

干斜压大气拉格朗日原始方程组的半解析解法和非线性密度流数值试验

郝世峰 楼茂园 杨诗芳 李超 孔照林 裘薇

Semi-analytical solution of the dry baroclinic Lagrange primitive equation and numerical experiment of a non-linear density current

Hao Shi-Feng Lou Mao-Yuan Yang Shi-Fang Li Chao Kong Zhao-Lin Qiu Wei

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 194702 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.194702

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.194702>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I19>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

流体力学拉氏守恒滑移线算法设计

[Conservative sliding algorithms for hydrodynamics](#)

物理学报.2015, 64(19): 194701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.194701>

疏水表面减阻的格子 Boltzmann 方法数值模拟

[Numerical investigation on drag reduction with hydrophobic surface by lattice Boltzmann method](#)

物理学报.2015, 64(18): 184702 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.184702>

液滴在梯度微结构表面上的铺展动力学分析

[Spreading dynamics of liquid droplet on gradient micro-structured surfaces](#)

物理学报.2015, 64(15): 154705 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.154705>

脉动流在分叉管中通栓效果的晶格玻尔兹曼方法研究

[Pulsation effect on thrombus in a bifurcation pipe by the lattice Boltzmann method](#)

物理学报.2015, 64(14): 144701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.144701>

低速湍流模拟的预处理技术研究

[Study of precondition for simulating low-speed turbulence](#)

物理学报.2015, 64(13): 134701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.134701>

干斜压大气拉格朗日原始方程组的半解析解法和 非线性密度流数值试验*

郝世峰[†] 楼茂园 杨诗芳 李超 孔照林 裘薇

(浙江省气象台, 杭州 310017)

(2015年4月14日收到; 2015年5月11日收到修改稿)

以差分方程代替微分方程给大气原始方程组求解带来了诸多难以解决的问题, 对于(半)拉格朗日模式来说质点轨迹的计算与Helmholtz方程的求解是两大难题. 本文通过对气压变量代换, 并在积分时间步长内将原始方程组线性化, 近似为常微分方程组, 求出方程组的半解析解, 再采用精细积分法求解半解析解. 半解析方法可同时计算风、气压和位移, 无需求解Helmholtz方程, 质点的位移采用积分风的半解析解得到, 相比采用风速外推的计算方法, 半解析方法更科学合理. 非线性密度流数值试验表明: 半解析模式能够清晰地模拟Kelvin-Helmholtz切变不稳定涡旋的发生和发展过程; 模拟的气压场和风场环流结构与标准解非常相似, 且数值解是收敛的, 同时, 总质量和总能量具有较好的守恒性. 试验初步证明了采用半解析方法求解大气原始方程组是可行的, 为大气数值模式的构建提供了一个新的思路.

关键词: 大气原始方程组, 半解析解, 精细积分, 密度流

PACS: 47.11.-j, 92.60.Wc

DOI: 10.7498/aps.64.194702

1 引言

有限差分方法和谱方法是构建数值预报模式动力框架的两大类别, 在数值天气预报和大气环流数值模式发展的进程中, 曾先后成为发展的主流. 当前国际上的主要业务或研究中心绝大多数采用全球谱模式, 但随着模式分辨率的提高, 以及谱模式自身固有缺陷, 目前, 数值模式的发展又转向了有限差分模式^[1]. 除了这两大类别外, 中国学者辜旭赞等提出了双三次模式的动力框架, 通过对空间大气物理量场做双三次曲面拟合, 对大气原始方程组作二阶非线性近似求解^[2,3]. 无论是差分方法还是谱方法等, 其归根揭底是要求解大气原始微分方程组(Navier-Stokes equations), 众所周知, 该方程组目前无法求得解析解, 但这并不代表不存在近似

解析解. 传统的差分方法对物理量在空间和时间上离散, 用差分代替微分, 这给方程的求解带来了一些难以解决的问题, 对于(半)拉格朗日(Lagrange)模式来说, 质点轨迹计算是一大问题, 只能采用风速外推的计算方法^[4-6], 中国的Grapes模式也是采用了风速外推的方法^[7]. 虽然Staniforth等^[8,9]及Wood等^[10]提出了改进方案, 采用质点的起点与终点的平均速度计算位移, 但显然对非线性运动来说理论上不完善. 此外, 另一大问题是, 虽然(半)拉格朗日模式可采用大时间步长, 但必须求解超大型Helmholtz方程, 需要几百甚至上千次迭代求解, 耗费掉大量计算时间, 使得计算效率并没有太大的优势^[7].

导致以上两大问题的根源与求解原始方程时采用了时间差分方案有关, 那么积分数值模式时

* 公益性行业(气象)科研专项基金(批准号: GYHY201306010)、国家自然科学基金青年科学基金(批准号: 41405047)和国家科技重大专项(批准号: 2012ZX07101-010)资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: shifenghao@aliyun.com

