

有倾向性重连产生的反匹配网络

屈静 王圣军

Disassortative networks generated by directed rewiring

Qu Jing Wang Sheng-Jun

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 198901 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.198901

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.198901>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I19>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于度的正/负相关相依网络模型及其鲁棒性研究

The model of interdependent network based on positive/negative correlation of the degree and its robustness study

物理学报.2015, 64(4): 048902 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.048902>

疾病传播与级联失效相互作用的研究: 度不相关网络中疾病扩散条件的分析

Dynamic interplay between epidemics and cascades: Epidemic outbreaks in uncorrelated networks

物理学报.2014, 63(21): 218902 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.218902>

火灾逃生过程的模拟与讨论 -----以吉林禽业火灾为例

Simulation of pedestrian evacuation based on Jilin fire

物理学报.2014, 63(17): 178902 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.178902>

一种信息传播促进网络增长的网络演化模型

A complex network evolution model for network growth promoted by information transmission

物理学报.2014, 63(15): 158902 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.158902>

基于随机矩阵的金融网络模型

Financial networks model based on random matrix

物理学报.2014, 63(13): 138901 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.138901>

## 有倾向性重连产生的反匹配网络\*

屈静 王圣军†

(陕西师范大学物理学与信息技术学院, 西安 710119)

(2015年3月16日收到; 2015年5月10日收到修改稿)

在具有网络结构的系统中度关联属性对于动力学行为具有重要的影响, 所以产生适度关联网络的方法对于大量网络系统的研究具有重要的作用. 尽管产生正匹配网络的方法已经得到很好的验证, 但是产生反匹配网络的方法还没有被系统的讨论过. 重新连接网络中的边是产生度关联网络的一个常用方法. 这里我们研究使用重连方法产生反匹配无标度网络的有效性. 我们的研究表明, 有倾向的重连可以增强网络的反匹配属性. 但是有倾向重连不能使皮尔森度相关系数下降到 $-1$ , 而是存在一个依赖于网络参数的最小值. 我们研究了网络的主要参数对于网络度相关系数的影响, 包括网络尺寸, 网络的连接密度和网络节点的度差异程度. 研究表明在网络尺寸大的情况下和节点度差异性强的情况下, 重连的效果较差. 我们研究了真实 Internet 网络, 发现模型产生的网络经过重连不能达到真实网络的度关联系数.

关键词: 度关联网络, 重连

PACS: 89.75.-k, 89.75.Hc, 05.50.+q

DOI: 10.7498/aps.64.198901

## 1 引言

复杂网络是研究复杂系统的有效工具. 具有复杂网络结构的系统包括社会系统<sup>[1-5]</sup>、技术系统<sup>[6,7]</sup>、生物系统<sup>[8,9]</sup>以及自然系统<sup>[10,11]</sup>. 网络由节点和连接两个节点的边组成. 节点代表真实系统中的个体, 而边则代表这些不同个体之间的某种联系. 比如神经网络可以看成是不同的神经元通过神经纤维相连接; 社会网络可以看成是社会中的个体通过各种关系相连接. 网络不依赖于节点的位置和边的属性表现出来的性质称为网络拓扑性质, 相应的结构称为网络的拓扑结构<sup>[12]</sup>. 由于节点之间的连接方式不同, 因此网络就具有不同的拓扑结构<sup>[13]</sup>. 近年来, 人们对复杂网络的拓扑性质进行了大量的研究<sup>[14]</sup>. 节点的度表示该节点具有的连接数目. 研究表明, 许多网络都具有无标度特征, 其度分布遵循幂律分布 $P(k) \propto k^{-\gamma}$ . 其中,  $k$ 表示网络中节

点的度.

对于无标度网络, 度关联是网络的一个很重要的性质. 网络的度关联可以分为两种. 若一种网络, 其节点的连接方式是度大的节点更趋于连接度大的节点, 而度小的节点趋于连接度小的节点, 这种度关联被称为正匹配. 它存在于许多社会网络中, 例如电子邮件地址簿网, 演员合作网和科研合作网等等. 在另外一种网络中, 网络节点的连接方式是度大的节点趋于连接度小的节点, 这种度关联被称为反匹配. 如技术网络和生物网络<sup>[15-17]</sup>. 近年来复杂网络的动力学行为引起大家的广泛研究<sup>[18-22]</sup>. 网络的度关联对网络上的各种动力学有很大影响, 例如网络的同步<sup>[23]</sup>, 流行病与舆论的传播<sup>[24,25]</sup>, 以及博弈行为<sup>[26-28]</sup>等.

