

具有质量及频率涨落的欠阻尼线性谐振子的随机共振

钟苏川 蔚涛 张路 马洪

Stochastic resonance of an underdamped linear harmonic oscillator with fluctuating mass and fluctuating frequency

Zhong Su-Chuan Yu Tao Zhang Lu Ma Hong

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 020202 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.020202

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.020202>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I2>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

多载波微放电中二次电子横向扩散的概率分析

[Probabilistic analysis of the lateral diffusion of secondary electrons in multicarrier multipactor](#)

物理学报.2014, 63(22): 220205 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.220205>

无线传感器网络中无标度拓扑的动态容错性分析

[Dynamic fault-tolerance analysis of scale-free topology in wireless sensor networks](#)

物理学报.2014, 63(11): 110205 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.110205>

超网络中标度律的涌现

[Emergence of scaling in hypernetworks](#)

物理学报.2014, 63(9): 090207 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.090207>

基于动态最小生成树路由协议的数据聚融算法

[Data fusion algorithm based on dynamic minimal spanning tree routing protocol](#)

物理学报.2014, 63(9): 090206 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.090206>

基于元胞自动机的复杂信息系统安全风险传播研究

[Complex information system security risk propagation research based on cellular automata](#)

物理学报.2013, 62(20): 200203 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.200203>

具有质量及频率涨落的欠阻尼线性谐振子的随机共振*

钟苏川¹⁾ 蔚涛²⁾ 张路²⁾ 马洪^{2)†}

1)(四川大学空天科学与工程学院, 成都 610064)

2)(四川大学数学学院, 成都 610064)

(2014年8月12日收到; 2014年9月8日收到修改稿)

以往的研究大多考虑线性谐振子模型受频率涨落噪声的影响, 而当布朗粒子处于具有吸附能力的复杂环境时, 粒子质量也存在随机涨落. 因此, 本文研究具有质量及频率涨落两项噪声的二阶欠阻尼线性谐振子模型的随机共振现象. 利用 Shapiro-Loginov 公式和 Laplace 变换, 推导了系统响应一阶稳态矩及稳态响应振幅的解析表达式. 并根据稳态响应振幅的解析表达式, 建立了稳态响应振幅关于质量涨落噪声及频率涨落噪声各自的噪声强度能够诱导随机共振现象产生的充分必要条件. 仿真实验表明, 当系统参数满足本文所给出的充分必要条件要求时, 系统稳态响应振幅关于噪声强度的变化曲线具有明显的共振峰, 即此选定参数组合能够诱导系统产生随机共振现象.

关键词: 质量涨落噪声, 频率涨落噪声, 随机共振, 欠阻尼线性谐振子

PACS: 02.50.-r, 05.40.-a, 05.40.Ca

DOI: 10.7498/aps.64.020202

1 引言

随机共振 (stochastic resonance) 最初是由 Benzi 等^[1,2] 在 20 世纪 80 年代初研究古气候冰川问题时提出的. 随机共振是以随机微分方程为数学模型, 研究物理系统的系统参数、噪声以及周期激励信号之间非单调性的一种非线性协作效应. 与传统的噪声有害思想相悖, 随机共振现象表明, 在一定的前提条件下, 有可能实现噪声能量向信号能量的转移, 进而增强系统的有序性. 近 30 年对随机共振的研究围绕着各种动力系统和噪声展开, 并已在物理、化学、生物、工程技术等众多学科领域得到广泛应用^[3-6].

在很长一段时间内, 人们普遍认为非线性是产生随机共振的一个必要条件^[7-10], 并且早期的研

究也主要集中在受周期信号和加性噪声激励的非线性模型. 近年来, 一些学者发现线性系统中也会出现随机共振现象^[11-16]. 1996 年, Berdichevsky 和 Gitterman^[13] 研究了受乘性色噪声驱动的线性系统, 发现系统稳态响应振幅增益关于噪声强度和噪声相关时间均存在随机共振现象. 1999 年, Berdichevsky 和 Gitterman 又对受乘性噪声、加性噪声和周期信号联合驱动的线性系统进行了研究, 发现系统输出信噪比关于噪声相关时间和周期信号频率存在随机共振现象^[14].

线性谐振子是最简单也是最理想的力学系统, 不同形式的激励噪声对其行为有不同的影响, 相关问题的研究也成为统计物理的热点研究问题. 对于线性谐振子而言, 以往的研究工作通常考虑在过阻尼情形下, 即谐振子的二阶微分加速度项忽略, 研究一阶过阻尼线性谐振子模型的随机共振

* 国家自然科学基金重点项目 (批准号: 11171238)、国家自然科学基金青年科学基金 (批准号: 11401405) 和四川大学青年教师科研启动基金 (批准号: 2082604174031) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: mahong@scu.edu.cn

现象^[17,18], 对于二阶欠阻尼线性谐振子模型的相关研究则起步较晚, 相关研究工作还有待进一步深入.

