

光学频率梳基于光谱干涉实现绝对距离测量

吴翰钟 曹士英 张福民 曲兴华

Spectral interferometry based absolute distance measurement using frequency comb

Wu Han-Zhong Cao Shi-Ying Zhang Fu-Min Qu Xing-Hua

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 020601 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.020601

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.020601>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I2>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

不同入射脉冲强度线性啁啾对 BaF<sub>2</sub> 晶体交叉偏振波输出特性影响的数值模拟研究

Investigation on the influences of linear chirp with different input pulse intensities on BaF<sub>2</sub> cross-polarized wave generation

物理学报.2015, 64(2): 020602 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.020602>

基于二次偏振调制的变频测距方法与系统实现

Variable frequency range finding technology based on double polarization modulation method and system implementation

物理学报.2014, 63(10): 100602 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.100602>

飞秒光频梳的任意长绝对测距

Arbitrary and absolute length measurement based on femtosecond optical frequency comb

物理学报.2013, 62(17): 170603 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.170603>

一种双光梳多外差大尺寸高精度绝对测距新方法的理论分析

Analysis of an innovative method for large-scale high-precision absolute distance measurement based on multi-heterodyne interference of dual optical frequency combs

物理学报.2013, 62(7): 070601 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.070601>

利用光频梳提高台阶高度测量准确度的方法

Method for improving the accuracy of step height measurement based on optical frequency comb

物理学报.2012, 61(10): 100601 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.100601>

## 光学频率梳基于光谱干涉实现绝对距离测量\*

吴翰钟<sup>1)</sup> 曹士英<sup>2)</sup> 张福民<sup>1)†</sup> 曲兴华<sup>1)</sup>

1)(天津大学精密测试技术及仪器国家重点实验室, 天津 300072)

2)(中国计量科学研究院时间频率计量研究所, 北京 100013)

(2014年8月15日收到; 2014年9月5日收到修改稿)

详细分析了光学频率梳光谱干涉的原理, 建立了较全面的光谱干涉的数学模型, 为实现绝对距离测量提供理论分析基础. 基于光谱干涉, 指出通过光谱干涉条纹的振荡频率, 即一次傅里叶变换, 可以实现绝对距离测量, 数值模拟结果表明, 最大测量误差为1.5 nm; 提出了一种等效的多波长并行零差干涉的方法, 分析了多波长并行零差干涉法的测距原理. 数值模拟结果表明, 多波长并行零差干涉法的最大误差为8.7 nm; 通过脉冲啁啾实现绝对测距, 分析了基于脉冲啁啾实现绝对测距的原理, 数值模拟结果表明, 最大测距误差为5.3 nm.

关键词: 光学频率梳, 绝对测距, 光谱干涉

PACS: 06.30.Bp, 06.60.Jn, 42.25.Hz, 42.62.Eh

DOI: 10.7498/aps.64.020601

## 1 引言

高精度的绝对距离测量技术在科学研究和工业生产中都发挥着重要的作用. 1983年, 真空中的光速被精确定义为 $299792458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , 十七届国际计量大会定义1 m为真空中光在 $1/299792458 \text{ s}$ 内行进路径的长度, 实现了长度单位和时间单位的统一. 这样, 时间频率的精确度决定了长度计量的精确度. 目前, 铯原子钟的精度已经达到了 $10^{-15}$ 量级. 光学频率梳(光梳)实现了微波频标和光学频标的连接: 时域内, 光梳是一个连续的脉冲序列; 频域内, 光梳是一连串等间隔的单独的纵模. 第 $m$ 个纵模的频率可以表示为 $\omega_m = m\omega_r + \omega$ ,  $\omega_r$ 是光梳的重复频率,  $\omega_0$ 是光梳的初始偏移频率. 可以看出, 当把重复频率和初始偏移频率锁定到一个外部频率源(如铯原子钟)时, 光梳包含的每一个纵模的频率就被精确地锁定了, 即每一个纵模的频率都有着与外部频率源一样的精确度. 人们可以利用光梳来进行高精度的频率、振动以及距离等的绝对

测量<sup>[1-5]</sup>.

2000年, Minoshima和Matsumoto<sup>[6]</sup>采用锁模飞秒激光在240 m的广阔范围内实现了绝对测距, 测距精度为 $8 \mu\text{m}$ . 之后, 科学家们提出了各种各样的基于光梳的绝对距离测量的方法. 按照光梳的工作模式, 这些方法可以分为光梳作为参考光源和光梳作为测距光源两种. 作为参考光源, 光梳可以用于锁定一个或多个连续波激光器<sup>[7,8]</sup>, 但是连续激光测距的非歧义范围仅为波长的 $1/2$ , 多波长干涉的方法可以拓宽非歧义范围<sup>[9,10]</sup>, 但是这需要至少三个光源(两个连续波光源和一台光梳), 系统复杂且价格昂贵.

光梳可以直接作为测距光源进行绝对距离测量, 时域内, 基于脉冲互相关的时间飞行法<sup>[11]</sup>和外差干涉法<sup>[12]</sup>可以实现大范围的绝对测距, 但是这需要高精度地确定脉冲互相关条纹的精确位置. 即其峰值位置. 而传统的光电探测设备无法精确地测定脉冲互相关条纹的精确位置, 误差为约 $1 \mu\text{m}$ . 固定相的方法可以解决这一问题, 使得脉冲精确位置测量的不确定度为约 $10 \text{ nm}$ <sup>[13]</sup>. 然而, 对于基于脉

\* 国家自然科学基金(批准号: 51327006, 51105274)和高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 20120032130002)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zhangfumin@tju.edu.cn

冲互相关的方法需要脉冲在空间叠加, 这使得被测距离只能是脉冲间距的整数倍或附近几十微米<sup>[14]</sup>. 理论上, 提高光梳的重复频率, 缩小脉冲间距, 增加干涉仪参考臂的扫描长度(迈克耳孙干涉仪中, 扫描长度需大于 $l_{pp}/4$ ,  $l_{pp}$ 为脉冲间距), 可以实现任意距离的测量. 双光梳的时间飞行法可以高精度高效率地实现任意测距<sup>[15-17]</sup>. 频域内, 光谱干涉法能够高精度地实现绝对测距<sup>[18-20]</sup>, 但是光谱探测设备的精度对测距结果有较大影响. 由于传统的光谱干涉法需要两次傅里叶变换, 数据处理算法的性能也会对测距结果有较大影响.

本文详细分析了光谱干涉的原理, 建立了光谱干涉的较为全面的数学模型. 基于迈克耳孙干涉仪采集光谱干涉信号. 通过光谱干涉条纹的振荡频率, 经过一次傅里叶变换, 直接测得测量脉冲与参考脉冲的飞行时间差; 频域内, 将每个纵模看成一个等效的连续波激光器, 提出了基于两个相近纵模的相位实现绝对测距的方法; 提出了基于脉冲线性啁啾的绝对测距的方法. 进行了大量的数值模拟, 模拟结果表明, 本文提出的方法可以实现绝对距离测量.