产生度关联网络的一种重要的方法是对已有的网络进行重新连接. 它最早是由Maslov和Sneppen提出<sup>[29]</sup>. 重新连接是指, 在网络中随机选择两条边, 将这两条边的一个端点进行交换. 重连

\* 国家自然科学基金(批准号: 11305098)、陕西省自然科学基金基础研究计划(批准号: 2014JQ1028)、中央高校基本科研业务费专项资金(批准号: GK201302008)和陕西师范大学交叉学科培育计划(批准号: 5)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: wangshjun@snnu.edu.cn

被应用到许多网络的研究中,它已经被证明在产生正匹配网络时是十分有效的<sup>[30,31]</sup>. 由于很多的真实网络是反匹配网络,因此要研究此类网络的特性,就需要产生反匹配网络. 然而产生反匹配网络的效果没有被系统地研究过.

本文主要是检验有向性重连能否产生反匹配网络. 在模型研究的基础上,我们选用两组真实 Internet 数据,将它们与同样参数下的两个 BA 网络作对比,从而来检验有向性重连产生反匹配网络的有效性.

## 2 网络模型和重连方法

我们采用 BA 网络模型产生无标度网络. BA 无标度网络是一种根据实际网络的特点而构造的模型. 它由 Barabási 和 Albert 提出,具有与实际网络相似的增长性和优先连接特性. 基于这两种特性,它的构造方法如下<sup>[32]</sup>: 1) 从一个具有  $m_0$  个节点的网络开始(且这  $m_0$  个节点完全相互连接),每一步给这个网络增加 1 个节点,并且连接到  $m$  个不同的已经存在于网络的节点上,且  $m \leq m_0$ ; 2) 一个新节点与已存在的节点  $i$  连接的概率  $\Pi_i$  与节点  $i$  的度  $k_i$  之间满足以下关系:  $\Pi_i = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$ ,  $j$  是

指已存在的节点,分母是对所有已存在节点作和. 经过  $T$  步后,网络演化成一个具有  $T + m_0$  个节点、 $mT + m_0(m_0 - 1)/2$  条边的网络.

为了调节网络节点的度差异,我们构造不同度分布指数的无标度网络. 由于 BA 网络的度分布指数为  $\gamma = 2.9 \pm 0.1$ ,因此我们需要在原始的 BA 网络的基础上改变其度分布指数,得到不同度分布指数的无标度网络. 我们使用的模型是 DMS 网络<sup>[33]</sup>. DMS 模型与 BA 模型的构造方法类似,其连接概率更具有一般性:  $\Pi_i = \frac{k_i + k_0}{\sum_j (k_j + k_0)}$ , 其中

$-m < k_0 < \infty$ . 在这个模型中  $\gamma = 3 + k_0/m$ . 由于  $k_0 \in (-m, \infty)$ ,因此  $\gamma$  的取值范围为  $\gamma \in (2, \infty)$ . 当  $k_0 = 0$  时,  $\gamma = 3$ ,即为 BA 网络.

重新连接是构造度关联网络的一种重要方法. 在本文中我们对网络进行有倾向性重新连接的方法是<sup>[34]</sup>: 在初始网络中随机选取两条边,并且将它们的节点进行交换;如果这种交换使得网络的度关联系数向我们需要的方向变化,则保留这次交换,

否则,舍弃这次交换(即网络恢复到此次重连前). 重新连接过程中,不能重复连接和自连接. 重复这种重连过程,一直进行到产生我们所需要的网络.

网络的度关联系数可以通过计算边的两个端点的度之间的皮尔森相关系数(Pearson correlation coefficient)  $r$  来量化. 文献<sup>[15]</sup>在复杂网络上引入了这个量,并且认为它的取值范围为  $-1 \leq r \leq 1$ . 其中  $-1$  表示完全负相关,  $0$  表示不相关,  $1$  表示完全正相关. 在一个实际的网络中,皮尔森度相关系数的计算公式为

$$r = \frac{\langle k_a^l k_a^r \rangle_e - [(\langle k_a^l + k_a^r \rangle / 2)_e]^2}{\langle (k_a^l)^2 + (k_a^r)^2 \rangle_e - [(\langle k_a^l + k_a^r \rangle / 2)_e]^2}, \quad (1)$$

其中,  $k_a^l$  和  $k_a^r$  是第  $a$  条边连接的左右两个端点的度,  $a = 1, \dots, M$ .  $M$  为网络的总边数. 另外, Kendall-Gibbons' 系数  $\tau_b$ <sup>[35]</sup> 是一个不受网络尺寸影响的度相关性量度. 我们在讨论不同网络尺寸的重连效果时,将使用这个系数. 它的定义如下: 选取两条边  $(k^l, k^r)$  和  $(k'^l, k'^r)$ , 如果  $k^l > k^r$  且  $k'^l > k'^r$ , 或者  $k^l < k^r$  且  $k'^l < k'^r$ , 那么这两条边相一致. 如果  $k^l > k^r$  且  $k'^l < k'^r$  或者  $k^l < k^r$  且  $k'^l > k'^r$ , 那么这两条边不一致. 如果  $k^l = k^r$  或者  $k'^l = k'^r$ , 那么这两条边被称为相同对. 对于随机的离散变量  $(k^l, k^r)$ , Kendall-Gibbons' 系数  $\tau_b$  为

$$\tau_b = \frac{2(M_c - M_d)}{\sqrt{[M(M-1) - \xi_x][M(M-1) - \xi_y]}}, \quad (2)$$

其中,  $\xi_x = \sum_i M_x(k^l)(M_x(k^l) - 1)$ ,  $M_x(k^l)$  为左端点的度  $k = k^l$  的边数.  $M_c$  为两条边相一致的数目,  $M_d$  为两条边不一致的数目.

