

二进制信号的混沌压缩测量与重构

郭静波 李佳文

Chaotic compressive measurement and reconstruction of binary signals

Guo Jing-Bo Li Jia-Wen

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 198401 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.198401

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.198401>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I19>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

认知无线网络中基于抢占式排队论的频谱切换模型

[Spectrum handoff model based on preemptive queuing theory in cognitive radio networks](#)

物理学报.2015, 64(10): 108403 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.108403>

无线携能通信系统中基于能量获取比例公平的波束成形设计

[Beamforming design based on energy harvesting proportional fairness in a simultaneous wireless information and power transfer system](#)

物理学报.2015, 64(2): 028402 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.028402>

多值数据的自适应脉冲宽度调制预加重方法

[A method of adaptive pulse width modulation for multiple-valued data transmission](#)

物理学报.2015, 64(1): 018402 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.018402>

一种面向中继协作频谱感知系统的自适应全局最优化算法

[An adaptive global optimization algorithm of cooperative spectrum sensing with relay](#)

物理学报.2015, 64(1): 018404 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.018404>

地月平动点导航星座的概要设计与性能分析

[Outline design and performance analysis of navigation constellation near earth-moon libration point](#)

物理学报.2014, 63(24): 248402 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.248402>

二进制信号的混沌压缩测量与重构*

郭静波† 李佳文

(清华大学电机工程与应用电子技术系, 电力系统国家重点实验室, 北京 100084)

(2015年4月17日收到; 2015年5月23日收到修改稿)

二进制信号的压缩感知问题对应超奈奎斯特信号系统中未编码的二进制符号的检测问题, 具有重要的研究意义. 已有的二进制信号压缩测量采用高斯随机矩阵, 信号重构采用经典的 l_1 最小化方法. 本文利用混沌映射构造基于Cat序列的循环测量矩阵, 并提出一种针对二进制信号的全新的重构算法——平滑函数逼近法. 文章构造的混沌循环测量矩阵兼具确定性和随机性的优点, 能够抵御低信令效率和低信噪比的影响, 取得更好的压缩测量效果. 文章提出的平滑函数逼近法利用非凸函数代替原问题不连续的目标函数, 将组合优化问题转化为具有等式约束的优化问题进行求解. 利用稀疏贝叶斯学习算法进一步修正误差, 得到更准确的重构信号. 在信道含有加性高斯白噪声的条件下对二进制信号进行了压缩测量与重构的数值仿真, 仿真结果表明: 基于Cat序列的循环测量矩阵的压缩测量效果明显优于传统的高斯随机矩阵; 平滑函数逼近法对二进制信号的重构性能明显优于经典的 l_1 最小化方法.

关键词: 压缩感知, 混沌循环矩阵, 平滑函数逼近法, 二进制信号

PACS: 84.40.Ua, 05.45.Vx, 05.40.-a

DOI: 10.7498/aps.64.198401

1 引言

压缩感知是对在某组基下稀疏的信号进行非适应性的线性采样和非线性重构的过程^[1-3], 其主要内容是: 设信号 $x \in \mathbb{R}^N$ 在某组基(称稀疏基) $\Psi = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N]$ 下是“ k -稀疏”的, 即可展开为

$$x = \sum_{i=1}^N s_i \psi_i = \Psi s, \quad (1)$$

其中 $s \in \mathbb{R}^N$ 只包含 k 个非零元素, 则用给定的压缩测量矩阵 $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$ 进行线性观测

$$y = \Phi x = \Phi \Psi s = \Theta s, \quad (2)$$

可得到观测向量 $y \in \mathbb{R}^M$, 其维数 $M \ll N$.

实际上, x 的元素往往取自于某个固定的有限字符集 \mathcal{X} ^[4-6](如数字信号传输系统中的二进制字符为-1或1; 图像信号的灰度值为0—255的整数;

故障诊断中节点状态值为0或1等). 此时, (2)式变为有限字符集约束下的欠定方程

$$\begin{aligned} y &= \Phi x, \\ x_n &\in \mathcal{X}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3)$$

本文研究 $\mathcal{X} = \{-1, 1\}$ 的情况, 对应信号为二进制信号, (3)式问题对应超奈奎斯特信号系统^[7-9](faster-than-Nyquist signaling systems, FTN系统)中未编码的二进制符号的检测问题, 是数字通信领域的重要课题.

对于信号的压缩观测, 传统的压缩感知研究通常采用随机矩阵(如: 高斯随机矩阵, 伯努利随机矩阵等)作为压缩测量矩阵. 该类矩阵的优点是容易满足对压缩测量矩阵的约束等距性条件^[1](restricted isometry property, RIP), 但随机矩阵难以电路实现, 潜在制约着压缩感知从理论向应用的发展.