是否一定要采用时间差分方案呢? 对于这一问题, 钟万颢早在1993年就提出了精细积分法, 即采用半解析解的时程积分方法. 精细积分法在空间上采用差分格式, 时间坐标采用微分, 求得微分方程组的半解析解(近似解析解), 再采用时间逐步积分半解析解的方法得到微分方程的数值解. 钟万颢等^[11,12]利用精细积分法研究了“对流-扩散”方程的数值积分问题, 证明了该方法不但计算精度高, 而且计算无条件稳定. 孙建强等^[13]通过求解 Burgers 方程表明, 精细积分法在计算精度上和 Runge-Kutta 法表现相同的特性, 但稳定性具有明显的优势. 采用半解析解的精细积分法在很多领域得到了广泛的研究和应用. 富明慧等研究了时变动力系统的摄动法求解^[14]; 吕和祥等^[15,16], Fan 等^[17]基于精细积分法提出了非线性动力方程的数值求解方法; 谭述君等系统地研究了非线性方程的 Duhamel 项的精细积分方法^[18]. 在数值模拟方面, 王润秋等采用三维任意差分精细积分法实现了塔里木地震波的正演模拟^[19]; Duan 等基于精细积分法开展了三维弹性波的数值模拟^[20]; Han 等^[21], Shi 等^[22]基于半解析的精细积分方法开展了电磁波的数值模拟. 此外, 在两点边值问题^[23]、病态方程组求解问题^[24]及地球引力场的误差估算等^[25]方面也有广泛的应用.

半解析解法在数值天气预报模式领域的应用还少见报道. Liu 等基于准位涡方程的半解析解建立了半解析模式, 研究了 Rossby 波的传播问题, 得到了和正压模式非常相似的结果^[26]. 郝世峰等研究了半拉格朗日模式正压原始方程风的半解析解法, 质点位移通过积分半解析解求得. 结果表明半解析解比差分分解具有明显的优势^[27]. 如何将半解析解法应用于斜压原始方程, 并且避免求解 Helmholtz 方程, 本文做了一些尝试性的研究工作, 并开展了非线性密度流数值试验及守恒性检验^[28]. 密度流试验是验证非静力模式的标准理想场试验, 可检验模式对非线性流的精细尺度和瞬变特征的模拟能力. 美国的中尺度模式, 中国的 Grapes 模式等均将密度流试验作为一个标准检验^[29-31]. Straka 等给出了各种分辨率条件下非线性密度流试验结果, 并给出了标准解^[32], 本文将引用此标准解对半解析模式的模拟能力和数值解的收敛性进行验证.

2 干斜压大气 Lagrange 原始方程组的半解析解及精细积分法

2.1 干斜压大气 Lagrange 原始方程组的半解析解

直角坐标系下不含水汽的干斜压大气 Lagrange 原始方程组为

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = fv - f_\varphi w - C_p \theta \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \\ \frac{dv}{dt} = -fu - C_p \theta \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \\ \frac{dw}{dt} = f_\varphi u - C_p \theta \frac{\partial \Pi}{\partial z} - g, \\ \frac{d\Pi}{dt} = -\frac{\Pi}{\alpha - 1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ \frac{d\theta}{dt} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

上式中 Exner 气压 $\Pi = (p/p_0)^{\alpha-1}$; p 为气压; 参考气压 $p_0 = 100000.0 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$; $\alpha = C_p/R_d$; 空气定压比热 $C_p = 1004.0 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$; 干空气气体常数 $R_d = 287.0 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$; 位温 θ ; $f = 2\Omega\sin\varphi$; $f_\varphi = 2\cos\varphi$; 地球自转角速度 $\Omega = 7.272 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$; 纬度 φ ; 重力加速度 $g = 9.81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

相比 Euler 形式的方程组, 建立在移动流体单元上的 Lagrange 方程组没有非线性平流项, 这给方程组的近似求解带来了便利. 由于移动的干气块单元具有位温守恒的基本属性 ($d\theta/dt = 0$), 因此只需求解其余的 4 个变量. 作变量代换, 令: $\psi^2 = \Pi$, 代入 (1) 式, 并写为矩阵形式, 得非齐次微分方程组:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{L}\mathbf{V} + \mathbf{G}, \quad (2)$$

其中向量: $\mathbf{V} = (u, v, w, \psi)^T$; $\mathbf{G} = (0, 0, -g, 0)^T$; 矩阵 \mathbf{L} 为

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & f - f_\varphi & -2C_p\theta \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ -f & 0 & 0 & -2C_p\theta \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ f_\varphi & 0 & 0 & -2C_p\theta \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{D}{2(\alpha - 1)} \end{pmatrix}.$$

散度项

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

矩阵 L 左上的三阶矩阵块为反对称矩阵, 因此科氏力与质点速度正交, 不做功. 在球坐标系下依然为反对称矩阵, 只是增加了曲率项而已. 如果 L 为常系数矩阵则方程 (2) 为简单的线性常微分方程组, 可求解析解. 问题的关键是必须把 L 在一定条件下合理近似为常系数矩阵. 为此, 将时间轴划分为等 Δt 间隔的 n 个时间层, 如 Δt 足够的小, 在两个相邻时间节点区间内 L 可近似为常数矩阵, 即按照传统的方法, 在第 n 时间节点处将 L “冻结”, 表示为 L_n , 符号下标 n 表示时间层. 当然, 如采用隐式格式取 $L_{n+1/2} = 0.5(L_{n+1} + L_n)$ 可能更为合理, 但需要迭代法求解, 可在以后的研究中考虑. L_n 矩阵内的散度项和 ψ 的梯度项需要通过差分方法计算. 在 Δt 区间内求解微分方程 (2) 得半解析解:

$$V(\tau) = e^{L_n \tau} V_n + (e^{L_n \tau} - I) L_n^{-1} G, \quad 0 \leq \tau \leq \Delta t, \quad (3)$$

其中 I 为单位矩阵, $e^{L_n \tau}$ 为待求的指数矩阵. 矩阵 L_n 有两个实特征根和两个虚特征根, 分别为

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = -\frac{D}{2(\alpha - 1)}, x_2 = -x_3 = 2\Omega i \right\}. \quad (4)$$