## 3 模拟结果

### 3.1 有向性重连对 BA 网络皮尔森度相关系数的影响.

我们首先在 BA 网络模型上研究重新连接对度相关系数  $r$  的影响. 这里选取的网络参数是网络尺寸  $N = 1000$ , 网络的平均连接度  $\langle k \rangle = 6$  的 BA 网络. 在这种网络中,皮尔森度相关系数  $r$  与重连次数  $t$  的关系如图 1 所示. 由图 1 可知,重连前  $r = -0.1049$ , 而重连后可以得到  $r = -0.3176$ . 有倾向的重新连接可以减小皮尔森度相关系数,增强反匹配特性. 但是我们得到的一个明显的结果是,

皮尔森度相关系数  $r$  最后会减小到一个常数, 而不是一直减小到  $-1$ .

由  $r$  的计算公式可知, 当  $k_a^l = k_a^r$  时,  $r = 1$ . 即每个节点和它的邻居的度相等, 网络达到完全的正匹配. 这种情况在无标度网络中是可以近似实现的<sup>[23]</sup>. 当  $r = -1$  时, 根据方程式应当有  $\langle k_a^l k_a^r \rangle_e = 2[\langle (k_a^l + k_a^r)/2 \rangle_e]^2 - \langle (k_a^{l2} + k_a^{r2})/2 \rangle_e$ . 这个条件在度关联网络中并不表示一种特定的连接方式. 等式的右边的两项只依赖于节点度, 不依赖于网络的结构, 重连前后值不变. 我们把等式右面的值计算出来, 得到  $[\langle (k_a^l + k_a^r)/2 \rangle_e]^2 \approx 265.95$ ,  $\langle (k_a^{l2} + k_a^{r2})/2 \rangle_e \approx 800.30$ . 则根据上面的等式可得  $\langle k_a^l k_a^r \rangle_e \approx -268.40$ . 由于在网络中  $\langle k_a^l k_a^r \rangle_e$  是大于 0 的, 因此这个条件不能成立. 即重连不能使网络达到  $r = -1$ . 因此, 有向性重连在一定程度上可以增加网络的反匹配, 但是并不会到  $-1$ .

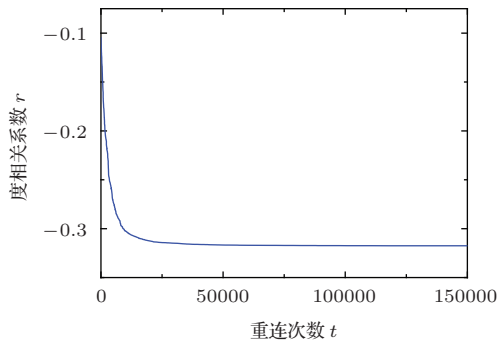


图1 BA网络中度相关系数  $r$  与重连次数  $t$  的关系. 网络尺寸  $N = 1000$ , 平均度  $\langle k \rangle = 6$

Fig. 1. The relation between  $r$  and rewiring steps  $t$  in a BA network, with  $N = 1000$  and  $\langle k \rangle = 6$ .

### 3.2 网络不同参数对网络皮尔森度相关系数的影响

为了系统地研究重新连接对皮尔森度相关系数的影响, 以及造成这种变化的原因, 我们研究以下三个参数: 网络尺寸  $N$ , 网络平均度  $\langle k \rangle$  以及度分布指数  $\gamma$  对重连效果的影响. 在研究网络的参数对重连的影响时, 我们对 1000 个网络进行了平均. 在重连过程中, 每个使  $r$  减小的重连步都需要经过若干次尝试. 当连续尝试重连总节点数的 5 倍, 即  $5N$  次, 都没有得到一个使  $r$  减小的重连步时, 我们就结束重连过程.

首先我们固定 BA 网络的平均度  $\langle k \rangle = 6$  和度分布指数  $\gamma = 3.0$ , 改变网络的尺寸, 研究网络尺寸  $N$  对重连效果的影响. 网络尺寸与皮尔森度相

关系数  $r$  的关系如图 2 所示. 由图 2 可知在重连前  $r$  随网络尺寸的增加而增加, 但这种增加并不是很明显. 重连后的网络  $r$  随网络尺寸的增加而增加的关系很明显. 并且, 对于所有尺寸的网络, 重连后的  $r$  都小于重连前的  $r$ . 因此, 有倾向重连可以增强反匹配, 且对于较小网络, 反匹配的增加更明显. 即随着网络尺寸的增大, 网络的反匹配减弱.