混沌兼有内在确定性和外在随机性. 由给定的

* 国家自然科学基金(批准号:51277100)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: guojb@mail.tsinghua.edu.cn

混沌映射迭代产生的元素序列是确定的, 同时又兼具独立同分布的随机特性. 莱斯大学的 Yin 等提出的循环矩阵构造法^[10]具有存储元素少、可用 FFT 快速算法实现等优点^[11]. 同时, 压缩感知理论的创始人之一 Candès 等于 2011 年提出的 RIPless 理论^[12]放松了对压缩测量矩阵的要求. 因此, 将混沌序列和循环矩阵相结合构造的基于混沌序列的循环测量矩阵^[13](chaotic circulant measurement matrix, CCMM) 不仅满足 RIPless 要求, 可以作为有效的压缩测量矩阵, 同时具有占用空间小, 可以用数字电路实现等^[14]潜在优势.

在信号的重构环节, l_1 最小化方法^[15-17]是一种经典普适的恢复算法, 它通过求解如下问题:

$$\begin{aligned} & \text{find} \quad \hat{\mathbf{s}} = \arg \min \|\mathbf{s}\|_1, \\ & \text{subject to} \quad \mathbf{y} = \Phi \Psi \mathbf{s}, \end{aligned} \quad (4)$$

得到重构信号 $\hat{\mathbf{x}} = \Psi \mathbf{s}$. 然而, 该算法对二进制信号的重构准确率较低. 因此, 对于二进制信号的压缩感知问题, 需要更具针对性的恢复算法, 以获得更好的重构效果.

2 基于 Cat 序列的混沌循环测量矩阵的构造

本节构造一种基于 Cat 序列的混沌循环测量矩阵, 构造方法^[13]如下.

1) 由 Cat 映射产生混沌序列.

混沌映射有多种, Cat 映射是构造压缩测量矩阵效果较好的一种, 它是前苏联科学家 Arnold 发现的一个二维离散混沌系统^[18], 其映射的定义式为

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & ab+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \pmod{1}, \quad (5)$$

其中, $\text{mod } 1$ 表示舍去实数的整数部分, 即 $x \pmod{1} = x - [x]$.

设定 Cat 映射的参数 $a = 1, b = 1$, 初值 $x_0 = 0.1, y_0 = 0.3$, 作 Cat 映射迭代点的散点图, 迭代 10000 次后的结果如图 1 示. 可见迭代点的分布基本均匀, 这正是混沌序列外在随机性的体现.

本文选用 $\{x_n\}$ 构造混沌序列.

2) 对混沌序列 $\{x_n\}$ 进行等间隔采样.

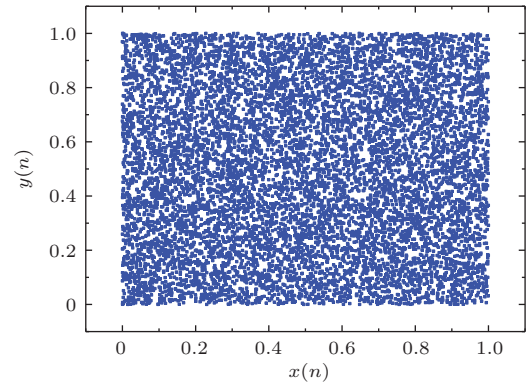


图 1 Cat 映射散点图 ($a = 1, b = 1$, 初值 $x_0 = 0.1, y_0 = 0.3$)

Fig. 1. Scatter diagram of Cat chaotic map with $a = 1, b = 1$, initial number $x_0 = 0.1, y_0 = 0.3$.

为使混沌序列进入稳态, 选取 x_{201} 为采样的起点, 并每隔采样间隔 l ($l > 0$) 进行等间隔采样, 得到序列 $\{z_n\}$, 即

$$z_k = x_{201+kl}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

采样间隔 l 选为 13, 以保证混沌序列 $\{z_n\}$ 的元素相互独立.

3) 对混沌序列 $\{z_n\}$ 作零均值和方差归一化处理, 得到序列 $\{v_n\}$.

4) 用序列 $\{v_n\}$ 组成行循环矩阵 Φ' , 即

$$\Phi' = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_{n-1} & v_n \\ v_n & v_1 & \dots & v_{n-2} & v_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ v_{n-m+2} & v_{n-m+3} & \dots & v_{n-m} & v_{n-m+1} \\ v_{n-m+1} & v_{n-m+2} & \dots & v_{n-m-1} & v_{n-m} \end{bmatrix}.$$

5) 对行循环矩阵 Φ' 作正交化, 得到基于混沌序列的 CCMM Φ .