求得指数矩阵的解析式:

$$e^{L_n \tau} = a_0(\tau) I + a_1(\tau) L_n + a_2(\tau) L_n^2 + a_3(\tau) L_n^3, \quad (5)$$

其中,

$$a_0(\tau) = e^{x_0 \tau} = 1, \quad (6)$$

$$a_1(\tau) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \left[\frac{x_2^2}{x_1} (e^{x_1 \tau} - 1) + x_1 (\cos x_2 \tau - 1) + \frac{x_1^2}{x_2} \sin x_2 \tau \right], \quad (7)$$

$$a_2(\tau) = \frac{1 - \cos x_2 \tau}{x_2^2}, \quad (8)$$

$$a_3(\tau) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \left[\frac{1}{x_1} (e^{x_1 \tau} - 1) + \frac{x_1}{x_2} (\cos x_2 \tau - 1) - \frac{1}{x_2} \sin x_2 \tau \right]. \quad (9)$$

以上是在 L_n 没有重特征根的情况下 $e^{L_n \tau}$ 的解析式, 有重根情况下不再详述. 方程 (3) 的解为

$$V(\tau) = (a_0 V_n + a_1 G) + L_n (a_1 V_n + a_2 G) + L_n^2 (a_2 V_n + a_3 G) + L_n^3 a_3 V_n, \quad 0 \leq \tau \leq \Delta t. \quad (10)$$

对 (10) 式时间积分可得位移的半解析解.

2.2 半解析解的精细积分算法

虽然 (10) 式是 (3) 式的准确数学解析式, 但由于特征根 x_1 和 x_2 的量级很小, 所以函数 $a_i(\tau)$, $i \in [0, 3]$ 的计算过程中存在两小量相除的问题, 很容易引起较大的计算误差. 因此 (10) 式在实际计算时很难使用. 钟万勰等提出的指数矩阵的精细积分法目前是最好的解决办法, 简述如下.

将 $L_n \Delta t$ 划分成 2^m 等份, m 为整数. 根据指数矩阵性质有

$$e^{L_n \frac{\Delta t}{2^{m-1}}} = e^{L_n \frac{\Delta t}{2^m}} e^{L_n \frac{\Delta t}{2^m}}. \quad (11)$$

(11) 式也称为加法定理. 当 m 取值足够大, 如 $m = 30$ 时, $b = \frac{\Delta t}{2^m}$ 将变得很小, $L_n b$ 接近于零矩阵, 此时 $e^{L_n b}$ 用其 Taylor 展开式的前几项即可精确求得

$$e^{L_n b} = I + L_n b + \frac{L_n^2}{2!} b^2 + \frac{L_n^3}{3!} b^3. \quad (12)$$

当然 (12) 式的精度可根据需求取更高阶数. 有了 (12) 式的结果, 再利用 (11) 式, 则 $e^{L_n \Delta t}$ 只需经过 m 次矩阵乘法即可精确求得.

对于 (3) 式的 Duhamel 项的精细积分方法如下.

由于

$$(e^{L_n \frac{\Delta t}{2^{m-1}}} - I) = (e^{L_n \frac{\Delta t}{2^m}} + I)(e^{L_n \frac{\Delta t}{2^m}} - I), \quad (13)$$

可得

$$(e^{L_n \Delta t} - I) L_n^{-1} = (e^{\frac{L_n \Delta t}{2^1}} + I)(e^{\frac{L_n \Delta t}{2^2}} + I)(e^{\frac{L_n \Delta t}{2^3}} + I) \cdots \times (e^{L_n b} + I)(e^{L_n b} - I) L_n^{-1}. \quad (14)$$

当 m 取足够大时, (14) 式的最后两项利用 Taylor 展开式的前几项即可精确求得

$$(e^{L_n b} - I) L_n^{-1} = I b + \frac{L_n^1}{2!} b^2 + \frac{L_n^2}{3!} b^3 + \frac{L_n^3}{4!} b^4. \quad (15)$$

很显然 (15) 式消除了逆矩阵的计算, 这是保证计算精度的关键点. 计算 (14) 式需要利用到 (11) 式的中间结果, 可与 (11) 式同时计算. Duhamel 项只需经过 m 次矩阵乘法即可求得. 当然, 如果 L_n 不是病态矩阵, Duhamel 项没有必要采用精细积分

法计算, 可节省计算时间. 关于精细积分的详细方法可参考相关文献, 此处不再详述.

2.3 半解析解的地转平衡关系

当大气在静力平衡和地转平衡条件的理想状态下, 气块将始终维持匀速运动. 通常用平衡流试验检验模式的地转平衡稳定性能, 从理论上可直接证明, 大气原始方程组的半解析解满足这一基本物理性质. 证明如下.

给定初始条件

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \text{ s}^{-1}; \\ |u| > 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; \quad t = 0; \\ v = w = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \end{aligned} \quad (16)$$

初始条件(16)式给定了无辐散大气条件, 由(1)式的连续方程可知

$$\left. \frac{d\psi}{dt} \right|_{t=0} = 0. \quad (17)$$

再假定大气满足静力平衡和地转平衡条件, 则

$$\left. \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right|_{t=0} = 0. \quad (18)$$

以上条件给出了定常的纬向平行运动的大气流场.