## 2 光谱干涉原理

图1为本文测距实验原理图. 光梳发出一串连续的脉冲光, 其在分束器处分为两束光, 一束进入参考臂, 在参考镜处被反射, 为参考脉冲光; 一束进入测量臂, 在目标镜处被反射, 为测量脉冲光; 最后两束被反射的光射入光谱仪, 光谱发生相干干涉, 观察到光谱干涉条纹. 光梳的中心角频率为 $\omega_c$ , 记参考脉冲光为 $E_{ref}(t)$ , 对应光谱为 $E_{ref}(\omega)$ ; 测量脉冲光为 $E_{pro}(t)$ , 对应光谱为 $E_{pro}(\omega)$ ;  $L$ 为被测距离.

假设光梳发出的脉冲为理想高斯脉冲, 则其光谱为理想高斯光谱, 记为 $E(\omega)$ , 进而参考脉冲的光谱可以表示为

$$E_{ref}(\omega) = \alpha E(\omega). \quad (1)$$

测量脉冲的光谱则可以表示为

$$E_{pro}(\omega) = \beta E(\omega) \exp(-i\tau\omega), \quad (2)$$

其中,  $\alpha$ 和 $\beta$ 为参考脉冲与测量脉冲的功率因子, 参考脉冲与测量脉冲的功率比为 $\alpha^2/\beta^2$ ,  $\alpha < 1$ ,  $\beta < 1$ . 理想情况下, 迈克耳孙干涉系统中, 光谱仪

探测到的参考脉冲与测量脉冲的功率是严格相等的. 但是实际应用中, 参考脉冲与测量脉冲的功率很难相等, 引入参数 $\alpha$ 和 $\beta$ , 以区分参考脉冲与测量脉冲的功率.

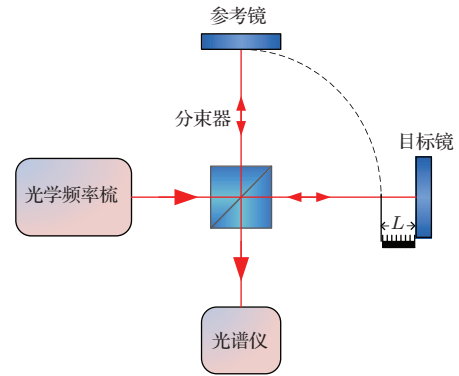


图1 实验原理

参考脉冲的光谱与测量脉冲的光谱发生干涉, 光谱仪探测到的光谱强度可以表示为

$$\begin{aligned} I(\omega) &= (E_{ref}(\omega) + E_{pro}(\omega))^2 \\ &= \left\langle (E_{ref}(\omega) + E_{pro}(\omega)) \right. \\ &\quad \left. \times (E_{ref}(\omega) + E_{pro}(\omega))^* \right\rangle \\ &= |E_{ref}(\omega)|^2 + |E_{pro}(\omega)|^2 \\ &\quad + 2\text{Re}[E_{ref}(\omega) E_{pro}^*(\omega)] \\ &= E^2(\omega) [\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \cos(\tau\omega)] \\ &= E^2(\omega) [\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \cos(2k(\omega)L)], \end{aligned} \quad (3)$$

其中,  $k(\omega) = n(\omega) \omega/c$ .

将 $k$ 在中心角频率 $\omega_c$ 处展开成泰勒级数:

$$\begin{aligned} k(\omega) &= k(\omega_c) + k'(\omega_c)(\omega - \omega_c) \\ &\quad + \frac{1}{2}k''(\omega_c)(\omega - \omega_c)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{1}{m!}k^{(m)}(\omega_c)(\omega - \omega_c)^m, \end{aligned} \quad (4)$$

其中,

$$\begin{aligned} k' &= \frac{n(\lambda_c)}{c} - \frac{\lambda_c}{c} \frac{\partial n}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_c}, \\ k'' &= \frac{\lambda_c^3}{2\pi c^2} \frac{\partial^2 n}{\partial \lambda^2} \Big|_{\lambda=\lambda_c}. \end{aligned}$$

将(4)式代入(3)式, (3)式可以重写成

$$\begin{aligned} I(\omega) &= E^2(\omega) \left\{ \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \cos \left[ 2L \left( \frac{1}{2}k''\omega^2 \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + (k' - k''\omega_c)\omega + k(\omega_c) \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\left. - k' \omega_c + \frac{1}{2} k'' \omega_c^2 \right) \Bigg\}. \quad (5)$$

(5)式是光谱干涉条纹的原理表达式,可以看出,光谱强度是由直流项和交流项构成的.直流项的强度等于光梳光谱强度的 $\alpha^2 + \beta^2$ 倍.

考虑整体光谱干涉强度,令

$$\chi = \frac{1}{2} k'' \omega^2 + (k' - k'' \omega_c) \omega + k(\omega_c) - k' \omega_c + \frac{1}{2} k'' \omega_c^2,$$

有

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta &\leq \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \cos(L\chi) \\ &\leq \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta, \end{aligned} \quad (6)$$

化简可得

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)^2 &\leq \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \cos(2L\chi) \\ &\leq (\alpha + \beta)^2. \end{aligned} \quad (7)$$

由(7)式可得,当且仅当 $\alpha = \beta$ 时,光谱干涉条纹可以振荡到零.但是实际系统中,很难保证参考脉冲与测量脉冲的功率严格相等,所以光谱干涉条纹一般不会振荡到零.

考虑(5)式中余弦函数的相位 $\chi$ ,可以看出, $\chi$ 是以 $\omega$ 为自变量的二次函数,对于一个给定的被测距离 $L$ , $Lk''$ 为二次项系数, $2L(k' - k''\omega_c)$ 为一次项系数, $2L\left(k(\omega_c) - k'\omega_c + \frac{1}{2}k''\omega_c^2\right)$ 为余弦函数的初始相位.对 $\chi$ 求导 $\partial\chi/\partial\omega$ ,有

$$\chi' = k''\omega + k' - k''\omega_c. \quad (8)$$

当(8)式等于0时,有

$$\omega = \omega_s = \omega_c - \frac{k'}{k''}. \quad (9)$$

由(4)式可知, $k'$ 和 $k''$ 表征了波数 $k$ 与 $\omega$ 的关系,实质上, $k'$ 和 $k''$ 表征了介质折射率 $n(\lambda)$ 与波长 $\lambda$ 的关系.由(9)式可知,当传播介质以及环境条件一定时,存在一个固定的角频率 $\omega_s$ ,当角频率等于 $\omega_s$ 时, $\chi$ 取到极小值,在极小值处,余弦函数振荡最慢,而这个最小振荡频率与被测距离 $L$ 是成正比的.

考虑脉冲在较低色散介质(比如空气)中传播,即折射率随波长变化不显著,这种情况下, $k''$ 的量级为约 $10^{-29}$ 到 $10^{-30}$ , $k'$ 的量级为约 $10^{-9}$ .可以看出, $k' \gg k''$ .进而,忽略包含 $k''$ 的项, $\chi$ 可以重写为

$$\chi = k'\omega + k(\omega_c) - k'\omega_c. \quad (10)$$

(5)式中的干涉项(交流项)可以重写为

$$\begin{aligned} I_{\text{int}}(\omega) &\propto \cos(2L\chi) \\ &= \cos[2L(k'\omega + k(\omega_c) - k'\omega_c)]. \end{aligned} \quad (11)$$

可以看出,干涉项的振荡频率等于 $2Lk'$ ,也就是说,当 $k'$ 为一个固定值时,干涉项的振荡频率与 $L$ 成正比.