3 平滑函数逼近法

3.1 模型建立

具有二进制字符约束 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$, $x_n \in \{+1, -1\}$, $n = 1, \dots, N$ 的压缩感知重构问题用如下模型描述:

$$\begin{aligned} & \text{find} \quad \mathbf{x}, \\ & \text{subject to} \quad \mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}, \\ & \quad \quad \quad x_n \in \{+1, -1\}, \quad n = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (7)$$

当信道被加性高斯白噪声 \mathbf{w} 污染时, 观测模型 (2) 式变为

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} + \mathbf{w}, \quad (8)$$

其中 \mathbf{w} 是均值为 $\mathbf{0}$ 的高斯随机向量, 协方差 $E\{\mathbf{w}\mathbf{w}^T\} = \sigma^2 \mathbf{I}_M$.

重构问题模型 (7) 式变为

$$\begin{aligned} \text{find} \quad & \mathbf{x}, \\ \text{subject to} \quad & \|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}\|_2 \leq \varepsilon, \\ & x_n \in \{+1, -1\}, \quad n = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (9)$$

其中 ε 为噪声能量的上界, $\|\mathbf{w}\|_2 \leq \varepsilon$.

重构模型 (9) 式为组合优化问题, 具有指数的复杂度, 无法直接有效求解. 因此, 要想得到重构信号 $\hat{\mathbf{x}}$, 就必须对模型 (9) 式进行转化.

3.2 模型求解

平滑函数逼近法源于压缩感知中系数向量的求解问题 [19], 其基本思想是用一个光滑的 (通常为非凸的) 函数来近似原不连续的目标函数, 从而便于运用优化算法实现目标的最小化.

将模型 (9) 式转化为求解如下问题:

$$\begin{aligned} \text{find} \quad & \mathbf{x} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{N \times 1}} f(\mathbf{x}), \\ \text{subject to} \quad & \|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}\|_2 \leq \varepsilon, \end{aligned} \quad (10)$$

其中 $f(\mathbf{x})$ 为一个光滑的非凸函数.

由于 \mathbf{x} 具有二进制约束, 即 $x_n \in \{+1, -1\}$, $n = 1, \dots, N$, 因此令

$$f(\mathbf{x}) = N - \sum_{n=1}^N \exp \left[-\frac{(x_n + 1)^2}{\sigma^2} \right] - \sum_{n=1}^N \exp \left[-\frac{(x_n - 1)^2}{\sigma^2} \right], \quad (11)$$

N 为信号维度.

当 $N = 1$ 时, \mathbf{x} 为一维信号, 变化 σ 得到一组 $f(x)$ 如图 2 所示.

由图 2 可见, 随着参数 σ 的减小, $f(x)$ 从单峰曲线 (凸函数) 变化为双峰曲线 (非凸函数), 且双峰曲线的谷底恰好对应 $x = \pm 1$. 由 $f(x)$ 的表达式, 可知当信号 \mathbf{x} 的维度变化时, 这一特性不会改变. 因此, 模型 (8) 式可以转化为函数 $f(\mathbf{x})$ 的最小化问题.

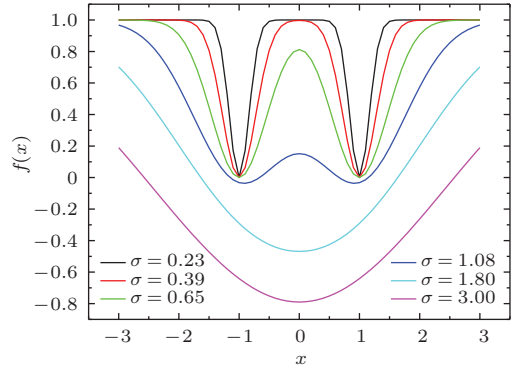


图 2 一维信号下 $f(x)$ 随 σ 的变化曲线

Fig. 2. $f(x)$ versus σ under one-dimensional signal.

此外, 根据文献 [19], 为了保证算法的解以一个较小的概率落在局部极小点, 应渐进地减小 σ 的值进行搜索.

(10) 式是一个具有等式约束的优化问题, 采用内点法求解. 令罚函数 $g(\mathbf{x}) = \ln(\varepsilon - \|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}\|_2^2)$, 系数为 r , 则 (10) 式的近似解为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{N \times 1}} f(\mathbf{x}) - r \cdot g(\mathbf{x}) \\ &= \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{N \times 1}} f(\mathbf{x}) \\ &\quad - r \cdot \ln(\varepsilon - \|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}\|_2^2). \end{aligned} \quad (12)$$

当系数 r 趋于 0 时, 近似解趋于转化问题的真实解, 因此应渐进地减小 r 的值, 进行搜索.

采用内点法求解转化问题的算法如表 1 所示.

表 1 平滑函数逼近法的初始算法

Table 1. Initial algorithm of SFAM.