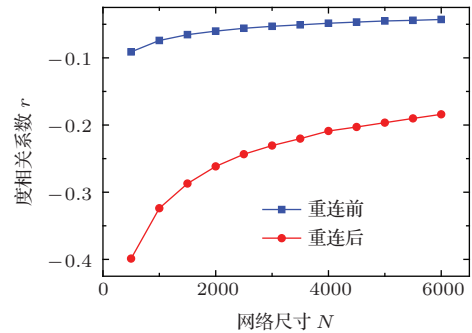


图2 (网刊彩色) 网络尺寸  $N$  与有向性重连前后的网络皮尔森度相关系数  $r$  的关系

Fig. 2. (color online) The relation of the number of node  $N$  to the Pearson correlation coefficient  $r$  before and after the rewiring.

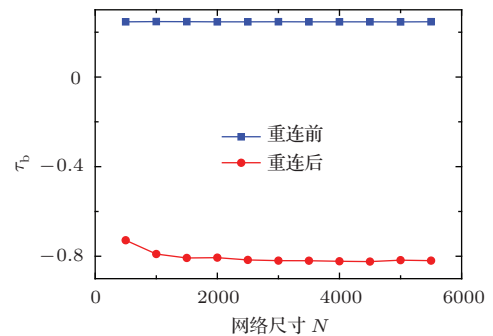


图3 (网刊彩色) 网络尺寸  $N$  与有向性重连前后的网络 Kendall-Gibbons' 系数  $\tau_b$  的关系

Fig. 3. (color online) The relation between the number of node  $N$  and the Kendall-Gibbons' coefficient  $\tau_b$  before and after the rewiring.

作为对比, 我们给出了 Kendall-Gibbons, 系数与节点数的关系, 如图 3 所示. 由图 3 可以看出, 在重连前, Kendall-Gibbons' 系数  $\tau_b > 0$ . 增加网络节点数, Kendall-Gibbons' 系数没有明显的变化. 可见 BA 模型的  $\tau_b$  值与网络尺寸无关, 这一结果符合文献<sup>[35]</sup>中的理论. 另外文献<sup>[35]</sup>研究的多种网络中都存在  $r$  和  $\tau_b$  值的差别. 值得注意的是, BA 网络的度关联系数  $r$  是小于零的, 表明 BA 模型是微弱的反匹配的. 但是 Kendall-Gibbons' 系数是大于零的, 给出了对于度关联性的一个不同的判断. 重连后网络的 Kendall-Gibbons' 系数显著地下降,

我们得到  $\tau_b < 0$ . 这说明重连方法增强了网络的反匹配属性. 当我们增加网络的节点数时,  $\tau_b$  减小然后不再变化. 但是与  $r$  的变化相比,  $\tau_b$  的变化范围很小. 因此, 重连网络的 Kendall-Gibbons' 系数  $\tau_b$  不依赖于网络的尺寸  $N$ , 在各种尺寸的网络中重连都可以增强反匹配属性. 但是, 对于 Kendall-Gibbons' 系数  $\tau_b$ , 文献 [35] 中没有从理论上给出其取值范围以及极值的具体意义. 因此, 我们无法利用  $\tau_b$  来衡量重连方法是否能够实现任意程度的反匹配网络.

然后我们保持 BA 网络的尺寸  $N = 1000$  和度分布指数  $\gamma = 3.0$  不变, 研究网络的平均度  $\langle k \rangle$  对网络结构的影响. 如图 4 所示重连前,  $r$  随着  $\langle k \rangle$  的增加而增加. 重连后,  $r$  随着  $\langle k \rangle$  的增大而减小, 所有网络的  $r$  均减小. 由图 4 可知, 在各种连接密度下, 我们都可以通过有倾向重连增强网络的反匹配. 并且在连接密度大的网络中这种增强的效果更明显.

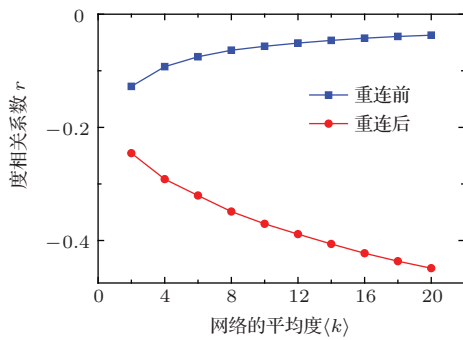


图 4 (网刊彩色) 平均度  $\langle k \rangle$  与有向性重连前后网络的皮尔森度相关系数  $r$  的关系

Fig. 4. (color online) The relation of the average degree  $\langle k \rangle$  to Pearson correlation coefficient  $r$  before and after directed rewiring.