在这一部分,我们详细分析了光谱干涉的原理,忽略了光学器件的色散.(5)式为光谱干涉条纹的理论表达式,考虑了参考脉冲与测量脉冲的功率比和介质的色散.参考脉冲与测量脉冲的功率比和色散决定了光谱干涉条纹的形状.理论分析表明,当参考脉冲与测量脉冲的功率相等时,光谱干涉条纹可以振荡到强度为零;我们指出,当介质色散较大时,干涉项的振荡频率会有明显的变化,存在一个固定角频率,使得振荡频率最低,这个最低振荡频率与被测距离 $L$ 成正比.当介质色散较小时,干涉项的振荡频率较为稳定,振荡频率与被测距离 $L$ 成正比.

### 3 光谱干涉的数值模拟

对光谱干涉进行了数值模拟.数值模拟中,光梳的中心波长为1560 nm,重复频率为250 MHz,初始频率偏移为0,光梳发出脉冲的半高宽为90 fs,对应的理想高斯光谱的半高宽为4.9 THz,采样点数为800000,采样率为重复频率,温度为20 °C,大气压为101.325 kPa,相对湿度为50%,CO<sub>2</sub>浓度为450 ppm(1 ppm = 10<sup>-6</sup>),采用Ciddor公式计算了不同波长对应的折射率,进而计算出 $k'$ 和 $k''$ ,在这种情况下, $k' = 3.33 \times 10^{-9}$ , $k'' = 8.13 \times 10^{-30}$ .

#### 3.1 $\alpha$ 和 $\beta$ 对光谱干涉条纹的影响

给定距离 $L$ 为0.5 mm,对不同的 $\alpha$ 和 $\beta$ 进行了数值模拟,如图2所示.其中,蓝色曲线为光梳的理想高斯光谱,红色曲线为光谱干涉条纹.

由图2可以看出, $\alpha$ 和 $\beta$ 对光谱干涉条纹的形状影响是很大的.当参考脉冲的功率与测量脉冲的功率相等时,光谱干涉条纹可以振荡到0.在 $k' = 3.33 \times 10^{-9}$ , $k'' = 8.13 \times 10^{-30}$ 的情况下,光谱的振荡频率稳定,与理论分析一致.

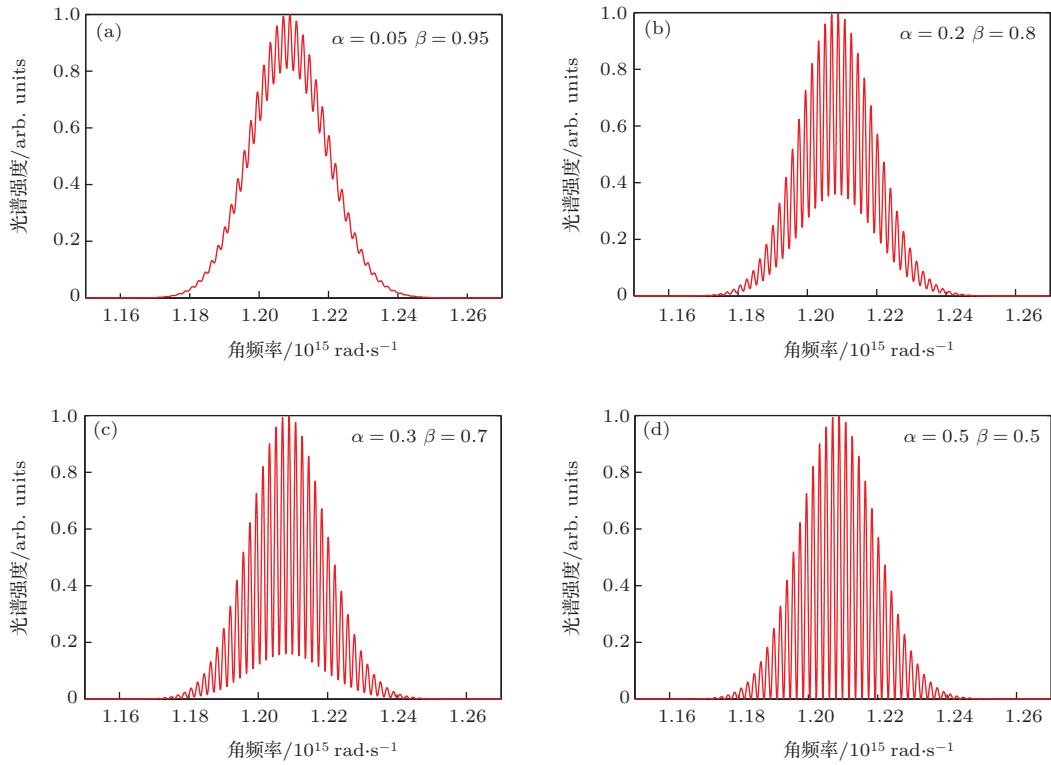


图2 不同  $\alpha$  和  $\beta$  对应的光谱干涉条纹

### 3.2 固定频率

当光梳发出的脉冲在强色散介质中传播时, 光谱的振荡频率将不会很稳定. 假设  $k' =$

$3.33 \times 10^{-9}$ ,  $k'' = 8.13 \times 10^{-20} \neq 8.13 \times 10^{-30}$ , 对不同距离  $L$  对应的光谱干涉强度的交流项进行了数值模拟, 如图3所示.