将初始条件(18)代入(2)式得

$$\mathbf{G} = -L\mathbf{V}|_{t=0} = -L_0\mathbf{V}_0. \quad (19)$$

将(19)式代入半解析解(3)式得

$$\mathbf{V}(\tau) = \mathbf{V}_0, \quad 0 \leq \tau \leq \Delta t. \quad (20)$$

由于 $v = 0.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 因此质点在同一纬圈上运动, 且由(20)式可得速度和气压不变, 因此依然满足地转平衡和静力平衡, 平衡流不会被破会. 以次类推采用逐步积分, 平衡流始终维持. 由此可证平衡流试验对于半解析解来说是自然成立的, 计算精度只取决于指数矩阵的计算精度, 大量文献证明采用精细积分法求解指数矩阵具有极高的精度, 此处不在赘述.

2.4 半解析模式的质点位移计算方法

对于(半) Lagrange 模式来说, 质点的轨迹计算至关重要, 相当于 Euler 方程的非线性平流项; 通

常的差分模式采用风速外推的计算方法, 而采用半解析方法求解则更为合理. 由于

$$\left\{ x, y, z \left| \frac{dx}{dt} = u, \frac{dy}{dt} = v, \frac{dz}{dt} = w \right. \right\}, \quad (21)$$

将方程(2)增维, 向量 $\mathbf{V} = (u, v, w, \psi, x, y, z)^T$; $\mathbf{G} = (0, 0, -g, 0, 0, 0, 0)^T$; 矩阵 L 变为

$$L = \begin{pmatrix} 0 & f - f_\varphi & -2C_p\theta \frac{\partial \psi}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f & 0 & 0 & -2C_p\theta \frac{\partial \psi}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ f_\varphi & 0 & 0 & -2C_p\theta \frac{\partial \psi}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{D}{2(\alpha - 1)} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

增维后方程的半解析解依然为(3)式. 很显然 L 的行列式值为零, 逆矩阵不存在, 但采用精细积分方法求解则无需考虑这一点, 并且可同时计算风、气压和位移.

3 半解析模式设计和非线性密度流数值试验

3.1 半解析模式设计

半解析模式采用均匀网格, 所有要素均置于同一格点上, 在每一格点上采用精细积分法求解方程(3); 无湍流扩散项, 无地形影响; 上下边界垂直速度采用齐次边界条件 $w \equiv 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; 周期侧边界条件; 矩阵 L 内的散度项和梯度项采用二阶精度的中央差计算; 模式采用半拉格朗日方案, 气块在起始点处的要素值采用 Hermit 插值方法得到. 由于采用了气压变量代换, 会产生杂波影响模式计算稳定性, 因此每积分一步对 Π 做一次空间高斯5点平滑.

3.2 非线性密度流数值试验设计

Straka(1993)的非线性密度流数值试验结果证明: 随模式分辨率逐渐提高密度流的数值解是收敛的, 当空间分辨率 $\Delta x = \Delta z \leq 100 \text{ m}$ 时数值解已经非常相似, 因此通常将分辨率为 25 m 的密

度流数值解作为标准解. 参照Straka的方案, 将半解析模式限制为二维模式, 无科氏力; x 方向取51.2 km, z 方向顶高64 km. 试验给出空间分辨率为50 m和100 m的两个试验结果, 时间步长满足 $\Delta t = 0.001 \text{ s} \cdot \text{m}^{-1} \Delta x$, 积分时长为1200 s. 试验结果对比Straka的标准解验证半解析模式的模拟能力及收敛性.

首先给定处于平衡状态的静止大气初始场:

$$\begin{aligned} u = w = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \\ -C_p \theta \frac{\partial \Pi}{\partial z} - g = -C_p \theta \frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}; \quad t = 0, \\ \theta = 300.0 \text{ K}. \end{aligned} \quad (23)$$

置一个冷泡于静止大气的模式积分区域的中央, 中心位置 $x_c = 25.6 \text{ km}$, $z_c = 3.0 \text{ km}$; 冷泡半径 $r_x = 4.0 \text{ km}$, $r_z = 2.0 \text{ km}$; 扰动位温场 θ' 如下:

$$\theta' = \begin{cases} 0.0 \text{ K}, & \beta > 1.0, \\ -7.5 \text{ K} [\cos(\pi\beta) + 1.0], & \beta \leq 1.0, \end{cases} \quad (24)$$

其中,

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{x - x_c}{r_x}\right)^2 + \left(\frac{z - z_c}{r_z}\right)^2}. \quad (25)$$

在扰动位温场的作用下大气的平衡静止状态被破坏, 冷泡在重力作用下降落至地面形成涡旋.

3.3 非线性密度流数值试验

非线性密度流试验是检验模式对非线性流的精细尺度系统和瞬变特征的模拟能力的标准试验. 密度流是高度非线性流, 它描述了Kelvin-Helmholtz切变不稳定涡旋的形成和发展的演变过程. 图1为Straka(1993)给出的密度流位温扰动场 θ' 的标准解, 空间分辨率为25 m, 图2是分辨率为50 m的半解析模式的 θ' 的数值解. 图2(a)为冷泡 θ' 的初始状态, 模式积分后, 冷泡在重力作用下势能向动能转换, 形成下沉支气流, 气流到达下边界之前逐渐加速, 到达下边界后运动受阻并堆积, 形成水平气压梯度力, 在其作用下, 冷泡主体分成对称的东、西流向的两支高速运动的气流, 最大风速接近 $39 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. 图2(b)显示的是积分至300 s时东向气流的 θ' 场, 对比标准解图1(b)很难区分出二者的不同. 同时也可以看出, 在冷泡的下边界和前缘处 θ' 等值线密集, 表明密度梯度很大, 具备了产