此外, 以往关于线性谐振子模型随机共振现象的研究工作通常考虑系统频率或系统阻尼系数受扰动而引入不同类型的噪声^[15,19], 对布朗粒子质量受环境扰动而引入噪声的相关研究相对较少. 事实上, 在许多生物和化学系统中^[20,21], 环境介质中的分子常具有一定的吸附能力, 会随机吸附于布朗粒子, 使布朗粒子的质量具有随机性, 因此环境分子的吸附能力对系统动力学特性的影响是必须考虑的重要因素. Gitterman等^[22]通过将质量涨落噪声建模为非对称双态噪声的二次函数, 观察到此时谐振子的响应幅值增益存在随机共振现象. 蔚涛等^[23]从理论和仿真实验两个角度研究了存在质量涨落的线性谐振子模型的共振行为, 观察到了双峰共振、单峰单谷共振等新的共振形式. 但是这些研究工作仅讨论了存在单个噪声情形下线性谐振子的随机共振现象, 未考虑当布朗粒子处于具有一定吸附能力的复杂环境时, 相应的系统可能会被多种噪声干扰.

本文在前期研究的基础上, 建立了复杂环境下具有质量涨落和频率涨落噪声两项噪声的二阶欠阻尼线性谐振子随机共振模型. 为研究方便, 本文将粒子质量及系统频率受到的干扰分别建模为两个具有不同统计性质的双态噪声. 本文以Shapiro-Loginov公式和Laplace变换为研究手段, 推导获得了系统响应一阶稳态矩和稳态响应振幅的解析表达式. 进一步, 基于解析表达式, 深入研究了系统参数对随机共振现象的影响, 给出了系统稳态响应振幅关于质量涨落噪声及频率涨落噪声各自的噪声强度能够诱导随机共振现象产生的充分必要条件. 最后, 基于本文给出的充分必要条件, 验证了系统在选定参数组合下能够诱导产生随机共振现象, 为该随机共振模型的后续应用提供了坚实的理论支撑.

2 系统模型

考虑如下同时具有质量及频率涨落噪声的二阶欠阻尼线性谐振子随机共振模型:

$$[m + Z_1(t)] \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \gamma \frac{dx(t)}{dt}$$

$$+ [\omega^2 + Z_2(t)] x(t) = A_0 \sin(\Omega t) + W(t), \quad (1)$$

其中, $x(t)$ 为粒子位移; $m > 0$ 为粒子质量; $\gamma > 0$ 为阻尼系数; ω 为系统频率; A_0, Ω 为外部输入周期信号的振幅和频率; $W(t)$ 为加性内噪声, 本文将其建模为高斯白噪声, 满足 $\langle W(t) \rangle = 0$, $\langle W(t)W(s) \rangle = 2D\delta(t-s)$, 其中 D 为噪声强度. 两个乘性外噪声 $Z_1(t)$ 和 $Z_2(t)$ 分别代表粒子质量 m 及系统频率 ω 所受到的随机扰动, 本文将其建模为两个具有不同统计特性的对称双态噪声 (symmetric dichotomous noise)^[24]. $Z_1(t)$ 取值 $\{-a_1, a_1\}$, $a_1 > 0$, $Z_2(t)$ 取值 $\{-a_2, a_2\}$, $a_2 > 0$. $Z_1(t)$ 和 $Z_2(t)$ 的均值和方差分别为

$$\begin{aligned} \langle Z_1(t) \rangle &= 0, & \langle Z_2(t) \rangle &= 0, \\ \langle Z_1(t)Z_1(s) \rangle &= a_1^2 \exp(-v_1|t-s|), \\ \langle Z_2(t)Z_2(s) \rangle &= a_2^2 \exp(-v_2|t-s|), \\ \langle Z_1(t)Z_2(s) \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

其中, a_1^2, a_2^2 为 $Z_1(t), Z_2(t)$ 的噪声强度; v_1, v_2 为其噪声相关率. 本文之所以将粒子质量 m 和系统频率 ω 所受到的随机扰动 $Z_1(t)$ 和 $Z_2(t)$ 建模为双态噪声, 是考虑到它是一种简单而常见的色噪声, 具有相对简单的性质, 并且在极限条件 (噪声相关率 $v \rightarrow +\infty$) 时, 双态噪声将退化为高斯白噪声. 此外, 将双态噪声以乘性方式引入线性系统可得到一个精确可解的色噪声模型, 故在双态噪声作用下, 系统的动力学性质的研究具有普适的理论和实际意义^[25-27].