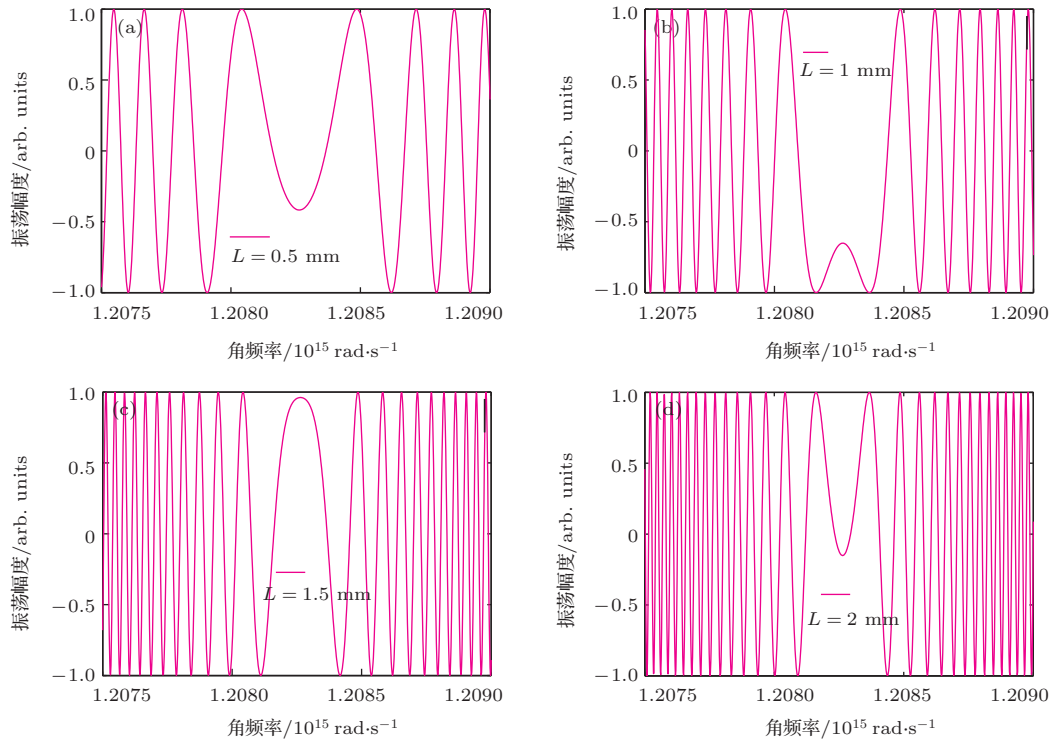


图3 不同距离对应的光谱干涉项



可以看出, 当距离变化时, 光谱干涉条纹中总有一个频率是固定的, 在这个频率处, 光谱干涉条纹振荡最慢, 与理论分析一致. 可以发现, 在固定频率处, 不同的距离对应的相位是不同的. 实际上, 我们可以通过测量固定频率的相位实现距离的测量, 理论上测距的非歧义范围为波长的1/2. 在这种情况下, 固定频率可以计算为

$$\begin{aligned} \omega_s &= \omega_c - \frac{k'}{k''} \\ &= 2 \times \pi \times \frac{c}{n(\lambda_c) \times \lambda_c} - \frac{3.33 \times 10^{-9}}{8.13 \times 10^{-20}} \\ &= 1.208 \times 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned} \quad (12)$$

#### 4 绝对距离测量的数值模拟

传统的基于光谱干涉的绝对距离测量方法, 需要经过两次傅里叶变换, 一次滤波处理, 由解卷绕光谱相位的斜率求得被测距离. 首先, 由于滤波器的引入, 滤波器的宽度不同会对测距结果产生影

响, 使得测距结果不惟一; 其次, 当被测距离很小时, 伪时域内, 三个尖峰距离太近, 而无法实现精确的滤波. 这是传统的基于光谱干涉的方法存在的两个局限性. 小波变换可以解决这两个问题. 小波变换可以从光谱干涉条纹中直接获取卷绕的光谱相位, 而无须任何滤波处理<sup>[21]</sup>. 在这一部分, 假设  $\alpha = \beta = 0.5$ ,  $k' = 3.33 \times 10^{-9}$ ,  $k'' = 8.13 \times 10^{-30}$ .

#### 4.1 通过干涉条纹的振荡频率实现绝对距离测量

由(11)式可以看出, 光谱干涉条纹的振荡频率可以表示为

$$\omega_{\text{int}} = 2Lk'. \quad (13)$$

所以, 被测距离  $L$  可以计算为

$$L = \frac{\omega_{\text{int}}}{2k'}. \quad (14)$$

图4所示分别为被测距离等于0.5, 1, 1.5和2 mm时, 对应的光谱干涉条纹.

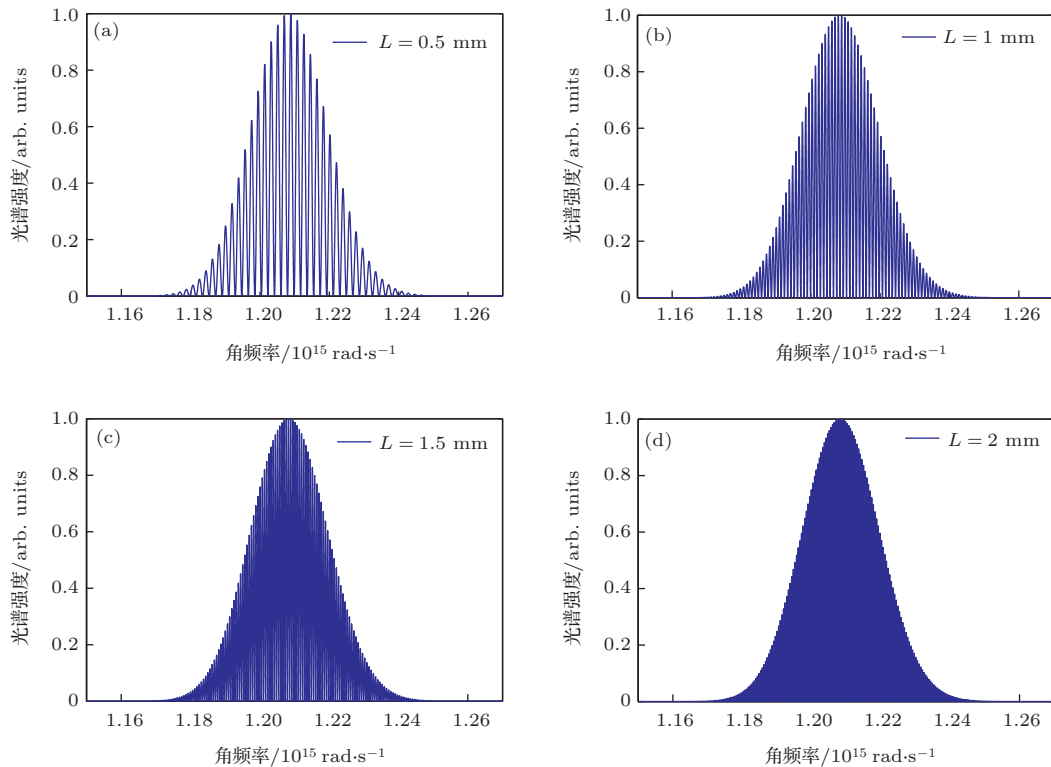


图4 不同的距离对应的光谱干涉条纹

由图4可以看出, 光谱干涉条纹的振荡频率稳定, 随着被测距离  $L$  的增加, 振荡频率增大. 为了获得光谱干涉条纹的振荡频率, 将光谱干涉条

纹进行一次快速傅里叶变换. 应该说明的是, 经过一次傅里叶变换后, 伪时域的横坐标需要严格的定义, 由于数值模拟中, 采样率为250 MHz, 采

样点数为800000, 所以伪时域内, 横轴为均匀分布在  $-1/(2 \times 250 \times 10^6)$  s 到  $1/(2 \times 250 \times 10^6)$  s 上的800000个点. 分别对图4所示的4个光谱干涉条纹进行一次傅里叶变换, 得到的伪时域信号如图5所示.

由图5可以直接看出, 在迈克耳孙干涉仪里, 0.5, 1, 1.5, 2 mm 的被测距离对应的测量脉冲与参考脉冲的飞行时间差分别为3.33, 6.668, 10, 13.33 ps. 由于软件显示的有效数字位数有限, 只能看到小数点后3位有效数字. 由(14)式可以计算出距离测量结果, 如表1所示.

可以看出, 通过对光谱干涉条纹经过一次傅里叶变换, 可以直接求得被测距离. 由表1可以看出, 在数值模拟中, 当被测距离为0.5 mm和1 mm时, 测距误差为0; 当被测距离为1.5 mm和2 mm时, 测距误差为1.5 nm, 在理想仿真情况下, 引入误差的主要原因是软件分辨率. 通过光谱干涉条纹振荡频率实现绝对距离测量方法的优点是数据处理过程仅需要一步快速傅里叶变换就可以实现绝对测距. 局限性在于当测量距离很小时, 伪时域内的三个尖峰会发生重叠, 难以分辨出峰值的精确位置.