输入: $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^M$ $\Phi \in \mathbf{R}^{M \times N}$
初始化: $k = 1, \hat{\mathbf{x}}_{(0)} = \Phi^T(\Phi\Phi^T)^{-1}\mathbf{y}$
迭代:
for $r = r_1, r_2, \dots, r_{N_1}$
for $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{N_2}$
while 未满足迭代终止条件
选取最速下降方向: $\mathbf{d}_{(k)} = -\nabla_x f(\hat{\mathbf{x}}_{(k-1)}) + r \cdot \nabla_x g(\hat{\mathbf{x}}_{(k-1)});$
一维搜索: $\lambda_{(k)} = \arg \min_{\lambda \in \mathbf{R}} f(\hat{\mathbf{x}}_{(k-1)} + \lambda \mathbf{d}_{(k)}) - r \cdot g(\hat{\mathbf{x}}_{(k-1)} + \lambda \mathbf{d}_{(k)});$
$\hat{\mathbf{x}}_{(k)} = \hat{\mathbf{x}}_{(k-1)} + \lambda_{(k)} \mathbf{d}_{(k)};$
$k = k + 1;$
end while
end for
end for
输出: $\hat{\mathbf{x}} = \text{sign}(\hat{\mathbf{x}}_{(k-1)})$

为了进一步减小误码率, 考虑对初始算法进行改进.

在实际问题中, 已知观测向量 \mathbf{y} , 测量矩阵 Φ , 通过初始算法得到恢复信号 $\hat{\mathbf{x}}$, 则可计算向量

$$\mathbf{z} = \mathbf{y} - \Phi \hat{\mathbf{x}} = \Phi \mathbf{t} + \mathbf{w},$$

其中 $\mathbf{t} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ 为误差向量. 易知向量 \mathbf{t} 是稀疏的, 其值在 \mathbf{x} 与 $\hat{\mathbf{x}}$ 值相等的分量处为 0, 不等的分量处为 2 或 -2.

考虑利用向量 \mathbf{z} 重建误差向量 $\hat{\mathbf{t}} = (\hat{t}_1, \hat{t}_2, \dots, \hat{t}_N)^T$, 并设定阈值 $\xi = 1$ 对该重建向量的元素进行检测. 对于 $|\hat{t}_i| > \xi$ 的分量, 可认定该分量处 x_i 与 \hat{x}_i 值不等, 则将 \hat{x}_i 的符号进行翻转; 若不存在 $|\hat{t}_i| > \xi$ 的分量, 可认定 \mathbf{x} 与 $\hat{\mathbf{x}}$ 完全相同.

任意一种不要求稀疏度已知的稀疏重建算法都可以实现误差向量 $\hat{\mathbf{t}}$ 的重建, 这里选择稀疏贝叶斯学习^[20] (sparse Bayesian learning, SBL) 算法, 该算法的性能较稳定. 改进算法如表 2 所示, 其中 SparseReconstruct 为稀疏重建算法.

表 2 平滑函数逼近法的改进算法
Table 2. Improved algorithm of SFAM.

输入: $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^M$ $\Phi \in \mathbf{R}^{M \times N}$
初始化: $k = 1, \hat{\mathbf{x}}_{(0)} = \Phi^T (\Phi \Phi^T)^{-1} \mathbf{y}$
迭代:
for $r = r_1, r_2, \dots, r_{N_1}$
for $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{N_2}$
while 未满足迭代终止条件
选取最速下降方向: $\mathbf{d}_{(k)} = -\nabla_x f(\hat{\mathbf{x}}_{(k-1)}) + r \cdot \nabla_x g(\hat{\mathbf{x}}_{(k-1)});$
一维搜索: $\lambda_{(k)} = \arg \min_{\lambda \in \mathbf{R}} f(\hat{\mathbf{x}}_{(k-1)} + \lambda \mathbf{d}_{(k)}) - r \cdot g(\hat{\mathbf{x}}_{(k-1)} + \lambda \mathbf{d}_{(k)});$
$\hat{\mathbf{x}}_{(k)} = \hat{\mathbf{x}}_{(k-1)} + \lambda_{(k)} \mathbf{d}_{(k)};$
$k = k + 1;$
end while
end for
end for
$\hat{\mathbf{x}} = \text{sign}(\hat{\mathbf{x}}_{(k-1)})$
算法改进:
计算向量 $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \Phi \hat{\mathbf{x}}$
重构误差向量 $\hat{\mathbf{t}} = \text{SparseReconstruct}(\mathbf{z}, \Phi)$
逐位检测:
$\xi = 1;$
for $n = 1, 2, \dots, N$
if $ \hat{t}_n > \xi$
$\hat{x}_n = -\hat{x}_n;$
end if
end for
输出: $\hat{\mathbf{x}}$

4 数值仿真

4.1 仿真参数设置

定义信令效率 (signaling efficiency) ρ 为

$$\rho = M/N,$$

其中 M 和 N 分别为观测向量 \mathbf{y} 和信号 \mathbf{x} 的维数, 则给定 N 值, 可通过调节 M 值改变 ρ 值.