为保证(1)式中粒子质量 $m + Z_1(t) > 0$, 相应参数需满足如下基本条件:

$$0 < a_1 < m. \quad (3)$$

最后需要说明的是, 本文将高斯白噪声 $W(t)$ 视为系统内噪声, 将双态噪声 $Z_1(t)$ 和 $Z_2(t)$ 视为系统外噪声, 考虑到内、外噪声起源不同, 故本文假设其不相关, 即

$$\langle Z_1(t)W(s) \rangle = \langle Z_2(t)W(s) \rangle = 0.$$

3 系统响应一阶稳态矩及稳态响应振幅

将(1)式两边同时取平均, 得到有关一阶矩 $\langle x(t) \rangle$ 的方程:

$$m \frac{d^2 \langle x(t) \rangle}{dt^2} + \left\langle Z_1(t) \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \right\rangle + \gamma \frac{d \langle x(t) \rangle}{dt} + \omega^2 \langle x(t) \rangle + \langle Z_2(t)x(t) \rangle = A_0 \sin(\Omega t). \quad (4)$$

利用 Shapiro-Loginov 公式^[28]可得如下方程:

$$\begin{aligned} & \left\langle Z_1(t) \frac{dx(t)}{dt} \right\rangle \\ &= \frac{d \langle Z_1(t)x(t) \rangle}{dt} + v_1 \langle Z_1(t)x(t) \rangle, \quad (5) \\ & \left\langle Z_1(t) \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \right\rangle \\ &= \frac{d^2 \langle Z_1(t)x(t) \rangle}{dt^2} + 2v_1 \frac{d \langle Z_1(t)x(t) \rangle}{dt} \\ & \quad + v_1^2 \langle Z_1(t)x(t) \rangle. \quad (6) \end{aligned}$$

将(6)式代入(4)式得

$$\begin{aligned} & m \frac{d^2 \langle x(t) \rangle}{dt^2} + \gamma \frac{d \langle x(t) \rangle}{dt} + \omega^2 \langle x(t) \rangle \\ & + \frac{d^2 \langle Z_1(t)x(t) \rangle}{dt^2} + 2v_1 \frac{d \langle Z_1(t)x(t) \rangle}{dt} \\ & + v_1^2 \langle Z_1(t)x(t) \rangle + \langle Z_2(t)x(t) \rangle \\ & = A_0 \sin(\Omega t). \quad (7) \end{aligned}$$

将(1)式两边同时乘以 $Z_1(t)$, 再取平均:

$$\begin{aligned} & m \left\langle Z_1(t) \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \right\rangle + a_1^2 \frac{d^2 \langle x(t) \rangle}{dt^2} \\ & + \gamma \left\langle Z_1(t) \frac{dx(t)}{dt} \right\rangle + \omega^2 \langle Z_1(t)x(t) \rangle \\ & = 0. \quad (8) \end{aligned}$$

将(5)和(6)式代入(8)式得

$$\begin{aligned} & a_1^2 \frac{d^2 \langle x(t) \rangle}{dt^2} + m \frac{d^2 \langle Z_1(t)x(t) \rangle}{dt^2} \\ & + (2mv_1 + \gamma) \frac{d \langle Z_1(t)x(t) \rangle}{dt} \\ & + (mv_1^2 + \gamma v_1 + \omega^2) \langle Z_1(t)x(t) \rangle \\ & = 0. \quad (9) \end{aligned}$$

同样, 将(1)式两边同时乘以 $Z_2(t)$, 再取平均:

$$\begin{aligned} & m \left\langle Z_2(t) \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \right\rangle + \gamma \left\langle Z_2(t) \frac{dx(t)}{dt} \right\rangle \\ & + \omega^2 \langle Z_2(t)x(t) \rangle + a_2^2 \langle x(t) \rangle \\ & = 0. \quad (10) \end{aligned}$$

利用 Shapiro-Loginov 公式解耦, 并代入(10)式得

$$a_2^2 \langle x(t) \rangle + m \frac{d^2 \langle Z_2(t)x(t) \rangle}{dt^2}$$

$$\begin{aligned} & + (2mv_2 + \gamma) \frac{d \langle Z_2(t)x(t) \rangle}{dt} \\ & + (mv_2^2 + \gamma v_2 + \omega^2) \langle Z_2(t)x(t) \rangle = 0. \quad (11) \end{aligned}$$

方程(7), (9), (11)共同构成关于 $x_1 = \langle x(t) \rangle$, $x_2 = \langle Z_1(t)x(t) \rangle$, $x_3 = \langle Z_2(t)x(t) \rangle$ 的三元方程组, 利用 Laplace 变换^[29]处理此方程组, 得

$$\begin{cases} (ms^2 + \gamma s + \omega^2)X_1(s) \\ + (s + v_1)^2 X_2(s) + X_3(s) \\ = \frac{A_0 \Omega}{s^2 + \Omega^2} + (ms + \gamma)x_1(0) + mx'_1(0) \\ + (s + 2v_1)x_2(0) + x'_2(0), \\ a_1^2 s^2 X_1(s) + [ms^2 + (2mv_1 + \gamma)s \\ + (mv_1^2 + \gamma v_1 + \omega^2)]X_2(s) \\ = a_1^2 s x_1(0) + a_1^2 x'_1(0) + (ms + 2mv_1 \\ + \gamma)x_2(0) + mx'_2(0), \\ a_2^2 X_1(s) + [ms^2 + (2mv_2 + \gamma)s \\ + (mv_2^2 + \gamma v_2 + \omega^2)]X_3(s) \\ = (ms + 2mv_2 + \gamma)x_3(0) + mx'_3(0), \end{cases} \quad (12)$$