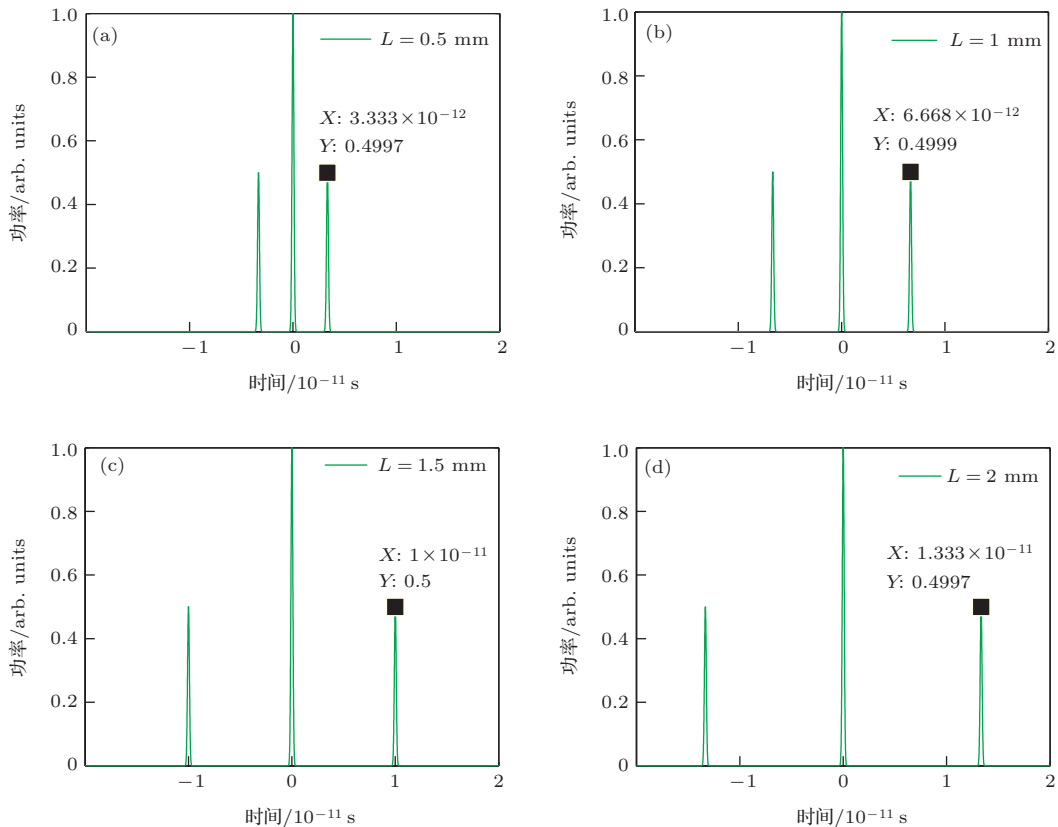


图5 不同距离对应的伪时域信号

表1 距离测量结果

真值/mm	0.5	1	1.5	2
测量结果/mm	0.5	1	1.5000015	2.0000015
测量误差/nm	0	0	1.5	1.5

### 4.2 多纵模并行零差干涉

频域内, 光梳是许多具有相等间隔的单独的纵模, 每一个纵模相当于一个连续波激光器的频谱, 所以光梳可以看作许多不同波长的连续波激光器

的集合. 当采用光梳进行绝对距离测量时, 相当于许多的连续波激光器同时测量这一距离, 所以理论上测距的精度很高.

对于一个波长为  $\lambda$  的连续的激光, 被测距离  $L$  可以表示为

$$L = \frac{1}{2}(m + e)\lambda, \quad (15)$$

其中,  $m$  是正整数,  $e$  是大于零的小数. 可见, 对于一个已知波长的连续波激光器, 只要确定了  $m$  和  $e$  两个参数, 距离  $L$  就可以确定了. 从光梳的光谱中

可以获取任意一个波长对应的初始光功率  $I_1$ , 光谱发生干涉后, 从光谱干涉条纹中可以获取该波长对应的干涉后的光功率  $I_2$ , 与传统的连续激光干涉法一样, 从干涉后的光功率可以很容易地求得波长的小数部分, 即可以求得  $e$ ,  $0 < e < 1$ . 需要指出的是, 对于连续波激光干涉测距, 干涉强度随距离变化的规律是标准的余弦规律, 所以测距的非歧义范围为波长的  $1/2$ , 容易得到  $e$  的非歧义范围为  $0$  到  $1/2$ . 可以通过微调被测距离来确定  $e$  的范围是  $[0, 1/2]$  或者  $(1/2, 1]$ . 前者表示, 被测距离的小数部分在余弦曲线的前半周期, 后者表示在后半周期. 余弦曲线的前半个周期中, 干涉强度的导数是负数, 即随着被测距离的增大, 强度是减小的, 后半周期中, 被测距离增大, 强度是增大的. 所以, 使得被测距离发生一个小的正增量, 如果干涉强度减小了, 表明被测距离的小数部分在干涉强度曲线的前半周期, 则  $e \in [0, 1/2]$ ; 如果干涉强度增大了, 则  $e \in (1/2, 1]$ . 进而,  $e$  可以表示为

$$e = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \arccos\left(\frac{2I_2}{I_1} - 1\right) & 0 < e\lambda < \lambda/2 \\ 1 - \frac{1}{2\pi} \arccos\left(\frac{2I_2}{I_1} - 1\right) & \lambda/2 < e\lambda < \lambda \end{cases} \quad (16)$$

下面讨论  $m$  的确定方法. 选择相近的两个波长  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ , 对于两个不同的波长, 同一个被测距离可以表示为

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + e_1)\lambda_1 = \frac{1}{2}(m_2 + e_2)\lambda_2. \quad (17)$$

选取波长  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ , 使得两个波长对应的波长整数部分相等, 即  $m_1 = m_2 = m$ , (17) 式可以重写为

$$L = \frac{1}{2}(m + e_1)\lambda_1 = \frac{1}{2}(m + e_2)\lambda_2. \quad (18)$$

$m$  可以计算为

$$m = \text{floor}\left(\left|\frac{e_1\lambda_1 - e_2\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\right|\right), \quad (19)$$

其中, floor 表示对  $\left|\frac{e_1\lambda_1 - e_2\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\right|$  取整. 图 4 所示分别为被测距离等于 0.5, 1, 1.5 和 2 mm 时对应的光谱干涉条纹. 采用多纵模并行零差干涉的方法分别进行距离的测量, 所选波长对和测距结果如表 2 所示. 由于可选的波长对为无穷多, 这里选择中心波长附近的一些波长对进行例证.