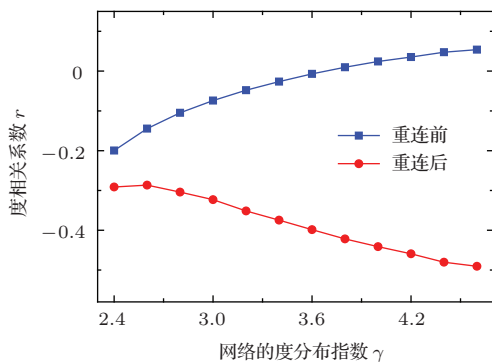


图 5 (网刊彩色) 度分布指数  $\gamma$  与有向性重连前后网络的皮尔森度相关系数  $r$  的关系, 其中  $N = 1000$ ,  $\langle k \rangle = 6$

Fig. 5. (color online) The relation between the degree distribution exponent  $\gamma$  and the Pearson correlation coefficient  $r$  before and after directed rewiring with  $N = 1000$  and  $\langle k \rangle = 6$ .

最后我们固定网络的平均度  $\langle k \rangle = 6$  和网络尺寸  $N = 1000$ , 改变其度分布指数  $\gamma$ , 研究网络中节点度差异对网络结构的影响. 度分布指数越大, 网络中的节点具有的度差异越小. 由图 5 可以看出, 在重连前  $r$  随着节点度分布均匀程度的增加而增加. 重连后  $r$  随节点度分布均匀程度的增加而减小, 并且重连后的  $r$  小于重连前. 当  $\gamma$  的值在 2.4 到 3 之间, 反匹配不能达到很大的程度. 随着度分布均匀程度的增加, 重连可以使网络达到的反匹配程度也增加. 度相关性与度分布指数的关系在文献 [36] 中已经研究, 得到的结果与图 5 中方块 (重连前) 的结果一致.

### 3.3 真实 Internet 网络

Internet 是一个显著反匹配的网络, 它是研究复杂网络时经常被用到的一个例子. 我们使用 BA 网络模型与 Internet 进行比较, 来检验重连是否可以使网络产生很强的反匹配特性.

这里我们使用的第一组真实网络的数据来自文献, 这个 Internet 网络是 AS 自治层网络 [16]. 这是一个经常被引用的数据. 网络的主要结构参数如表 1 所示. 我们构造一个尺寸和度分布指数相同、平均度非常接近的无向的 BA 网络, 其具体参数为  $N = 10697$ ,  $\langle k \rangle = 6$  和  $\gamma = 2.5$ . 我们得到的这个 BA 网络的皮尔森度相关系数是  $r = -0.099$ . 在此基础上, 我们对 BA 网络进行有向性重连, 过程如图 6. 在这个网络中度相关系数稳定在  $r = -0.137$ . 我们对这个模拟进行了 10000 次, 使用这些网络实现进行统计. 重连后得到的  $r$  的稳定值分布如图 6 中的插图.

表 1 第一组 Internet 网络的参数

Table 1. The parameter of real Internet network in the first set of data.

Network	Type	$N$	$M$	$\langle k \rangle$	$\gamma$	$r$
Internet	Undirected	10697	31992	5.98	2.5	-0.189

由图 6 可知, 有向性重连过程中,  $N = 10697$ ,  $\langle k \rangle = 6$ ,  $\gamma = 2.5$  的 BA 网络的度相关系数  $r$  逐渐减小. 并且  $r$  最终达到一个大于  $-1$  的稳定值, 即  $r$  不会一直减小到  $-1$ , 这与前面得到的结论一致. 将图 6 插图中的  $r$  与真实的 Internet 网络数据对比可知, BA 网络重连得到的  $r$  要大于真实 Internet 的  $r$ .

因此, 在这个真实数据的条件下, 有向重连可以增强反匹配, 但是无法达到真实网络的反匹配程度.

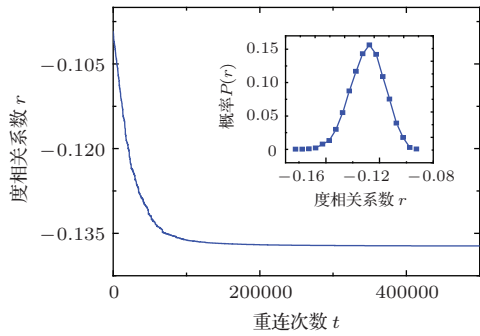


图6 BA网络中, 度相关系数  $r$  与重连次数  $t$  的关系 (插图: 进行足够多次有向性重连后度相关系数  $r$  的分布, 网络参数  $N = 10697$ ,  $\langle k \rangle = 6$ )

Fig. 6. The relation of  $r$  to the rewiring steps  $t$  in a BA network. Inset: The distribution of  $r$  in rewired BA networks. The parameters are  $N = 10697$  and  $\langle k \rangle = 6$ .