定义信噪比 SNR 为

$$\text{SNR} = 10 \lg \frac{P_{\Phi \mathbf{x}}}{P_w} = 10 \lg \frac{\|\Phi \mathbf{x}\|_2^2 / M}{\sigma^2},$$

则可由给定信噪比求得相应的 σ 取值.

选取两种压缩测量矩阵 Φ : 1) 高斯随机矩阵; 2) 基于 Cat 混沌序列的 CCMM. N 值取为 240, M 值随 ρ 值变化, $\rho = 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 0.9, 1.0$.

选取加性噪声 \mathbf{w} 为高斯白噪声, 方差 σ^2 值随 SNR 值变化, $\text{SNR}(\text{dB}) = 0.2, 4, \dots, 28, 30$.

本文采用误比特率 (bit error ratio, BER) 和不完全重构概率 (incomplete reconstruction probability, IRP) 作为评价重构性能的指标, 其中一次不完全重构定义为重构信号与原信号不完全相等.

4.2 仿真结果

分别用基于 Cat 序列的循环测量矩阵和高斯随机矩阵对二进制信号作压缩测量, 并用本文提出的平滑函数逼近法进行信号重构, 然后与经典的 l_1 最小化方法的重构效果进行比较.

每一个仿真数据均为 1000 次独立重复试验的平均值.

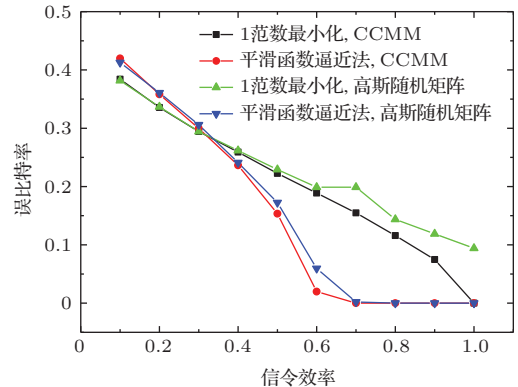


图 3 信噪比为 16 dB 时, 误比特率随信令效率的变化曲线
Fig. 3. BER versus ρ when SNR = 16 dB.

比较两种压缩测量矩阵, 可以发现 (图 3): 随着信令效率的变化, CCMM 的误比特率曲线在两

种算法下均完全低于高斯随机矩阵的误比特率曲线. 说明信令效率变化时, 在误比特率这一指标下, CCMM 对二进制信号的压缩测量效果总是好于高斯随机矩阵的效果.

比较两种重构算法, 可以发现(图3): 在极低信令效率下 $\rho < 0.3$, 经典的 l_1 最小化方法仍具有微弱优势. 但随着信令效率增大, 平滑函数逼近法的效果迅速变好, 在 $\rho = 0.7$ 时的误比特率即降至 0, 与 l_1 最小化方法的效果相比具有显著优势.

比较两种压缩测量矩阵, 可以发现(图4): 随信令效率的变化, CCMM 的不完全重构概率曲线在两种算法下均完全低于高斯随机矩阵的误比特率曲线. 说明信令效率变化时, 在不完全重构概率这一指标下, CCMM 对二进制信号的压缩测量效果也总是好于高斯随机矩阵的效果.

比较两种重构算法, 可以发现(图4): 平滑函数逼近法的效果明显优于 l_1 最小化方法, 体现为曲线在 $\rho = 0.5$ 时即开始下降 (l_1 最小化方法在 $\rho = 0.9$ 时才略有下降), 在 $\rho = 0.7$ 时不完全重构概率即降至 0 (l_1 最小化方法在 $\rho = 1$ 时才为 0).

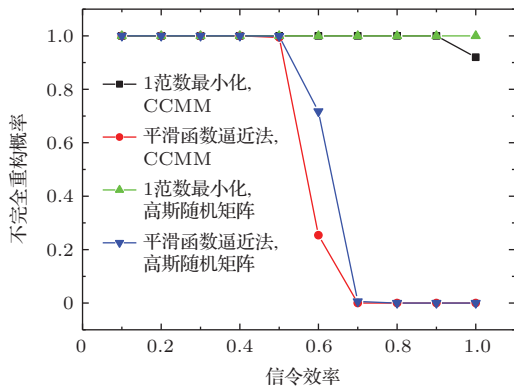


图4 信噪比为 16 dB 时, 不完全重构概率随信令效率的变化曲线

Fig. 4. IRP versus ρ when SNR = 16 dB.