其中, $X_i(s) = \int_0^{+\infty} x_i(t) e^{-st} dt$, $i = 1, 2, 3$; $x_1(0), x_2(0), x_3(0), x'_1(0), x'_2(0), x'_3(0)$ 为初值条件.

由方程组(12)看出, 系统响应一阶矩所满足的方程在 s 域为一个三元非齐次线性方程组, 解此方程组可得 $X_i(s)$, $i = 1, 2, 3$ 的解析表达式. 再将其做逆 Laplace 变换, 并考虑 $t \rightarrow \infty$ 时初值条件对系统响应的影响将逐渐消失, 推导获得系统响应一阶稳态矩 $\langle x(t) \rangle_{as} \triangleq \langle x(t) \rangle|_{t \rightarrow \infty}$ 的解析表达式为

$$\langle x(t) \rangle_{as} \triangleq \langle x(t) \rangle|_{t \rightarrow \infty} = A \sin(\Omega t + \varphi). \quad (13)$$

(13)式中 A 和 φ 为系统响应一阶稳态矩 $\langle x(t) \rangle_{as}$ 的振幅和相移, A 又称为系统稳态响应振幅, 它们可根据(12)式推导获得:

$$\begin{aligned} A &= A_0 \sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{f_3^2 + f_4^2}}, \\ \varphi &= \arctan \left(\frac{f_2 f_3 - f_1 f_4}{f_1 f_3 + f_2 f_4} \right), \quad (14) \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} f_1 &= K_2 K_3 - K_4 K_5, \\ f_2 &= K_2 K_5 + K_3 K_4, \\ f_3 &= K_3 (K_1 K_2 - K_0 K_4) - K_5 (K_1 K_4 + K_0 K_2) \\ & \quad + a_1^2 \Omega^2 [(v_1^2 - \Omega^2) K_3 - 2v_1 \Omega K_5] - a_2^2 K_2, \end{aligned}$$

$$f_4 = K_5(K_1K_2 - K_0K_4) + K_3(K_1K_4 + K_0K_2) + a_1^2\Omega^2 [(v_1^2 - \Omega^2)K_5 + 2v_1\Omega K_3] - a_2^2K_4,$$

$$K_0 = \gamma\Omega,$$

$$K_1 = \omega^2 - m\Omega^2,$$

$$K_2 = mv_1^2 + \gamma v_1 + \omega^2 - m\Omega^2,$$

$$K_3 = mv_2^2 + \gamma v_2 + \omega^2 - m\Omega^2,$$

$$K_4 = (2mv_1 + \gamma)\Omega,$$

$$K_5 = (2mv_2 + \gamma)\Omega.$$

需要强调的是, 为保证 (13) 式所给出的系统响应一阶矩的稳定性, 噪声 $Z_2(t)$ 的噪声强度 a_2^2 需满足如下不等式^[30]:

$$0 < a_2^2 < a_{2,cr}^2 = \omega^2(mv_2^2 + \gamma v_2 + \omega^2). \quad (15)$$

4 讨论

在上一节中通过理论推导我们给出了系统稳态响应振幅 A 的解析表达式 (14) 式, 可以看出系统稳态响应振幅 A 是系统参数 $\gamma, \omega, A_0, \Omega, m, a_1^2, a_2^2, v_1, v_2$ 的函数. 在以下两小节, 我们将根据 (14) 式, 推导出系统稳态响应振幅 A 关于质量涨落噪声 $Z_1(t)$ 的噪声强度 a_1^2 、频率涨落噪声 $Z_2(t)$ 的噪声强度 a_2^2 能够产生随机共振现象的充分必要条件, 并基于获得的充分必要条件深入研究各相关参数的变化对系统随机共振现象的影响.