生Kelvin-Helmholtz涡旋的条件. 初始 θ' 场的分布使得冷泡内各气块单元的势能梯度较大, 使得冷泡降落至地面后 u 场和 w 场产生强烈的风切变导致Kelvin-Helmholtz切变不稳定, 在切变不稳定强迫下第一个涡旋逐渐生成并在积分600 s后发展成熟, 同时在冷空气流的前部开始强迫形成第二个涡旋(图2(c)), 与标准解图1(c)非常相似. 积分至900 s时, 第一个涡旋发展成一个近完美的圆涡, 第二个涡旋也发展成熟, 第三个涡旋在冷气团前方开始生成(图2(d)), 与标准解图1(d)比较, 无论是涡旋的位置还是细致结构都非常的接近. 与Straka的模拟结果一样, 每积分300 s产生一个涡旋, 但Straka只模拟了900 s, 半解析模式积分至1200 s时第三个涡旋发展成熟, 第4个涡旋在冷气团的前部开始产生, 见图2(e). 图3(a), (b)是空间分辨率取100 m的试验在积分至600 s和900 s时的结果, 与图2对应的结果非常相近, 但图2更趋近与标准解图1, 这也证明了半解析模式的解是收敛的.

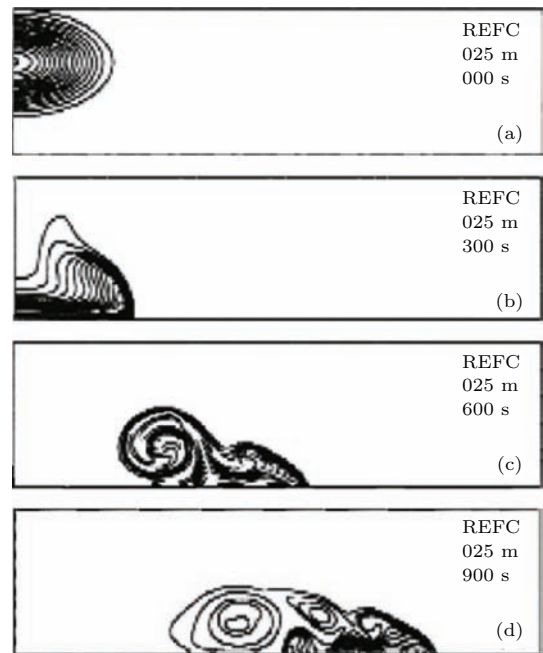


图1 Straka(1993)给出的密度流试验的 θ' 场在(a) 0, (b) 300, (c) 600和(d) 900 s时的标准参考图解, 空间分辨率为25 m. 等值线从零线开始, 间隔1 K (注: 上图为模式积分区域的下部东向3/4部分)

Fig. 1. Plots of θ' at (a) 0, (b) 300, (c) 600 and (d) 900 s for the 25 m resolution reference model solutions given by straka in 1993. Contour interval (CI) is 1 K and the contours are centred around zero contours (note that only the lower left 3/4 of the domain is show).

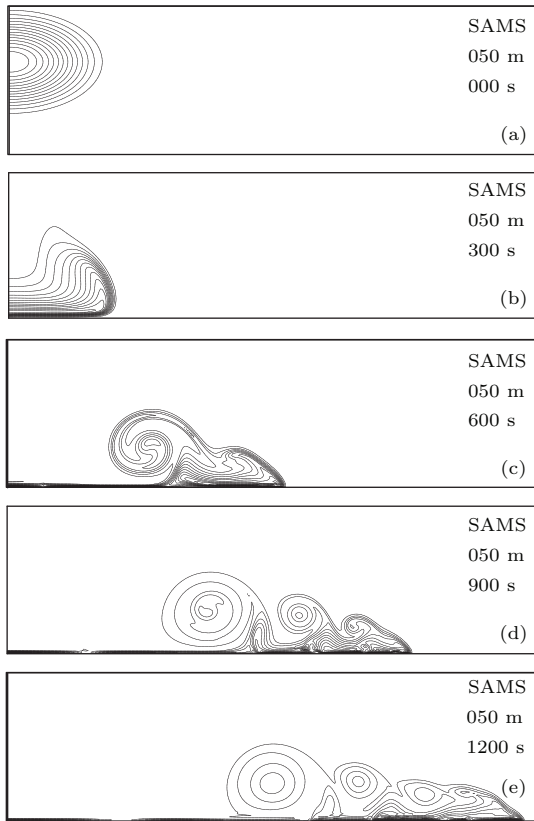


图2 同图1, 但为空间分辨率为50 m的半解析模式的解(SAMS), (e)为模式积分至1200 s时的解.

Fig. 2. Same as Fig 1, but for the 50 m resolution semi-analytical model solution(SAMS) and plot of θ' at 1200 s (e).

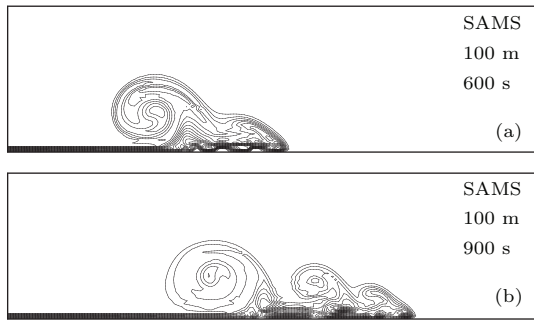


图3 空间分辨率为100 m的半解析模式(SAMS)在(a)60和(b)900 s时 θ' 的解

Fig. 3. Plots of θ' at (a) 60 and (b) 900 s for the 100 m resolution semi-analytical model solution (SAMS).