比较两种压缩测量矩阵, 可以发现(图5): 随着信噪比的变化, CCMM 的误比特率曲线在两种算法下均完全低于高斯随机矩阵的误比特率曲线. 说明信噪比变化时, 在误比特率这一指标下, CCMM 对二进制信号的压缩测量效果也总是好于高斯随机矩阵的效果.

比较两种重构算法, 可以发现(图5): 平滑函数逼近法的效果优于 l_1 最小化方法, 在信噪比适中 ($5 \text{ dB} < \text{SNR} < 25 \text{ dB}$) 时体现得更加明显.

比较两种压缩测量矩阵, 可以发现(图6): 随着信噪比的变化, CCMM 的误比特率曲线低于或

接近高斯随机矩阵的误比特率曲线, 在 SNR = 25 dB 左右略有重叠. 说明信噪比变化时, 在不完全重构概率这一指标下, CCMM 对二进制信号的压缩测量效果略好于高斯随机矩阵的效果.

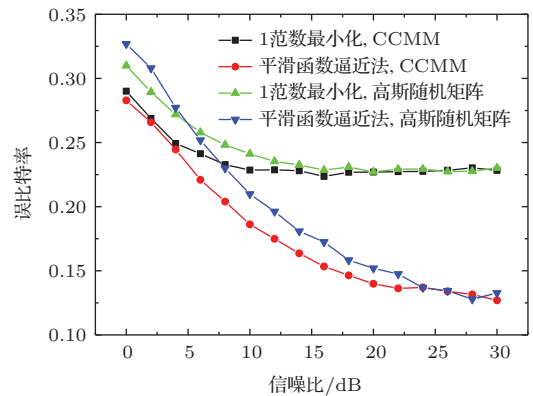


图5 信令效率为 0.5 时, 误比特率随信噪比的变化曲线

Fig. 5. BER versus SNR when $\rho = 0.5$.

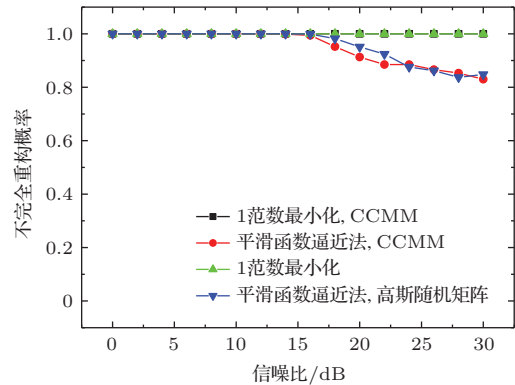


图6 信令效率为 0.5 时, 不完全重构概率随信噪比的变化曲线

Fig. 6. IRP versus SNR when $\rho = 0.5$.

比较两种重构算法, 可以发现(图6): 平滑函数逼近法的效果明显优于 l_1 最小化方法, 体现为曲线在 SNR = 15 dB 时即开始下降, 而 l_1 最小化方法的不完全重构概率始终为 1.

综合数值仿真结果, 可以得到结论: 基于 Cat 序列的循环测量矩阵的压缩测量效果明显优于传统的高斯随机矩阵; 平滑函数逼近法对二进制信号的重构性能明显优于经典的 l_1 最小化方法.

4.3 混沌压缩测量的自相关特性

这里分析 CCMM 优于高斯随机矩阵的机理. 为此, 单独考虑压缩测量过程. 将不同信噪比和信令效率下, 使用 CCMM 及高斯随机矩阵对二进制信号作压缩测量, 对结果作归一化, 然后求其自相关函数, 结果如图 7 所示.