为了能够得到更多的认识, 我们采用一组信息更加完整的数据. 第二组 Internet 网络的数据来自文献 [37]. 这个 Internet 也是 AS 自治层网络. 这组数据有完整的连接矩阵. 我们利用连接矩阵可以得到它的各种结构性质. 由数据可知, 网络尺寸为  $N = 22963$ . 通过计算机计算, 我们得出其网络平均度  $\langle k \rangle = 4.2$ , 皮尔森度相关系数  $r = -0.198$ . 我们计算了这个网络的度分布. 对网络的度分布进行线性拟合, 得到其度分布指数  $\gamma = 2.5$ , 具体如图 7(a) 所示. 网络的主要参数如表 2 所示.

表2 第二组 Internet 网络的参数

Table 2. The parameter of real Internet network in the second set of data.

Network	Type	$N$	$M$	$\langle k \rangle$	$\gamma$	$r$
Internet	Undirected	22963	48436	4.2	2.5	-0.198

我们采用 BA 模型产生一个具有相同尺寸和度分布指数的网络. 其参数为  $N = 22963$ ,  $\langle k \rangle = 4$ . 其度分布指数也可从度分布的线性拟合得到, 如图 7(b) 所示. 我们计算得到了这个 BA 网络的度相关系数是  $r = -0.0744$ . 我们对此网络进行有向性重连, 重连过程如图 8 所示. 重连后度相关系数  $r = -0.0928$ . 我们对 10000 个这样的网络进行统计, 得到重连后稳定  $r$  值的分布如图 8 插图.

由图 8 可以看出, 对于  $N = 22963$ ,  $\langle k \rangle = 4$  和  $\gamma = 2.5$  的 BA 网络, 有向性重连后的度相关系数  $r$

也是一个大于  $-1$  的常数. 对多个网络进行统计后, 得到  $r$  分布在  $-0.09$  附近, 远远大于第二组真实的 Internet 数据中的  $r$ . 这与第一组真实数据得到的结果一致.

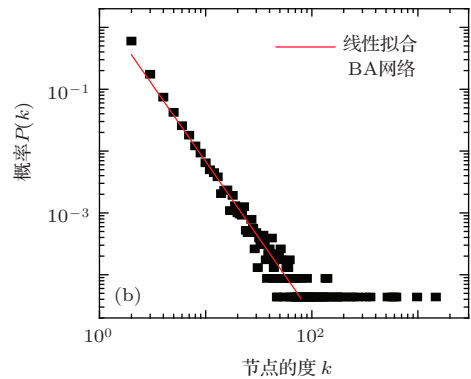
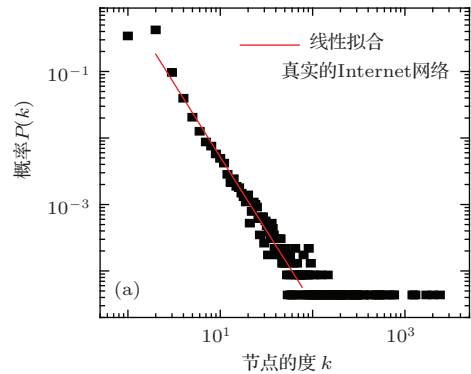


图7 (网刊彩色) 网络的度分布 (a) 真实 Internet; (b) BA 网络

Fig. 7. (color online) The distribution of degree: (a) real Internet; (b) BA network.

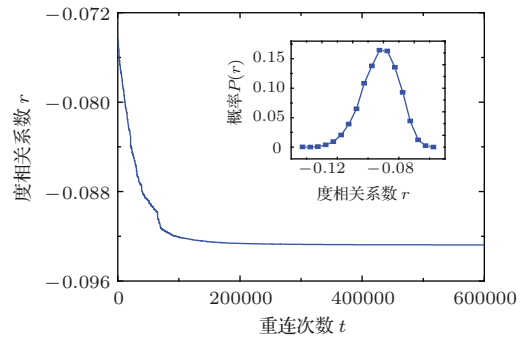


图8 BA网络中度相关系数  $r$  与重连次数  $t$  的关系 (插图: 重连足够多次后度相关系数  $r$  的分布, 其中  $N = 22963$ ,  $\langle k \rangle = 4$ )

Fig. 8. The relation of  $r$  to rewiring steps  $t$  in the BA network. Inset: The distribution of  $r$  in rewired BA networks with  $N = 22963$  and  $\langle k \rangle = 4$ .

由以上结果可以得知, 根据真实的 Internet 数据构造的 BA 网络, 有向性重连之后并不能得到与真实 Internet 一样的结构, 其反匹配强度远远小于真实的 Internet 网络. 从图 7 我们可以看到, 真实

的Internet网络的一个显著特点是存在很多度为1的节点. 而在BA网络中, 为了使 $\langle k \rangle = 4$ , 其最小度是2. 另外, 真实网络中最大节点度更大. 并且除了这些特殊的节点, 网络的其余的节点度分布满足幂律分布. 因此关于Internet具有强的负关联的直观解释是许多节点只与一个节点相连, 这些节点可以贡献更加强的负关联. 真实的Internet具有更低的 $r$ 是因为它偏离了power-law度分布.

