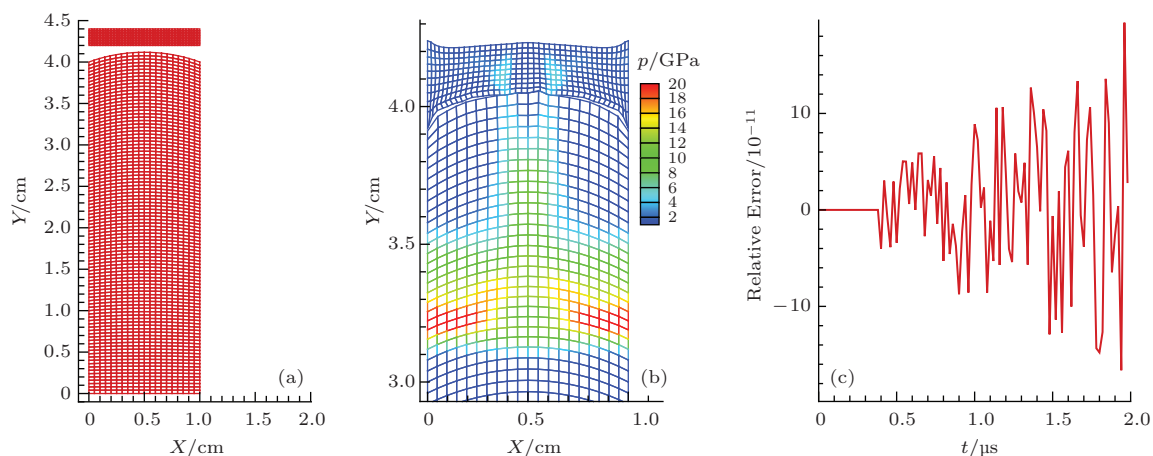


图 13 (网刊彩色) (a) $t = 0$ 时刻网格及构型; (b) $t = 2 \mu\text{s}$ 压力及局部网格图; (c) 相对误差

Fig. 13. (color online) (a) the mesh and configuration at $t = 0$; (b) the pressure and mesh at $t = 2 \mu\text{s}$; (c) the relative error

算例 3 如图 13(a) 初始构型的铝飞片以 2 km/s 的速度撞击带一定弧度的钽靶, 采用弹塑性模型, 状态方程使用格留乃森状态方程. 图 13(b) 为计算 2 μs 压力及网格局部放大图, 图 13(c) 为总能量相对误差随时间变化图. 可以看出数值模拟结果保持了对称性及总能量守恒.

5 结 论

本文利用拉氏相容性格式和 Wilkins 滑移线算法, 定义“接触力”以及“接触力做功”, 然后利用局部修正内能的方法达到总能量守恒. 该修正方法可保证一维对称性及总能量的守恒性, 同时提高了数值模拟的准确度.

参考文献

[1] Yu M, Sun Y T, Liu Q 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 114702 (in Chinese) [于明, 孙宇涛, 刘全 2015 物理学报 **64**

114702]
 [2] Caramana E J, Burton D E, Shashkov M J, Whalen P P 1998 *Journal of Computational Physics* **146** 227
 [3] Caramana E J, Shashkov M J 1998 *Journal of Computational Physics* **142** 521
 [4] Caramana E J, Whalen P P 1998 *Journal of Computational Physics* **141** 174
 [5] Caramana E J, Shashkov M J, Whalen P P 1998 *Journal of Computational Physics* **144** 70
 [6] Bauer A L, Burton D E, Caramana E J 2006 *Journal of Computational Physics* **218** 572
 [7] Wilkins M 1969 UCRL-7322, LLNL
 [8] Whirley R G, Engelmann B E 1993 UCRL-MA-110630
 [9] Hallquist J O, Goudreau G L, Benson D J 1985 *LLNL* **51** 107
 [10] Caramana E J 2009 *Journal of Computational Physics* **228** 3911
 [11] Wang R L, Liu Q, Lin Z 2012 *Journal of Computational Physics* **29** 667 (in Chinese) [王瑞利, 刘全, 林忠 2012 计算物理 **29** 667]
 [12] Liu Q, Lin Z, Wang R L 2012 *Computational Mechanics* **29** 609 (in Chinese) [刘全, 林忠, 王瑞利 2012 计算力学 **29** 609]

Conservative sliding algorithms for hydrodynamics*

Liu Quan Yu Ming[†] Lin Zhong Wang Rui-Li

(*Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100094, China*)

(Received 28 March 2015; revised manuscript received 7 May 2015)

Abstract

The Lagrangian hydrodynamics algorithm using staggered mesh is one of the most important algorithms for engineering design and science computing. Some questions need to use the conservative scheme. Shashkov gave the idea how to get conservation with a material. He defined the conservative scheme to be a compatible algorithm. When we perform a numerical simulation with two or more materials, we should use sliding line or contact-impact algorithm. In this case, the Wilkins algorithm is used mostly. But this algorithm is not conservative. This paper presents a conservative method for sliding line based on the compatible Lagrangian hydrodynamics algorithm and Wilkins sliding algorithm. The conservation of total energy can be got by the local modification through the idea of contact force and contact work. This method can ensure the symmetric property and conservative property, and improve the numerical accuracy. In this paper, we give the detail in how to design the conservative sliding algorithm and how to impose the slave's edge artificial viscosity. We also gave some numerical simulations to prove that our scheme is right and useful.

Keywords: compatible, sliding algorithm, conservative method, contact force

PACS: 47.11.-j, 47.11.Fg

DOI: [10.7498/aps.64.194701](https://doi.org/10.7498/aps.64.194701)

* Project supported by National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11372051, 11172050, 11272064) and NASF (Grant No. 11076015).

[†] Corresponding author. E-mail: yu_ming@iapcm.ac.cn