4.1 系统稳态响应振幅 A 关于噪声强度 a_1^2 的随机共振现象

若考虑系统稳态响应振幅 A 作为质量涨落噪声 $Z_1(t)$ 的噪声强度 a_1^2 的一元函数, 根据 (14) 式可见 $A(a_1^2)$ 在 $a_{1,m}^2$ 处取得极大值,

$$a_{1,m}^2 = [(M_1K_2 + M_2K_4)a_2^2 + (K_1K_4 + K_0K_2) \times (M_1K_5 - M_2K_3) - (K_1K_2 - K_0K_4) \times (M_1K_3 + M_2K_5)] \times [\Omega^2(M_1^2 + M_2^2)]^{-1}, \quad (16)$$

其中,

$$M_1 = (v_1^2 - \Omega^2)K_3 - 2v_1\Omega K_5,$$

$$M_2 = (v_2^2 - \Omega^2)K_5 + 2v_2\Omega K_3.$$

根据 (16) 式及系统参数 a_1 需满足的基本条件 (3) 式, 我们给出系统稳态响应振幅 A 关于质量涨

落噪声 $Z_1(t)$ 的噪声强度 a_1^2 能够产生随机共振现象的充分必要条件为

$$0 < a_{1,m}^2 < m^2. \quad (17)$$

利用 (16) 和 (17) 式, 在固定参数 $A_0, m, \Omega, \omega, v_1, \gamma$ 取值的情形下, 系统稳态响应振幅 A 关于噪声强度 a_1^2 能够产生随机共振现象的参数区域的边界曲线 $a_{2,1}^2(v_2)$ 和 $a_{2,2}^2(v_2)$ 为

$$a_{2,1}^2(v_2) = [(K_1K_2 - K_0K_4)(M_1K_3 + M_2K_5) - (K_1K_4 + K_0K_2)(M_1K_5 - M_2K_3)] \times (M_1K_2 + M_2K_4)^{-1}, \quad (18)$$

$$a_{2,2}^2(v_2) = [(K_1K_2 - K_0K_4)(M_1K_3 + M_2K_5) - (K_1K_4 + K_0K_2)(M_1K_5 - M_2K_3) + (m\Omega)^2(M_1^2 + M_2^2)] \times (M_1K_2 + M_2K_4)^{-1}. \quad (19)$$

图 1 为在参数取定为 $A_0 = 1, m = 1, \Omega = 0.65, \omega = 1, v_1 = 0.1, \gamma = 0.1$ 时, 根据 (17) 式在参数空间 v_2 - a_2^2 做的示意图. 在此参数条件下, 若 (v_2, a_2^2) 的取值落入图 1 灰色区域, 则系统稳态响应振幅 A 关于 $Z_1(t)$ 的噪声强度 a_1^2 能够产生随机共振现象; 反之, 若 (v_2, a_2^2) 的取值落入图中白色区域, 则无法诱导 A 关于 a_1^2 的随机共振现象产生. 可见, 系统稳态响应振幅 A 关于质量涨落噪声 $Z_1(t)$ 的噪声强度 a_1^2 能否产生随机共振现象强烈依赖于系统参数的选取.

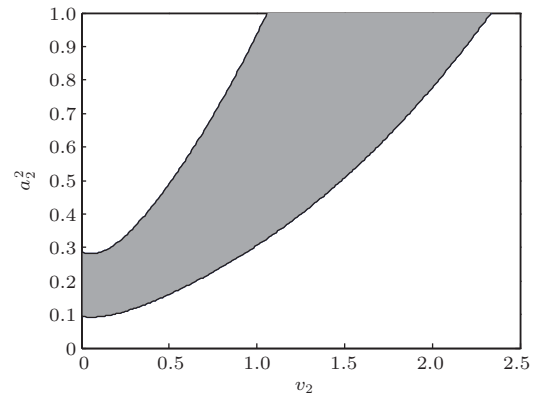


图 1 稳态响应振幅 A 关于噪声强度 a_1^2 能够产生随机共振现象的 v_2 - a_2^2 参数空间示意图. 在灰色区域取值的 (v_2, a_2^2) 能够诱导 A 关于 a_1^2 的随机共振现象产生, 其他参数取值为: $A_0 = 1, m = 1, \Omega = 0.65, \omega = 1, v_1 = 0.1, \gamma = 0.1$

图 2 绘制了和图 1 相同参数条件下 a_1^2 - A 的变化曲线. 特别地, 当频率涨落噪声 $Z_2(t)$ 的噪声相

关率 $v_2 = 1$ 时, 根据边界曲线 (18) 和 (19) 式可以给出噪声强度 a_2^2 在 $0.306 < a_2^2 < 0.936$ 范围内时, a_1^2 - A 能够出现共振峰, 即此时能够诱导系统产生随机共振现象. 从图 2 可以看出, 在此参数组合下, 当 $a_2^2 = 0.6$ 时, 响应曲线 a_1^2 - A 表现出明显的共振峰, 即系统出现随机共振现象; 当 $a_2^2 = 0.3$ 和 $a_2^2 = 0.95$ 时, 响应曲线 a_1^2 - A 的共振峰消失, 此时系统不能产生随机共振现象.