文献[38, 39]中研究了真实的AS层Internet网络的结构特性. 对于真实的Internet网络度相关系数通常为负, 重连只能使度相关系数在一个很小的范围内变化. 文献指出真实的Internet网络的这种性质是受网络特殊结构影响的. 我们的结果同样也说明了真实Internet结构的特殊性, 并且我们说明了这种特殊性来自真实Internet度分布与模型网络度分布的微小差异.

## 4 结论与讨论

本文研究了通过有倾向地重新连接网络的边产生反匹配网络的效果. 在重新连接的过程中, 只有降低度相关系数的重连被接受, 并且每个节点的连接度不发生变化. 我们的研究表明BA无标度网络在重连以后具有更小的皮尔森度相关系数, 但是它的最小值不能达到 $-1$ . 我们的分析表明皮尔森度相关系数的定义中对反匹配的情况进行了不合理的归一化, 使得 $-1$ 不可能达到. 我们改变了网络的参数, 研究了最低度相关系数与网络参数的关系. 结果表明在网络尺寸较小, 网络连接密度较大, 度分布较为均匀的情况下, 重连可以使无标度网络具有强的反匹配属性. 我们选取两组真实Internet数据作为对比, 研究重连是否能使相同参数下的BA网络达到强的反匹配程度. 结果表明BA网络的最低皮尔森相关系数远高于真实Internet网络的皮尔森度关联系数 $r$ .

我们的结果提出了一个有意义的问题, 真实网络如何具有强的反匹配属性. 我们看到真实Internet网络的度分布在最大节点和最小节点上偏离了BA网络的度分布, 它的最小节点更小, 同时它的最大节点更大. 这些小的偏离提供了产生更强反匹配的条件. 在未来的研究中可以从此得到真实网络具有强的反匹配属性的机理. 另外我们关于Internet网络反匹配程度超过无标度网络模型的结果也表

明在真实网络中特殊的大节点和小节点数量非常少但是可能带来明显地偏离统计理论预期的效果, 是值得未来的研究重视的因素.

## 参考文献

- [1] Goh K I, Oh E, Kahng B, Kim D 2003 *Phys. Rev. E* **67** 017101
- [2] Liu G, Li Y S, Zhang X P 2013 *Chin. Phys. B* **22** 068901
- [3] Contreras M G A, Fagiolo G 2014 *Phys. Rev. E* **90** 062812
- [4] Wang Z, Szolnoki A, Perc M 2014 *Phys. Rev. E* **90** 032813
- [5] Mastrandrea R, Squartini T, Fagiolo G, Garlaschelli D 2014 *Phys. Rev. E* **90** 062804
- [6] Pastor-Satorras R, Vázquez A, Vespignani A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 258701
- [7] Kenmogne F, Yemélé D, Kengne J, Ndjanfang D 2014 *Phys. Rev. E* **90** 052921
- [8] Wang S J, Hilgetag C C, Zhou C 2011 *Front. Comput. Neurosci.* **5** 30
- [9] Wang S J, Zhou C 2012 *New J. Phys.* **14** 023005
- [10] Guez O C, Gozolchiani A, Havlin S 2014 *Phys. Rev. E* **90** 062814
- [11] Xia H J, Li P P, Ke J H, Lin Z Q 2015 *Chin. Phys. B* **24** 040203
- [12] Zhou T, Bai W J, Wang B H, Liu Z J, Yan G 2005 *Physics* **34** 31 (in Chinese) [周涛, 柏文洁, 汪秉宏, 刘之景, 严钢 2005 物理 **34** 31]
- [13] Chen G R 2008 *Advances in Mechanics* **38** 653 (in Chinese) [陈关荣 2008 力学进展 **38** 653]
- [14] Wang X F, Li X, Chen G R 2006 *Complex Networks: Theory and Its Applications* (Beijing: Tsinghua University Press) p49 (in Chinese) [汪小帆, 李翔, 陈关荣 2006 复杂网络理论及其应用 (北京: 清华大学出版社) 第49页]
- [15] Newman M E J 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 208701
- [16] Newman M E J 2003 *SIAM Rev.* **45** 167
- [17] Hu M B, Jiang R, Wu Q S 2013 *Chin. Phys. B* **22** 066301
- [18] Hu Y G, Wang S J, Jin T, Qu S X 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 028901 (in Chinese) [胡耀光, 王圣军, 金涛, 屈世显 2015 物理学报 **64** 028901]
- [19] Wang S J, Wu A C, Wu Z X, Xu X J, Wang Y H 2007 *Phys. Rev. E* **75** 046113
- [20] Menche J, Valleriani A, Lipowsky R 2010 *Phys. Rev. E* **81** 046103
- [21] Wu Y, Li P, Chen M, Xiao J, Kurths J 2009 *Physica A* **388** 2987
- [22] Menche J, Valleriani A, Lipowsky R 2010 *Europhys. Lett.* **89** 18002
- [23] Jin Y G, Zhong S M, An N 2015 *Chin. Phys. B* **24** 049202
- [24] Li R Q, Tang M, Xu B M 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 168903 (in Chinese) [李睿琪, 唐明, 许伯铭 2013 物理学报 **62** 168903]