Strata(1993)给出了模式积分至900 s时的气压扰动场 p' 和风场的标准解, 图4. 为进一步验证模式的性能, 图5给出了空间分辨率为50 m的半解析模式在积分至900 s时的解. 首先从气压扰动场来看, 高低中心相间分布, 三个低压中心与 θ' 的涡旋中心完全吻合, 第一个涡旋对应的低压区最低, 其余两个涡旋的对应的低压区相对要弱很多. 与Straka给出的结果(图4(a))对比, p' 场的结

构非常之相似, 第一个涡旋对应的低压区略高了1.0 hPa, 第二个涡旋对应的低压区略低了0.5 hPa, 第三个涡旋对应低压区比较接近. 从气压扰动常来看, 不用求解Helmholtz方程, 半解析方法也是可行的. p' 场与标准解的差异对 u 和 w 场的影响不大, 对比图4(b)和图5(b)的 u 场分布, 三个涡旋的垂直风切变结构只有细微的差异, 风速大小亦相近. 图5(c)为垂直速度 w 场, 清晰的反映了三个涡旋的垂直环流结构, 与标准解图4(c)比较, 结构上是一致的, 但第二个涡旋的上升支气流比标准解略大, 达到 $8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. 总体来看环流结构的模拟是成功的, 证明了半解析模式具有模拟强非线性流的能力的. 造成半解析模式的模拟结果与标准解差异的原因是多方面, 如梯度项的差分计算误差, 半解析解不含流体黏性扩散项等.

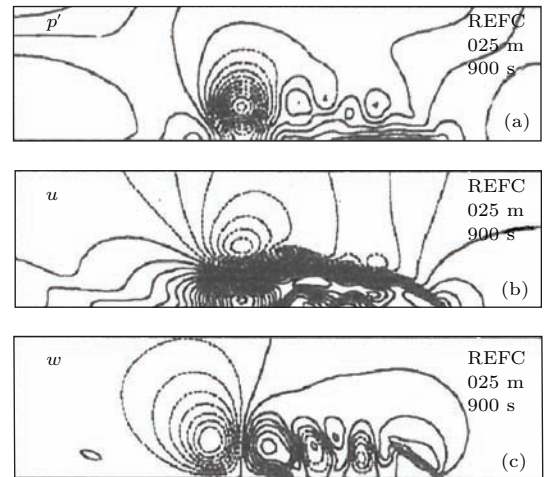


图4 Straka(1993)给出的空间分辨率为25 m的密度流试验在积分至900 s时(a) p' ($CI = 0.5 \text{ mb}$), (b) u ($CI = 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$)和(c) w ($CI = 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$)的标准参考图解. 其中 CI 表示等值线间隔, 等值线均从零线开始

Fig. 4. Plots, with contour intervals (CI) given in parentheses, of (a) p' ($CI = 0.5 \text{ mb}$), (b) u ($CI = 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$) and (c) w ($CI = 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$) at 900 s for the 25. m resolution compressible reference model that given by straka in 1993. All contours are centred around zero contours.

总能量和总质量守恒是检验数值模式可靠性的两个重要指标, 以上没有直接证明半解析方法是否满足这两个基本属性, 因此很有必要进行数值检验. 图6给出了空间分辨率为50 m的密度流试验的总能量和总质量的相对误差时间变化序列. 总能量在前600 s基本守恒, 相对误差很小, 以后有所增大, 在860 s时达最大值0.049%, 之后误差逐渐回落. 总质量的守恒性不如总能量, 相对误差

从积分开始时振荡上升, 至 800 s 后基本稳定, 保持在 0.11% 左右, 980 s 后误差开始下降. 分辨率为 100 m 的密度流试验的结果类似, 但略差, 图略. 这也进一步说明半解析模式的解是收敛的. 虽然半解析模式的总能量和总质量并不严格的守恒, 但误差在可接受的范围. 试验表明, 质点在起始位置处的变量的插值算法对总能量和总质量的守恒性影响较大, 因此还有很大的改进空间.

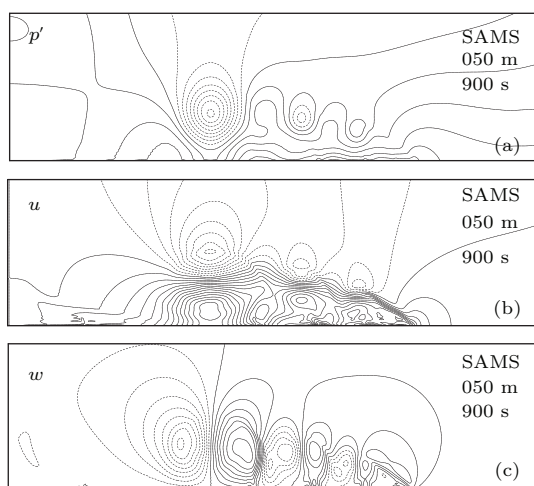


图 5 同图 4, 但为 50 m 分辨率的半解析模式的解
Fig. 5. Same as fig. 4, but for the 50 m resolution semi analytical model solution.