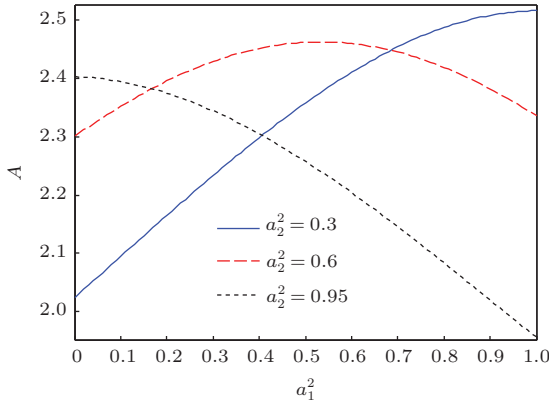


图 2 系统稳态响应振幅 A 随噪声强度 a_1^2 的变化曲线
其他参数取值为: $A_0 = 1, m = 1, \Omega = 0.65, \omega = 1,$
 $v_1 = 0.1, \gamma = 0.1, v_2 = 1$

4.2 系统稳态响应振幅 A 关于噪声强度 a_2^2 的随机共振现象

类似于 4.1 节的讨论, 系统稳态响应振幅 A 关于频率涨落噪声 $Z_2(t)$ 的噪声强度 a_2^2 能够产生随机共振现象强烈依赖于系统参数的选取. 若考虑 A 作为 a_2^2 的一元函数, 根据 (14) 式, 系统稳态响应振幅 $A(a_2^2)$ 在 $a_{2,m}^2$ 处取得极大值,

$$a_{2,m}^2 = [(K_1K_2 - K_0K_4)(K_2K_3 + K_4K_5) + (K_1K_4 + K_0K_2)(K_3K_4 - K_2K_5) + (M_1K_2 + M_2K_4)\Omega^2a_1^2] \times (K_2^2 + K_4^2)^{-1}. \quad (20)$$

根据 (20) 式及噪声强度 a_2^2 需满足的基本条件 (15) 式, 推导出系统稳态响应振幅 A 关于噪声 $Z_2(t)$ 的噪声强度 a_2^2 能够产生随机共振现象的充分必要条件为

$$0 < a_{2,m}^2 < a_{2,cr}^2. \quad (21)$$

同样, 根据 (20) 和 (21) 式, 在固定参数 $A_0, m, \Omega, \omega, v_2, \gamma$ 取值情形下, 我们给出 A 关于 a_2^2 能够产生随机共振现象参数区域的边界曲线 $a_{1,1}^2(v_1)$ 和

$a_{1,2}^2(v_1)$ 为

$$a_{1,1}^2(v_1) = [(K_0K_4 - K_1K_2)(K_3K_2 + K_5K_4) - (K_1K_4 + K_0K_2)(K_3K_4 - K_2K_5)] \times [\Omega^2(M_1K_2 + M_2K_4)]^{-1}, \quad (22)$$

$$a_{1,2}^2(v_1) = [\omega^2(K_2^2 + K_4^2)(mv_2^2 + \gamma v_2 + \omega^2) - (K_1K_2 - K_0K_4)(K_2K_3 + K_4K_5) - (K_1K_4 + K_0K_2)(K_3K_4 - K_2K_5)] \times [\Omega^2(M_1K_2 + M_2K_4)]^{-1}. \quad (23)$$

图 3 给出的是在参数取定为 $A_0 = 1, m = 2, \Omega = 1.2, \omega = 1, v_2 = 0.5, \gamma = 0.1$, 根据 (21) 式在参数空间 v_1 - a_1^2 所做的示意图. 在此参数条件下, 若 (v_1, a_1^2) 的取值落入图 3 灰色区域, 则系统稳态响应振幅 A 关于 $Z_2(t)$ 的噪声强度 a_2^2 能够诱导系统产生随机共振现象; 反之, 若 (v_1, a_1^2) 的取值落入图中白色区域则无法诱导 A 关于 a_2^2 的随机共振现象产生.

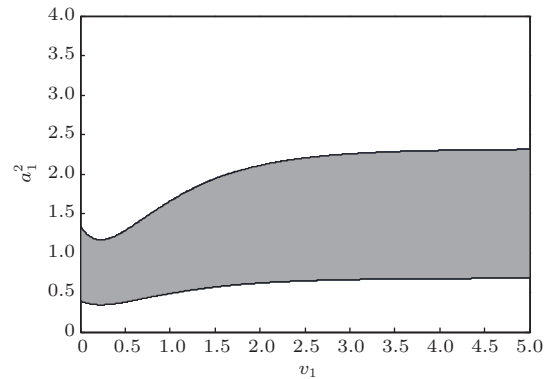


图 3 稳态响应振幅 A 关于噪声强度 a_2^2 能够产生随机共振现象的 v_1 - a_1^2 参数空间示意图 在灰色区域取值的 (v_1, a_1^2) 能够诱导 A 关于 a_2^2 的随机共振现象产生, 其他参数取值为: $A_0 = 1, m = 2, \Omega = 1.2, \omega = 1, v_2 = 0.5, \gamma = 0.1$