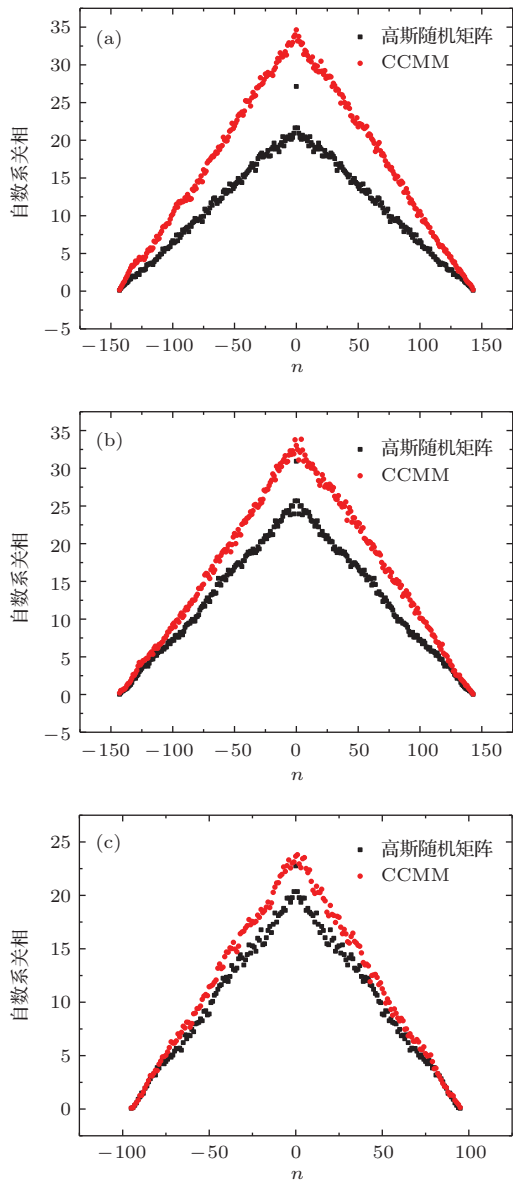


图7 使用CCMM和高斯随机矩阵在不同信噪比和信令效率下对二进制信号作压缩测量, 所得测量向量归一化后的自相关函数图 (a) $\rho = 0.6$, SNR = 5 dB; (b) $\rho = 0.6$, SNR = 25 dB; (c) $\rho = 0.4$, SNR = 25 dB

Fig. 7. The normalized autocorrelation function graph of compressive measurement vector using CCMM and Gaussian matrix under different SNR and ρ : (a) $\rho = 0.6$, SNR = 5 dB; (b) $\rho = 0.6$, SNR = 25 dB; (c) $\rho = 0.4$, SNR = 25 dB.

图7(a), (b)展示的是CCMM和高斯随机矩阵在信令效率为0.6, 信噪比变化时对二进制信号作压缩测量, 所得测量向量归一化后的自相关函数图. 在低信噪比(SNR = 5 dB)下, 观察图7(a), 可见用CCMM作压缩测量所得测量向量的自相关性明显大于高斯随机矩阵作压缩测量所得测量向量的自相关性. 这正是混沌序列内在确定性的体现. 而测量向量的自相关性越大, 就越有利于信号重

构, 这正是CCMM在两种重构算法下的误比特率和不完全重构概率均远小于高斯随机矩阵的内在原因. 在高信噪比(SNR = 25 dB)下, 观察图7(b), 可见用CCMM作压缩测量所得测量向量的自相关性仍大于高斯随机矩阵作压缩测量所得测量向量的自相关性. 比较图7(a)和(b)自相关函数的数值, 可见高斯随机矩阵对应的自相关函数值发生了较大变化, 而CCMM对应的自相关函数值几乎不变. 这说明混沌序列的确定性能在一定程度上抵御信道噪声的变化, 具有比随机序列更好的抗干扰性能.

图7(b), (c)展示的是CCMM和高斯随机矩阵在信噪比为25 dB, 信令效率变化时对二进制信号作压缩测量, 所得测量向量归一化后的自相关函数图. 在低信令效率($\rho = 0.4$)和高信令效率($\rho = 0.6$)下, 用CCMM作压缩测量所得测量向量的自相关性均明显大于高斯随机矩阵作压缩测量所得测量向量的自相关性. 这说明混沌序列的内在确定性使得CCMM也能够一定程度抵御信令效率的变化, 从而在低信令效率下, 也能发挥比高斯随机矩阵更好的性能.

由以上分析可以发现, 正是混沌的外在随机性保证了CCMM作为测量矩阵的有效性, 而混沌的内在确定性又使得CCMM能够在一定程度上抵御低信令效率和低信噪比的影响, 从而在低信令效率和低信噪比下, 都能发挥比高斯随机矩阵等传统矩阵更好的性能.

5 结 论

本文构造了基于Cat序列的循环测量矩阵, 并提出了平滑函数逼近法这一针对二进制信号的恢复算法. 在信道含有加性高斯白噪声的条件下对混沌测量矩阵和恢复算法的性能进行了检验, 结果表明: 基于Cat序列的混沌循环测量矩阵的压缩测量效果明显优于传统的高斯随机矩阵, 在低信噪比和低信令效率下优势尤其显著; 本文提出的平滑函数逼近法对二进制信号的重构性能明显优于经典的 l_1 最小化方法. 这是由于 l_1 最小化方法是普适方法, 而平滑函数逼近法更具针对性. 文章最后对CCMM优于高斯随机矩阵的机理进行了分析, 指出正是混沌的外在随机性保证了CCMM作为测量矩阵的有效性, 而混沌的内在确定性又使得

CCMM 能够在一定程度上抵御低信令效率和低信噪比的影响, 从而发挥比高斯随机矩阵等传统矩阵更好的性能.