图 6 所示为不同的被测距离的测距误差. 由表 2 可知, 基于光谱干涉, 可以选择无穷多的波

长对根据 (16), (18) 和 (19) 式实现绝对测距. 由图 6 可以看出, 当被测距离为 1.5 mm 时, 选择波长对为 1558.784 nm 和 1558.446 nm, 最大测距误差为 8.7 nm; 当被测距离为 0.5 mm 时, 选择波长对为 1560 nm 和 1559.657 nm, 最小测距误差为 0.3 nm. 多模零差测距方法的优势是由于可选的波长对为无穷多, 所以理论上其测距精度非常高. 局限性在于在实际应用中, 很难观察到每一个模式的准确的强度, 所以难以获得每一个模式精确的相位信息, 可以多次测量求得每一个模式的平均相位.

表 2 不同距离的测距结果

被测距离 /mm	$\lambda_1$ /nm	$\lambda_2$ /nm	测距结果 /mm	测距误差 /nm
0.5	1560.000	1559.657	0.5000003	0.3
	1560.000	1559.655	0.50000098	0.98
	1560.000	1559.659	0.5000015	1.5
	1560.000	1559.653	0.5000025	2.5
	1560.000	1559.661	0.5000029	2.9
1	1559.797	1559.657	1.0000006	0.6
	1559.797	1559.655	1.00000196	1.96
	1559.797	1559.653	1.0000045	4.5
	1559.797	1559.661	1.0000058	5.8
	1559.797	1559.651	1.0000071	7.1
1.5	1558.784	1558.442	1.5000009	0.9
	1558.784	1558.444	1.5000048	4.8
	1558.784	1558.446	1.5000087	8.7
	1558.582	1558.442	1.5000009	0.9
	1558.582	1558.444	1.5000048	4.8
2	1559.392	1559.351	2.0000039	3.9
	1559.392	1559.355	2.0000065	6.5
	1558.784	1558.743	2.0000039	3.9
	1558.784	1558.748	2.0000065	6.5
	1558.177	1558.141	2.0000063	6.3

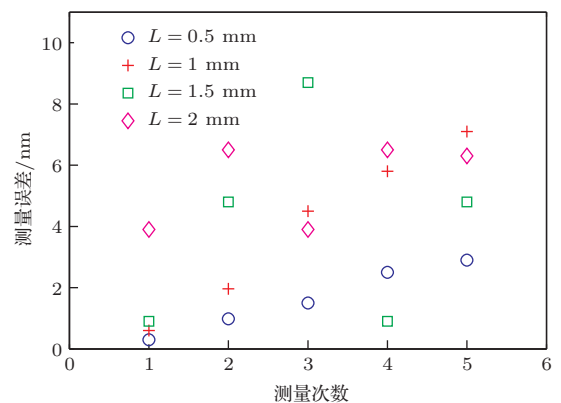


图 6 不同被测距离的测距误差



### 4.3 通过脉冲啁啾实现绝对测距

当脉冲在介质中传播时, 脉冲的中心频率会发生偏移, 为脉冲的啁啾. 当啁啾为线性啁啾时, 脉冲中心频率的偏移量与脉冲的飞行时间成正比. 所以, 理论上可以通过脉冲中心频率的偏移量测量脉冲的飞行时间, 即可以通过脉冲啁啾实现绝对测距. 图7所示为基于脉冲啁啾的绝对距离测量原理示意图.

在时域和频域内, 光梳可以表示为

$$E(t) = E_0 \exp(-at^2) \exp(-i\omega_c t + i\varphi_0 + i\varphi_{ce}t) \otimes \sum \delta(t - mT_r), \quad (20)$$

$$E(\omega) = E_0 \exp[-r(\omega - \omega_c)^2] \times \sum \delta(\omega - q\omega_r - \omega_0), \quad (21)$$

其中,  $E_0$  为振幅,  $a = 2\ln 2/\tau_0^2$ ,  $\tau_0$  为高斯脉冲的半高宽,  $\omega_c$  为光梳的中心角频率,  $\varphi_0$  为光波的初始相位,  $\varphi_{ce}$  是由于脉冲群速度和相速度差异引起的相位漂移,  $m$  是一个整数,  $T_r$  是脉冲的周期;  $r = 2\ln 2/v_0^2$ ,  $v_0$  为高斯光谱的半高宽;  $q$  是一个整数,  $\omega_r$  是重复频率,  $\omega_0$  是初始频率偏移;  $\omega_r = 2\pi/T_r$ ,  $\omega_0 = \Delta\varphi_{ce}\omega_r/2\pi$ ; 对于高斯模型,  $\tau_0 v_0 = 0.441$ .

为了方便理论分析, 假设光波的初始相位为0, 光梳的初始频率偏移为0, 则光梳的一个脉冲可以表示为

$$E(t) = E_0 \exp(-at^2) \exp(-i\omega_c t). \quad (22)$$

进而, 参考脉冲可以表示为

$$E_{\text{ref}}(t) = \alpha E_0 \exp(-at^2) \exp(-i\omega_c t). \quad (23)$$

使测量脉冲经过一对色散光栅, 则啁啾后的测量脉冲可以表示为

$$E_{\text{pro}}(t) = \beta E_0 \exp[-a_1(t - \tau)^2] \times \exp[-i(\omega_c + b(t - \tau))(t - \tau)] \\ = \beta E_0 \exp[-a_1(t - \tau)^2] \exp[-i\omega_c(t - \tau)] \\ \times \exp[-ib(t - \tau)^2], \quad (24)$$

其中,  $a_1 = 2\ln 2/\tau_1^2$ ,  $\tau_1$  为啁啾后的脉冲宽度,  $b$  是脉冲的中心频率啁啾系数, 这里假设啁啾为随时间变化的线性啁啾,  $\tau$  是测量脉冲和参考脉冲的飞行时间延迟,  $\tau = 2L/c_n$ ,  $c_n$  是脉冲在空气中的群速

度. 对(23)和(24)式进行傅里叶变换, 有

$$E_{\text{ref}}(\omega) = \frac{\alpha E_0}{\sqrt{2a}} \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_c)^2}{4a}\right], \quad (25)$$

$$E_{\text{pro}}(\omega) \\ = \frac{\beta E_0}{\sqrt{2(a_1 + ib)}} \\ \times \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_c)^2 + 4\tau\omega(b - ia_1)}{4(a_1 + ib)}\right]. \quad (26)$$

将(25)和(26)式代入(3)式, 余弦干涉项的相位函数可以表示为

$$\phi(\omega) = \frac{b(\omega - \omega_c)^2}{4(a_1^2 + b^2)} - \tau\omega - \frac{1}{2} \arg(a_1 + ib). \quad (27)$$

与(3)式相比, (27)式表示的干涉项相位函数考虑了啁啾系数  $b$ , 可以看出, 当  $b$  为0时, (27)式与(3)式中的干涉项相位函数相同, 都为  $\tau\omega$ . (27)式表示的相位函数不再是稳定的一次函数, 即余弦函数的振荡频率随着角频率的变化而变化. 对(27)式求导, 可以求得振荡频率的极小值, 在极小值处, 振荡频率最低; 从光谱干涉条纹上观察, 在极小值处, 振荡条纹最宽. 有

$$\frac{\partial\phi(\omega)}{\partial\omega} = \frac{2b(\omega - \omega_c)}{4(a_1^2 + b^2)} - \tau = 0. \quad (28)$$

进而, 极小值处的频率可以表示为

$$\omega_b = \omega_c + 2b\tau + \frac{2a_1^2\tau}{b} \approx \omega_c + 2b\tau = \omega_c + \frac{4bn_g L}{c} \\ b \gg a_1, \quad (29)$$

其中,  $c$  是光在空气中的传播速度,  $n_g$  是脉冲的群折射率. 则被测距离  $L$  可以表示为

$$L = \frac{c}{4n_g b} (\omega_b - \omega_c) = \frac{c\Delta\omega}{4n_g b} \quad b \gg a_1. \quad (30)$$

由(30)式可以看出, 当啁啾系数  $b$  远远大于脉冲的幅度衰减因子  $a_1$  时, 由脉冲啁啾引起的中心频率偏移量  $\Delta\omega$  可以测得被测距离  $L$ .