- [25] Ren Z M, Liu J G, Shao F, Hu Z L, Guo Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 108902 (in Chinese) [任卓明, 刘建国, 邵凤, 胡兆龙, 郭强 2013 物理学报 **62** 108902]
- [26] Rong Z, Li X, Wang X 2007 *Phys. Rev. E* **76** 027101
- [27] Rong Z, Wu Z X 2009 *Europhys. Lett.* **87** 30001
- [28] Rong Z, Wu Z X, Chen G 2013 *Europhys. Lett.* **102** 68005
- [29] Maslov S, Sneppen K 2002 *Science* **296** 910
- [30] Watts D J, Strogatz S H 1998 *Nature* **393** 440
- [31] Xulvi-Brunet R, Sokolov I M 2004 *Phys. Rev. E* **70** 066102
- [32] Barabási A L, Albert R 1999 *Science* **286** 509
- [33] Boccaletti S, Latora V, Moreno Y, Chavez M, Hwang D U 2006 *Phys. Rep.* **424** 175
- [34] Larremore D B, Shew W L, Restrepo J G 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 058101
- [35] Raschke M, Schläpfer M, Nibali R 2010 *Phys. Rev. E* **82** 037102
- [36] Dorogovtsev S N, Ferreira A L, Goltsev A V, Mendes J F F 2010 *Phys. Rev. E* **81** 031135
- [37] Network data, Newman M E J <http://www-personal.umich.edu/~mejn/netdata/> [2015-03-16]
- [38] Zhou S, Mondragón R J 2007 *New J. Phys.* **9** 173
- [39] Zhang G Q, Zhang G Q, Yang Q F, Cheng S Q, Zhou T 2008 *New J. Phys.* **10** 123027



# Disassortative networks generated by directed rewiring\*

Qu Jing Wang Sheng-Jun<sup>†</sup>*(School of Physics and Information Technology, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, China)*

( Received 16 March 2015; revised manuscript received 10 May 2015 )

## Abstract

The degree correlation of nodes is known to considerably affect the network dynamics in systems with a complex network structure. Thus it is necessary to generate degree correlated networks for the study of network systems. The assortatively correlated networks can be generated effectively by rewiring connections in scale-free networks. However, disassortativity in scale-free networks due to rewiring has not been studied systematically.

In this paper, we present the effectiveness of generating disassortative scale-free networks by rewiring the already formed structure of connections which are built using the evolving network model. In the rewiring, two randomly selected links are cut and the four ends are connected randomly by two new links. The rewiring will be reserved if the disassortativity changes to the direction we need, otherwise it will be aborted. However, if one or both of the new links already exist in the network or a node is connected to itself, the rewiring step is aborted and two new links are selected. Our result shows that the rewiring method can enhance the disassortativity of scale-free networks. However, it is notable that the disassortativity measured by the Pearson correlation coefficient cannot be tuned to  $-1$  which is believed to be the complete disassortativity. We obtain that the minimum value of the Pearson correlation coefficient depends on the parameters of networks, and we study the effect of network parameters on the degree correlation of the rewired networks, including the network size, the connection density of the network, and the heterogeneity of node degrees in the network. The result suggests that the effect of rewiring process is poorer in networks with higher heterogeneity, large size and sparse density. Another measurement of degree correlation called Kendall-Gibbons' coefficient is also used here, which gives the value of degree correlation independent of the network size. We give the relation of Kendall-Gibbons' coefficient to network sizes in both original scale-free networks and rewired networks. Results show that there is no obvious variance in rewired networks when the network size changes. The Kendall-Gibbons' coefficient also shows that rewiring can effectively enhance the disassortativity of the scale-free network.

We also study the effectiveness of rewiring by comparing it with two sets of data of real Internets. We use the evolving network model to generate networks which have the same parameters as the real Internet, including network sizes, connection density and degree distribution exponents. We obtain that the networks generated by rewiring procedure cannot reach the same degree correlation as the real networks. The degree distribution of real networks diverges from the model at the largest degree or the smallest degree, which provides a heuristic explanation for the special degree correlation of real networks. Therefore, the difference at the end of the distribution is not negligible.

**Keywords:** degree correlated network, rewiring**PACS:** 89.75.-k, 89.75.Hc, 05.50.+q**DOI:** 10.7498/aps.64.198901

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11305098), the Natural Science Basic Research Plan in Shaanxi Province of China (Program No. 2014JQ1028), the Fundamental Research Funds for the Central Universities, China (Grant No. GK201302008), and the Interdisciplinary Incubation Project of Shaanxi Normal University, China (Grant No. 5).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: wangshjun@snnu.edu.cn