图 4 绘制了和图 3 相同参数下系统稳态响应振幅 A 关于噪声强度 a_2^2 的变化曲线. 特别地, 当质量涨落噪声 $Z_1(t)$ 的噪声相关率 $v_1 = 2.5$ 时, 利用 (22) 和 (23) 式可以给出 a_2^2 - A 能够出现共振峰曲线时噪声强度 a_1^2 应满足的取值范围为 $0.6493 < a_1^2 < 2.2023$. 如图 4 所示, 在此参数组合下, 当噪声强度 $a_1^2 = 1.5$ 时 (图 4 (b)), 响应曲线 a_2^2 - A 有明显的共振峰, 即系统产生随机共振现象; 而当噪声强度为 $a_1^2 = 0.6$ 和 $a_1^2 = 2.3$ 时 (图 4 (a),(c)), 响应曲线 a_2^2 - A 严格单调变化, 即此参数组合不能诱导系统产生随机共振现象.

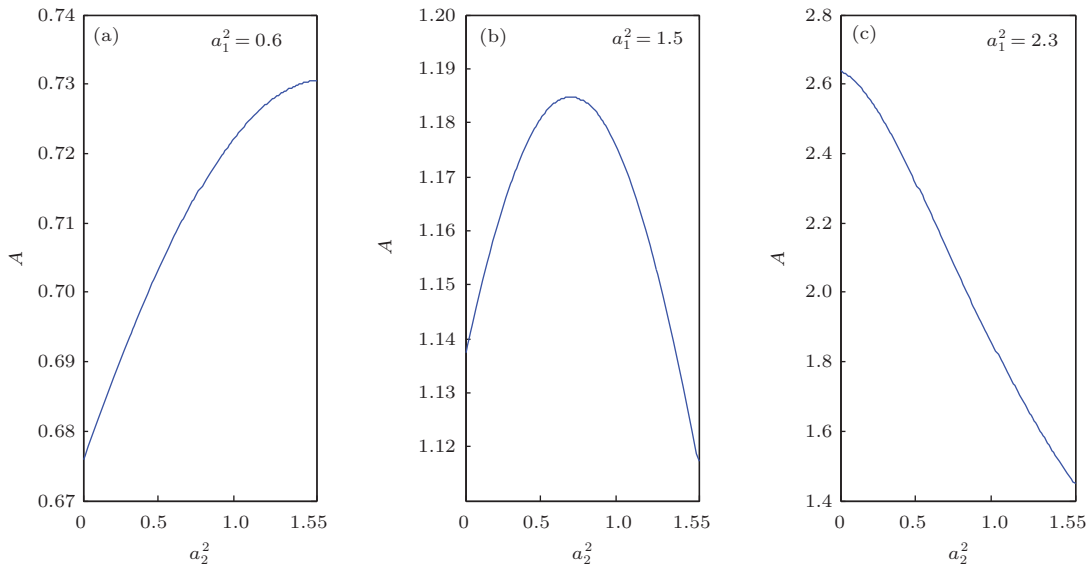


图4 稳态响应振幅 A 随噪声强度 a_2^2 的变化曲线 其他参数取值为: $A_0 = 1, m = 2, \Omega = 1.2, \omega = 1, v_2 = 0.5, \gamma = 0.1, v_1 = 2.5$; (a) $a_1^2 = 0.6$; (b) $a_1^2 = 1.5$; (c) $a_1^2 = 2.3$

5 结 论

本文在具有频率涨落噪声的线性谐振子的基础上, 考虑布朗粒子处于具有吸附能力的复杂环境时, 环境介质分子对布朗粒子的随机吸附使得粒子具有涨落质量, 建立了具有质量及频率涨落噪声的二阶欠阻尼线性谐振子随机共振模型, 并推导出系统响应的一阶稳态矩和稳态响应振幅的解析表达式. 本文基于系统稳态响应振幅的解析表达式, 深入研究并给出了稳态响应振幅关于质量及频率涨落噪声的噪声强度能够诱导系统产生随机共振现象的充分必要条件 (17) 和 (21) 式. 仿真实验表明, 当选定系统参数取值满足本文所给出的充分必要条件时, 系统稳态响应振幅关于噪声强度的变化曲线具有明显的共振峰, 即此选定参数组合能够诱导该系统产生随机共振现象. 本文的研究为该模型的后续生物、化学及工程相关应用提供了坚实的理论依据.