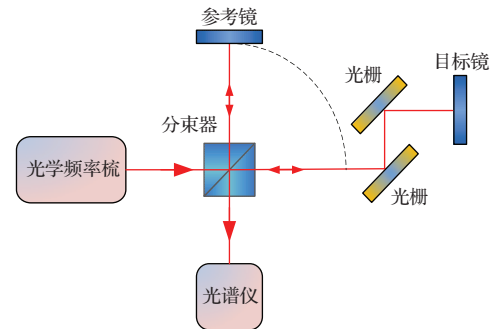


图7 基于脉冲啁啾的绝对距离测量原理示意图

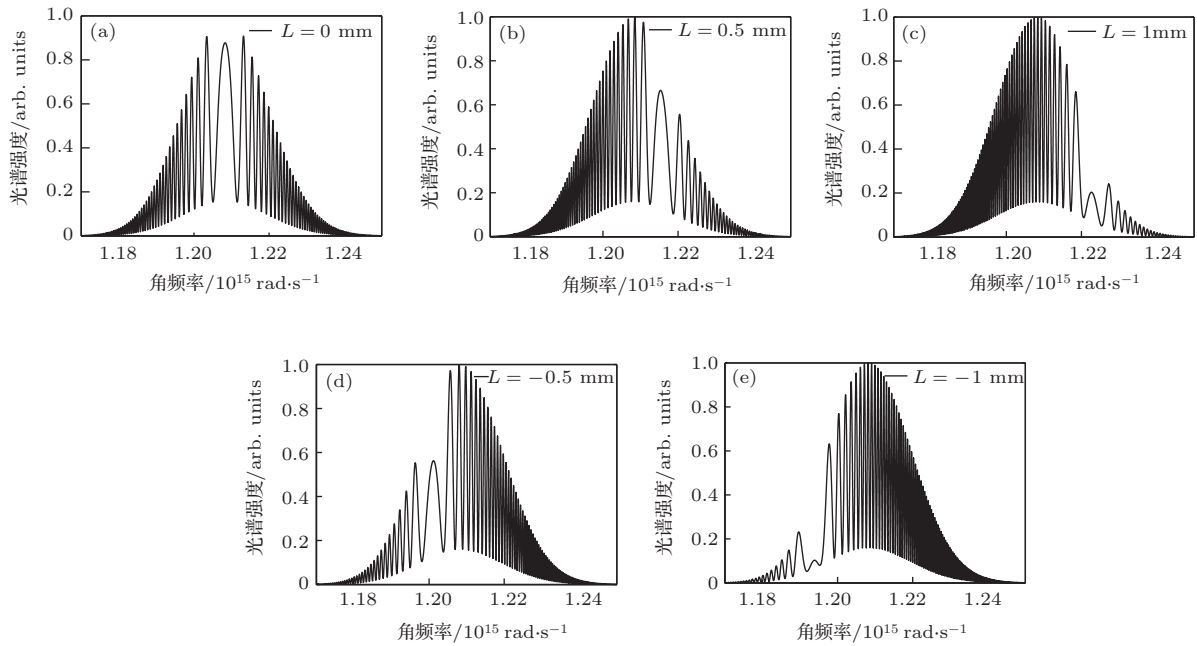


图8 考虑啁啾后不同距离对应的光谱干涉条纹

图8所示为考虑啁啾后,不同距离对应的光谱干涉条纹.其中,光梳中心波长为1560 nm,中心角频率为 $1.208 \times 10^{15} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ,啁啾系数为 $1.1 \times 10^{24} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ,光梳发出的脉冲脉宽为90 fs,对应的光谱宽度为4.9 THz,啁啾后的脉冲宽度为25 ps,即 $a_1 = 2.2 \times 10^{21}$ .被测距离分别为0, 0.5, 1, -0.5, -1 mm.

距,也可以分辨出测量脉冲相对参考脉冲的飞行时间是提前还是滞后.图9所示为当被测距离在-1.5—1.5 mm闭区间内变化时,最宽条纹的位置随被测距离的变化.可以看出,最宽条纹的位置平移,即中心波长的偏移量与被测距离的关系是线性关系.图10所示不同被测距离对应的测距误差.

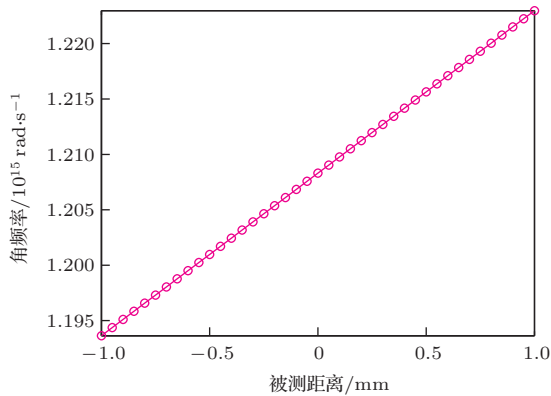


图9 中心频率偏移量与被测距离的关系

由图8(a)可以看出,当被测距离为0时,光谱干涉条纹中“最宽”条纹,即振荡频率最慢的条纹位于光梳的中心频率处.当被测距离为正时,最宽条纹的位置向条纹右侧平移,当被测距离为负时,最宽条纹的位置向条纹左侧平移.也就是说,基于脉冲啁啾的绝对测距方法不仅可以实现绝对测

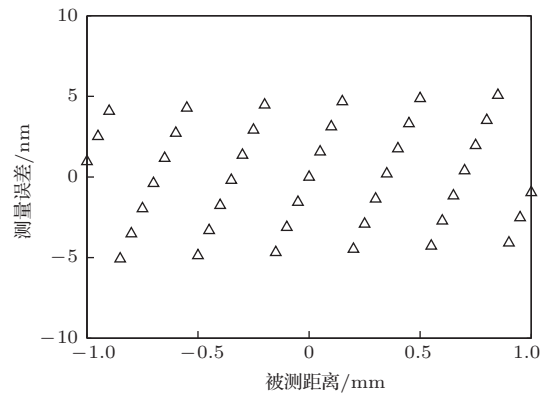


图10 不同被测距离的测距误差

可以看出基于脉冲啁啾的绝对距离测量方法,可以实现绝对测距.当被测距离为1.2 mm时,最大测距误差为5.3 nm.通过脉冲啁啾实现绝对测距的方法精度高,非歧义范围为可测量的全范围,且实验现象直观明显,局限在于由于光谱宽度的限制,可测量范围较小.减小脉冲的脉宽,从而拓宽光谱宽度,可以拓展测距范围.