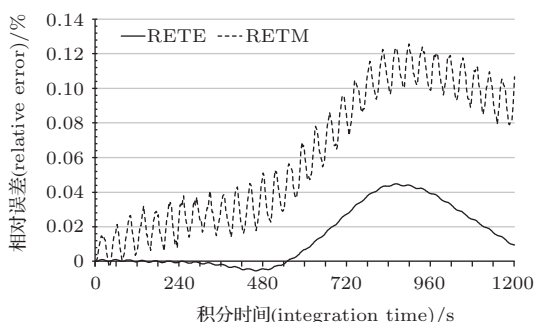


图 6 空间分辨率为 50 m 的半解析模式的总能量相对误差 (RETE) 和总质量相对误差 (RETM) 的时间变化
Fig. 6. The relative error of the total energy (RETE) and the relative error of total mass (RETM) as functions of time from the semianalytical model with 50 m resolution.

4 结 论

采用差分方程代替微分方程给大气原始方程 (Navier-Stokes equations) 的求解带来很多难以解决的问题, 其中质点轨迹的计算、Helmholtz 方程的求解, 是两大难题. 本文通过对气压变量代换, 将原始方程组在积分时间步长内近似为线性常微分

方程组, 求出半解析解, 再采用精细积分法求解之, 通过密度流试验对半解析模式进行了检验, 结论如下:

1) 半解析方法只对气压梯度和散度项在空间上采用差分计算, 所有变量在时间坐标上保持微分形式, 线性化的大气原始方程组可求得半解析解, 采用精细积分法求解半解析解可同时计算风、气压和位移, 无需求解 Helmholtz 方程, 质点的位移采用积分风的半解析解得到, 因此相比采用风速外推的计算方法, 半解析法方法更科学合理;

2) 非线性密度流试验结果表明, 半解析模式能够清晰地模拟 Kelvin-Helmholtz 切变不稳定涡旋的发生和发展的演变过程, 模拟的涡旋结构、气压扰动场和风场环流结构与标准解非常相似, 说明不用求解 Helmholtz 方程也是可行的. 采用 50 m 空间分辨率的模拟结果比采用 100 m 空间分辨率模拟的结果更逼近标准参考解, 总质量和总能量守恒性也更好, 说明半解析模式动力框架的解是收敛的.

3) 造成半解析模式的模拟结果与标准解差异的原因是多方面, 如方程中没有考虑流体黏性扩散项及梯度项的差分计算误差等, 其中质点在起始位置处的变量的插值算法是非常重要的原因之一, 它直接影响着计算的准确性, 是非常值得深入研究的问题.

综上所述, 通过非线性密度流试验初步证明了采用半解析方法求解大气原始方程组是可行的, 为大气数值模式的构建提供了一个新的思路.

参考文献

- [1] Ji L R, Chen J B, Zhang D M 2005 *Chin. J. Atmos. Sci.* **29** 122 (in Chinese) [纪立人, 陈嘉滨, 张道民 2005 大气科学 **29** 122]
- [2] Gu X Z, Zhang B 2008 *Plateau Meteorol.* **27** 474 (in Chinese) [辜旭赞, 张兵 2008 高原气象 **27** 474]
- [3] Gu X Z, Zhang B 2008 *Plateau Meteorol.* **27** 481 (in Chinese) [辜旭赞, 张兵 2008 高原气象 **27** 481]
- [4] Robert A 1982 *J. Meteorol. Soc. Japan* **60** 319
- [5] Mcdonald A 1986 *Mon. Wea. Rev.* **114** 824
- [6] Hortal M 2002 *Q. J. R. Meteorol. Soc.* **128** 1671
- [7] Chen D H, Xue J S, Yang X S, Zhang H L, Shen X S, Hu J L, Wang Y, Ji L R, Chen J B 2008 *Chin. Sci. Bull.* **53** 2396 (in Chinese) [陈德辉, 薛纪善, 杨学胜, 张红亮, 沈学顺, 胡江林, 王雨, 纪立人, 陈嘉滨 2008 科学通报 **53** 2396]