参考文献

- [1] Donoho D L 2006 *IEEE Trans. Inform. Theory* **52** 1289
- [2] Candès E J 2008 *Comptes. Rendus Math.* **346** 589
- [3] Candès E J, Wakin M B 2008 *IEEE Sig. Proc. Mag.* **25** 21
- [4] Lustig M, Donoho D L, Pauly J M 2007 *Magn Reson Med.* **58** 1182
- [5] Sen P, Darabi S 2011 *IEEE Trans. Vis. Comput. Graphics.* **17** 487
- [6] Herman M A, Strohmer T 2009 *IEEE Trans. Signal Process.* **57** 2275
- [7] Hajela D 1990 *IEEE Trans. Inf. Theory* **36** 289
- [8] Rusek F, Anderson J B 2009 *IEEE Trans. Commun.* **57** 1329
- [9] Sugiura S 2013 *IEEE Wireless Commun. Lett.* **2** 555
- [10] Yin W, Morgan S, Yang J F, Zhang Y 2010 *Rice University CAAM Technical Report* TR10-01
- [11] Yin W, Osher S, Xu Y Y 2012 *Inverse Probl. Imag.* **8** 901
- [12] Candès E J, Plan Y 2011 *IEEE Trans. Inform. Theory* **57** 7235
- [13] Guo J B, Wang R 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 198402 (in Chinese) [郭静波, 汪韧 2014 物理学报 **63** 198402]
- [14] Guo J B, Xu X Z, Shi Q H, Hu T H 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 110508 (in Chinese) [郭静波, 徐新智, 史启航, 胡铁华 2013 物理学报 **62** 110508]
- [15] Allen Y. Y, Zhou Z H, Arvind G B, S. Shankar S, Ma Y 2013 *IEEE Trans. Image Process.* **22** 3234
- [16] Chen S S, Donoho D L, Saunders M A 1998 *SIAM J Sci. Comput.* **43** 33
- [17] Lu C W, Liu X J, Fang G Y 2011 *Acta Electronica Sinica* **39** 2204 (in Chinese) [卢策吾, 刘小军, 方广有 2011 电子学报 **39** 2204]
- [18] Chen G, Mao Y, Chui C K 2004 *Chaos Soliton Fract.* **21** 749
- [19] Mohimani H, Babaie-Zadeh M, Jutten C 2009 *IEEE Trans. Signal Process.* **57** 289
- [20] Wipf D P, Rao B D 2004 *IEEE Trans. Signal Process.* **52** 2153

Chaotic compressive measurement and reconstruction of binary signals*

Guo Jing-Bo[†] Li Jia-Wen

(State Key Lab of Power Systems, Department of Electrical Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

(Received 17 April 2015; revised manuscript received 23 May 2015)

Abstract

Compressive sensing of binary signals is corresponding to the problem of binary symbol detection in the faster-than-Nyquist signaling systems, which has significant research value. Traditional compressive measurement of a binary signal is based on Gaussian matrix, and l_1 minimization is a classic algorithm for signal reconstruction. However, stochastic matrix such as the Gaussian matrix can hardly be realized by a digital circuit, and the reconstruction performance of l_1 minimization is not well enough for binary signals. Thus, it is of great meaning to construct a new kind of measurement matrix as well as a better reconstruction algorithm for binary signals. This paper constructs a chaotic circulant measurement matrix based on Cat chaotic map (CCMM), and proposes a brand new algorithm for binary signal reconstruction—smooth function approximation method (SFAM). Chaotic sequence has characteristics of both internal certainty and external randomness, while a circulant matrix requires less elements and can be realized through fast Fourier transform. CCMM combines the advantages of both chaotic sequence and circulant matrix, so that it not only satisfies the RIPless property required by the compressive measurement matrix because of external randomness, but also has the power to resist the effect of low signaling efficiency and low SNR due to the internal certainty. Moreover, the circle structure gives CCMM the potential to be digital realized in the future. In SFAM, we first use a non-convex function to approximate the original discontinuous objective function, in order to transfer the original combinatorial optimization problem into an optimization problem with equality constraints which can be solved much easier. Then we use the interior point method to solve this optimization problem. Furthermore, sparse Bayesian learning algorithm is used to correct the reconstruction error for a more accurate result. Compressive measurement and reconstruction of binary signals in additive Gaussian white noise channel are operated. Result of numerical experiments shows that CCMM is much better than the traditional Gaussian matrix for compressive measurement, especially in the condition of low signaling efficiency and low SNR, and SFAM is much better than l_1 minimization for binary signal reconstruction. At the end of this paper, we explain the essential reason why CCMM performs better than the traditional Gaussian matrix, through calculating the autocorrelation function of compressive measurement vector in various conditions.

Keywords: compressive sensing, chaotic circulant matrix, smooth function approximation method, binary signal

PACS: 84.40.Ua, 05.45.Vx, 05.40.-a

DOI: [10.7498/aps.64.198401](https://doi.org/10.7498/aps.64.198401)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51277100).

† Corresponding author. E-mail: guojb@mail.tsinghua.edu.cn