## 5 结 论

本文详细地推导了光学频率梳光谱干涉的原理, 考虑参考脉冲与测量脉冲的功率比、介质色散和脉冲啁啾, 建立了光学频率梳光谱干涉的理论数学模型, 理论分析表明, 参考脉冲与测量脉冲的功率比、介质色散系数和脉冲啁啾都会影响光谱干涉条纹的幅值和频率.

基于迈克耳孙干涉仪, 采集光谱干涉条纹. 通过一次傅里叶变换可以在伪时域内直接确定参考脉冲与测量脉冲的飞行时间差, 进而确定被测距离, 避免了由于传统傅里叶滤波引起的测距不确定性. 当被测距离为 0.5 mm 和 1 mm 时, 测距误差为 0; 当被测距离为 1.5 mm 和 2 mm 时, 测距误差为 1.5 nm. 该方法的局限性在于当被测距离很小时, 难以测得伪时域内三个尖峰的精确位置, 从而无法实现测距. 光学频率梳有着丰富的光谱信息, 频域内成千上万的单独的频率梳齿可以看作是无数单模激光器的集合, 通过相近的纵模可以从光谱干涉条纹中解析出被测距离. 当被测距离为 1.5 mm 时, 选择波长对为 1558.784 nm 和 1558.446 nm, 最大测距误差为 8.7 nm; 当被测距离为 0.5 mm 时, 选择波长对为 1560 nm 和 1559.657 nm, 最小测距误差为 0.3 nm. 多模零差干涉的方法精度高, 应用前景广泛, 局限性在于实际应用中, 纵模的强度不稳定, 导致纵模相位不稳定, 影响测距结果. 基于脉冲的线性啁啾, 提出了一种绝对测距的方法, 当被测距离为 1.2 mm 时, 最大测距误差为 5.3 nm. 基于线性啁啾的方法精度高, 非歧义范围为可测的全范围, 局限性在于受光谱宽度限制可测距离小, 拓宽光谱的频谱宽度, 可以拓展测距范围. 理论分析和数值模拟表明, 本文提出的方法可以实现绝对测距.

## 参考文献

- [1] Liao S S, Yang T, Dong J J 2014 *Chin. Phys. B* **23** 073201
- [2] Zhu M H, Wu X J, Wei H Y, Zhang L Q, Zhang J T, Li Y 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 070702 (in Chinese) [朱敏昊, 吴学健, 尉昊赞, 张丽琼, 张继涛, 李岩 2013 物理学报 **62** 070702]
- [3] Xing S J, Zhang F M, Cao S Y, Wang G W, Qu X H 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 170603 (in Chinese) [邢书剑, 张福民, 曹士英, 王高文, 曲兴华 2013 物理学报 **62** 170603]
- [4] Zhang Y C, Wu J Z, Li Y Q, Jin L, Ma J, Wang L R, Zhao Y T, Xiao L T, Jia S T 2012 *Chin. Phys. B* **21** 113701
- [5] Wu H Z, Cao S Y, Zhang F M, Xing S J, Qu X H 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 100601 (in Chinese) [吴翰钟, 曹士英, 张福民, 邢书剑, 曲兴华 2014 物理学报 **63** 100601]
- [6] Minoshima K, Matsumoto H 2000 *Appl. Opt.* **39** 5512
- [7] Baumann E, Giorgetta F R, Coddington I, Sinclair L C, Knabe K, Swann W C, Newbury N R 2013 *Opt. Lett.* **38** 2026
- [8] Hyun S, Kim Y J, Kim Y, Kim S W 2010 *CIRP Annals: Manufacturing Technology* **59** 555
- [9] Schuhler N, Salvadé Y, Lévêque S, Dändliker R, Holzwarth R 2006 *Opt. Lett.* **31** 3101
- [10] Salvadé Y, Schuhler N, Lévêque S, Floch S L 2008 *Appl. Opt.* **47** 2715
- [11] Ye J 2004 *Opt. Lett.* **29** 1153
- [12] Wang X N, Takahashi S, Takamasu K, Matsumoto H 2012 *Opt. Express* **20** 2725
- [13] Balling P, Křen P, Mašika P, van den Berg S A 2009 *Opt. Express* **17** 9300
- [14] Wu H, Zhang F, Cao S, Xing S, Qu X 2014 *Opt. Express* **22** 10380
- [15] Coddington I, Swann W C, Nenadovic L, Newbury N R 2009 *Nat. Photon.* **3** 351
- [16] Zhang H, Wei H, Wu X, Yang H, Li Y 2014 *Opt. Express* **22** 6597
- [17] Lee J, Han S, Lee K, Bae E, Kim S, Lee S, Kim S W, Kim Y J 2013 *Meas. Sci. Technol.* **24** 045201
- [18] Joo K, Kim S 2006 *Opt. Express* **14** 5954
- [19] Cui M, Zeitouny M G, Bhattacharya N, van den Berg S A, Urbach H P 2011 *Opt. Express* **19** 6549
- [20] Berg van den S A, Persijn S T, Kok G J P 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 183901
- [21] Li Y, Hu K, Ji R, Liu D, Zhou W 2014 *Opt. Eng.* **53** 122409

# Spectral interferometry based absolute distance measurement using frequency comb\*

Wu Han-Zhong<sup>1)</sup> Cao Shi-Ying<sup>2)</sup> Zhang Fu-Min<sup>1)†</sup> Qu Xing-Hua<sup>1)</sup>

1) (State Key Laboratory of Precision Measurement Technology and Instruments, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

2) (Division of Time and Frequency Metrology, National Institute of Metrology, Beijing 100013, China)

( Received 15 August 2014; revised manuscript received 5 September 2014 )

## Abstract

Spectral interferometry using frequency comb has become a powerful approach to absolute distance measurement. In this paper, we analyze the principle of spectral interferometry in detail. With the consideration of dispersion, pulse chirp and the power ratio of the reference pulse and the measurement pulse, we develop a Gaussian model, which can be used to determine distances. The frequency of the spectral interference fringe is of key importance. The distances can be directly determined by the frequency of the spectral interference fringe through one-step fast Fourier transform with no filters during the data processing. The simulation results show that the maximum deviation is 1.5 nm when the distance is 1.5 mm theoretically. The comb consists of hundreds of thousands of teeth in the spectral domain, and each tooth can be regarded as a cw laser. We propose a method based on the phases of two close modes. The principle is introduced, and the maximum deviation is 8.7 nm with a distance of 1.5 mm while the minimum deviation is 0.3 nm corresponding to distance of 0.5 mm. We theoretically show that the linear pulse chirp can be used for distance measurement. The measurement principle is analyzed, and the simulation shows that the maximum deviation is 5.3 nm when the distance is 1.2 mm.

**Keywords:** optical frequency comb, absolute distance measurement, spectral interferometry

**PACS:** 06.30.Bp, 06.60.Jn, 42.25.Hz, 42.62.Eh

**DOI:** 10.7498/aps.64.020601

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 51327006, 51105274), and the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20120032130002).

† Corresponding author. E-mail: [zhangfumin@tju.edu.cn](mailto:zhangfumin@tju.edu.cn)