参考文献

[1] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A 1981 *J. Phys. A* **14** L453
 [2] Benzi R, Parisi G, Sutera A, Vulpiani A 1982 *Tellus* **34** 10
 [3] Benzi R 2010 *Nonlinear Proc. Geophys.* **17** 431
 [4] Gammaitoni L, Hänggi P, Jung P, Marchesoni F 2009 *Eur. Phys. J. B* **69** 1
 [5] McDonnell M D, Abbott D 2009 *PLoS Comput. Biol.* **5** e1000348

[6] Wellens T, Shatokhin V, Buchleitner A 2004 *Rep. Prog. Phys.* **67** 45
 [7] Hänggi P, Jung P, Zerbe C, Moss F 1993 *J. Stat. Phys.* **70** 25
 [8] Gammaitoni L, Hänggi P, Jung P, Marchesoni F 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223
 [9] McNamara B, Wiesenfeld K 1989 *Phys. Rev. A* **39** 4854
 [10] Fox R F 1989 *Phys. Rev. A* **39** 4148
 [11] Li J H, Han Y X 2006 *Phys. Rev. E* **74** 051115
 [12] Gitterman M 2004 *Phys. Rev. E* **69** 041101
 [13] Berdichevsky V, Gitterman M 1996 *Europhys. Lett.* **36** 161
 [14] Berdichevsky V, Gitterman M 1999 *Phys. Rev. E* **60** 1494
 [15] Gitterman M 2005 *Physica A* **352** 309
 [16] Zhang L Y, Jin G X, Cao L, Wang Z Y 2012 *Chin. Phys. B* **21** 120502
 [17] Zhang L, Liu L, Cao L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1494 (in Chinese) [张莉, 刘立, 曹力 2010 物理学报 **59** 1494]
 [18] Lin L F, Tian Y, Ma H 2014 *Chin. Phys. B* **23** 080503
 [19] Guo L M, Xu W, Ruan C L, Zhao Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7482 (in Chinese) [郭立敏, 徐伟, 阮春雷, 赵燕 2008 物理学报 **57** 7482]
 [20] Goldhirsch I, Zanetti G 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 1619
 [21] Blum J, Wurm G, Kempf S, Poppe T 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 2426
 [22] Gitterman M, Shapiro I 2011 *J. Stat. Phys.* **144** 139
 [23] Yu T, Zhang L, Luo M K 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 120504 (in Chinese) [蔚涛, 张路, 罗懋康 2013 物理学报 **62** 120504]
 [24] Laas K, Mankin R, Reiter E 2011 *Int. J. Mathemat. Models and Methods in Appl. Sci.* **5** 281
 [25] Bena I, Broeck C V D, Kawai R, Lindenberg K 2002 *Phys. Rev. E* **66** 045603
 [26] Laio F, Ridolfi L, Odorico P D 2008 *Phys. Rev. E* **78** 031137
 [27] Bena I 2006 *Int. J. Mod. Phys. B* **20** 2825
 [28] Shapiro V E, Loginov V M 1978 *Physica A* **91** 563

[29] Oppenheim A V, Willsky A S, Nawab S H (Translated by Liu S T) 2005 *Signals and Systems* (9th Ed.) (Xi'an: Prentice Hall) pp128, 471, 497–500 (in Chinese) [奥本海姆 A V 等著, 刘树棠 译 2005 信号与系统(第九版) (西安:

西安交通大学出版社) 第 128, 471, 497—500 页]

[30] Laas K, Mankin R, Rekker A 2009 *Phys. Rev. E* **79** 051128

Stochastic resonance of an underdamped linear harmonic oscillator with fluctuating mass and fluctuating frequency*

Zhong Su-Chuan¹⁾ Yu Tao²⁾ Zhang Lu²⁾ Ma Hong²⁾†

1) (*College of Aeronautics and Astronautics, Sichuan University, Chengdu 610064, China*)

2) (*College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China*)

(Received 12 August 2014; revised manuscript received 8 September 2014)

Abstract

When Brownian particle moves in a viscoelastic medium, the surrounding molecules not only collide with the Brownian particle but also adhere to the Brownian particle randomly, thereby changing the mass of the Brownian particle. We investigate the stochastic resonance phenomenon in an underdamped linear harmonic oscillator with fluctuating mass and fluctuating frequency under an external periodic force. The exact expressions of the first moment and the amplitude of the output signal are obtained by using the Shapiro-Logvinov formula and the Laplace transform technique. We establish the necessary and sufficient conditions for the emergence of the stochastic resonance phenomenon induced by the mass fluctuation noise intensity and frequency fluctuation noise intensity. Furthermore, based on the necessary and sufficient conditions, the output amplitude shows a non-monotonic dependence on the noise intensity, which means that the stochastic resonance phenomenon happens.

Keywords: mass fluctuation noise, frequency fluctuation noise, stochastic resonance, underdamped linear harmonic oscillator

PACS: 02.50.-r, 05.40.-a, 05.40.Ca

DOI: 10.7498/aps.64.020202

* Project supported by the Key Program of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11171238), National Natural Science Foundation for the Youth (Grant No. 11401405) and the Young Teacher Fund of Sichuan University, China (Grant No. 2082604174031).

† Corresponding author. E-mail: mahong@scu.edu.cn