- [8] Staniforth A, White A, Wood N 2003 *Q. J. R. Meteorol. Soc.* **129** 2065
- [9] Staniforth A, Wood N 2008 *J. Comput. Phys.* **227** 345
- [10] Wood N, White A, Staniforth A 2010 *Q. J. R. Meteorol. Soc.* **136** 507
- [11] Zhong W X, Zhu J P 1995 *Appl. Math. Mech.* **16** 663 (in Chinese) [钟万勰, 朱建平 1995 应用数学和力学 **16** 663]
- [12] Zhong W X 1996 *Acta Mech. Sin.* **28** 159 (in Chinese) [钟万勰 1996 力学学报 **28** 159]
- [13] Sun J Q, Qin M Z 2007 *Math. Numer. Sin.* **29** 67 (in Chinese) [孙建强, 秦孟兆 2007 计算数学 **29** 67]
- [14] Fu M H, Lan L H, Lu K L, Zhang W Z 2012 *Sci. Chin. : Phys. Mech. Astron.* **42** 185 (in Chinese) [富明慧, 蓝林华, 陆克浪, 张文志 2012 中国科学: 物理学, 力学, 天文学 **42** 185]
- [15] Lü H X, Yu H J, Qiu C H 2001 *Appl. Math. Mech.* **22** 151 (in Chinese) [吕和祥, 于洪洁, 裘春航 2001 应用数学和力学 **22** 151]
- [16] Lü H X, Cai Z Q, Qiu C H 2001 *Chin. J. Appl. Mech.* **18** 34 (in Chinese) [吕和祥, 蔡志勤, 裘春航 2001 应用力学学报 **18** 34]
- [17] Fan J P, Tao H, Tan C Y 2006 *Acta Mech. Solid Sin.* **9** 289
- [18] Tan S J, Gao Q, Zhong W X 2010 *Chin. J. Comput. Mech.* **27** 752 (in Chinese) [谭述君, 高强, 钟万勰 2010 计算力学学报 **27** 752]
- [19] Wang R Q, Li L L, Li H J 2010 *Chin. J. Geophys.* **53** 1875 (in Chinese) [王润秋, 李兰兰, 李会俭 2010 地球物理学报 **53** 1875]
- [20] Duan Y T, Hu T Y, Yao F C 2013 *Appl. Geophys.* **10** 71
- [21] Han M J, Ke D M, Chi X L, Wang M, Wang B T 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 098502 (in Chinese) [韩名君, 柯导明, 迟晓丽, 王敏, 王保童 2013 物理学报 **62** 098502]
- [22] Shi B R 2010 *Chin. Phys. B* **19** 65202
- [23] Fu M H, Zhang W Z 2011 *Chin. J. Comput. Mech.* **28** 529 (in Chinese) [富明慧, 张文志 2011 计算力学学报 **28** 529]
- [24] Fu M H, Zhang W Z 2010 *Chin. J. Appl. Mech.* **27** 688 (in Chinese) [富明慧, 张文志 2010 应用力学学报 **27** 688]
- [25] Zheng W, Xu H Z, Zhong M, Yuan M J 2009 *Chin. Phys. B* **19** 3597
- [26] Liu F, Chao J P, Huang G, Feng L C 2011 *Chin. Sci. Bull.* **56** 2727
- [27] Hao S F, Yang S F, Lou M Y 2014 *Chin. J. Geophys.* **57** 2190 (in Chinese) [郝世峰, 杨诗芳, 楼茂园 2014 地球物理学报 **57** 2190]
- [28] Hao S F, Cui X P 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 039204 (in Chinese) [郝世峰, 崔晓鹏 2012 物理学报 **61** 039204]
- [29] Xu Q, Xue M, Droegemier K K 1996 *J. Atmos. Sci.* **53** 770
- [30] Xue M, Xu Q, Droegemier K K 1997 *J. Atmos. Sci.* **54** 1998
- [31] Yang X S, Hu J L, Chen D H, Zhang H L, Shen X S, Chen J B 2008 *Chin. Sci. Bull.* **53** 2418 (in Chinese) [杨学胜, 胡江林, 陈德辉, 张红亮, 沈学顺, 陈嘉滨, 纪立人 2008 科学通报 **53** 2418]
- [32] Straka J M, Wilhelmson R B, Wicker L J, Anderson J R, Droegemier K K 1993 *Int. J. Num. Methods Fluids* **17** 1

Semi-analytical solution of the dry baroclinic Lagrange primitive equation and numerical experiment of a non-linear density current*

Hao Shi-Feng[†] Lou Mao-Yuan Yang Shi-Fang Li Chao Kong Zhao-Lin Qiu Wei

(Zhejiang Meteorology Observatory, Hangzhou 310017, China)

(Received 14 April 2015; revised manuscript received 11 May 2015)

Abstract

To solve atmospheric primitive equations, the finite difference approach would result in numerous problems, compared to the differential equations. Taking the semi-Lagrange model as an example, there exist two difficult problems—the particle trajectory computation and the solutions of the Helmholtz equations. In this study, based on the substitution of atmosphere pressure, the atmospheric primitive equations are linearized within an integral time step, which are broadly seen as ordinary differential equations and can be derived as semi-analytical solutions (SASs). The variables of SASs are continuous functions of time and discretized in a special direction, so the gradient and divergence terms are solved by the difference method. Since the numerical solution of the SASs can be calculated via a highly precise numerical computational method of exponential matrix—the precise integration method, the numerical solution of SASs at any time in the future can be obtained via step-by-step integration procedure. For the SAS methodology, the pressure, as well as the wind vector and displacement, can be obtained without solving the Helmholtz formulations. Compared to the extrapolated method, the SAS is more reasonable as the displacements of the particle are solved via time integration. In order to test the validity of the algorithms, the SAS model is constructed and the same experiment of a non-linear density current as reported by Straka in 1993 is implemented, which contains non-linear dynamics, transient features and fine-scale structures of the fluid flow. The results of the experiment with 50 m spatial resolution show that the SAS model can capture the characters of generation and development process of the Kelvin-Helmholtz shear instability vortex; the structures of the perturbation potential temperature field are very close to the benchmark solutions given by Straka, as well as the structures of the simulated atmosphere pressure and wind field. To further test the convergence of the numerical solution of the SAS model, the 100 m spatial resolution experiment of the non-linear density current is also implemented for comparison. Although the results from both experiments are similar, the former one is better and the property of mass-energy conservation is comparatively reasonable, and furthermore, the SAS model has a convergent property in the numerical solutions. Therefore, the SAS method is a new tool with efficiency for solving the atmospheric primitive equations.

Keywords: atmospheric primitive equations, semi-analytical method, precise integration method, density current

PACS: 47.11.-j, 92.60.Wc

DOI: 10.7498/aps.64.194702

* Project supported by the Special Scientific Research Fund of Meteorological Public Welfare Profession of China (Grant No. GYHY201306010), the Young Scientists Fund of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 41405047), and the National Science and Technology Major Project of the Ministry of Science and Technology of China (Grant No. 2012ZX07101-010).

[†] Corresponding author. E-mail: shifenghao@aliyun.com