量子相空间分布函数与压缩相干态表示间的变换关系

梁修东 台运娇 程建民 翟龙华 许业军

Transform relations between squeezed coherent state representation and quantum phase space distribution functions

Liang Xiu-Dong Tai Yun-Jiao Cheng Jian-Min Zhai Long-Hua Xu Ye-Jun

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 64, 024207 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.024207
在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.024207
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I2

量子相空间分布函数与压缩相干态表示间的变换关系*

梁修东 台运娇 程建民 翟龙华 许业军†

(池州学院机械与电子工程系, 池州 247100)

(2014 年 6 月 5 日收到; 2014 年 7 月 11 日收到修改稿)

基于 Husimi 算符具有压缩相干态投影子形式, 首先介绍了一个新的量子算符表示, 即压缩相干态表示. 当高斯展宽参数 $\kappa=1$ 时, 该函数约化为通常的 P 函数. 作为例子, 研究了热态的压缩相干态表示, 通过图示说明了压缩相干态表示与 P 函数的区别. 为更好地在量子光学问题中使用该表示, 我们揭示了压缩相干态表示与 Wigner 函数、Q 函数以及 Husimi 函数间的积分变换关系.

关键词: 压缩相干态, Wigner 函数, P 函数

PACS: 42.50.–p, 03.65.Wj **DOI:** 10.7498/aps.64.024207

1 引 言

在过去的几十年里, 量子相空间分布函数已广泛应用于研究量子力学问题中, 发挥着极其重要的作用 [1]. 这些准经典分布函数作为一种有效的工具, 允许人们用尽可能多的经典语言来描述量子力学, 用经典的视角去研究量子力学问题 [2,3]. 在这些分布函数中, 最常见的几种准经典分布函数是: Wigner 函数和 P 函数等 [4−7]. 其中, Wigner 函数最初被用来研究量子力学与经典统计力学间的关系. Wigner 函数的两个边缘分布正好对应着在坐标和动量空间中测量粒子的概率密度, Wigner 函数包含了量子态的所有量子信息 [8]. P 函数则在研究量子光学中光子探测中发挥着重要作用. P 函数并不总是非负的, 并且有可能是奇异的, 甚至有的量子光场根本不存在 P 函数.

为进一步揭示量子光学中相空间分布函数多样性, 本文借助 Husimi 算符的纯态密度算符性质及其具有的完备性关系, 介绍了一个新的量子力学算符表示, 称为压缩相干态表示, 并研究其与量子光学中常见的几种分布函数间的内在关联性. 所获得的积分变换关系不仅丰富了相空间量子光学的内容, 而且可以被推广应用于量子光学多个领域.

2 Husimi 算符作为压缩相干态投影子

为避免 Wigner 分布函数非正定的缺点 [9], Husimi [10] 通过引进 Gauss 光滑函数 $\exp\left[-\kappa\left(q'-q\right)^2-\dfrac{\left(p'-p\right)^2}{\kappa}\right]$ 来光滑 Wigner 函数 $W\left(p,q\right)$, 并定义 Wigner 分布函数与 Husimi 分布函数的关系为

$$\begin{aligned}
&H\left(p,q,\kappa\right)\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q'\,\mathrm{d}p' W\left(q',p'\right)\\
&\quad\times\exp\left[-\kappa\left(q'-q\right)^2-\frac{\left(p'-p\right)^2}{\kappa}\right],
\end{aligned}\tag{1}$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 112471278)、国家级大学生创新创业训练计划项目 (批准号: 201211306009, 201311306011) 和池州学院研究中心项目 (批准号: XKY201325, 2014ZR002) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: yejunxu@126.com

 http://wulixb.iphy.ac.cn

其中, κ 为高斯展宽参数, 它决定了相空间中 q 值与 p 值的相对分辨率. 此外, 从 (1) 式出发, 可获得如下 Wigner 算符与 Husimi 算符间的积分关系[11]:

$$\begin{aligned}&\Delta_{\mathrm{H}}(q,p,\kappa)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q'\,\mathrm{d}p'\,\Delta_{\mathrm{W}}(q',p')\\&\quad\times\exp\left[-\kappa(q'-q)^2-\frac{(p'-p)^2}{\kappa}\right],\end{aligned}\tag{2}$$

这里 $\Delta_{\mathrm{W}}(p',q')$ 称为 Wigner 算符[12,13], $\Delta_{\mathrm{H}}(q,p,\kappa)$ 称为 Husimi 算符. 于是, Husimi 函数可表示为

$$H(q,p,\kappa)=\mathrm{Tr}\left[\rho\Delta_{\mathrm{H}}(q,p,\kappa)\right].\tag{3}$$

根据 Weyl 编量化方案知[14], $\Delta_{\mathrm{H}}(q,p,\kappa)$ 的 Weyl 经典对应函数就是所谓的高斯“颗粒”函数

$$\exp\left[-\kappa(q'-q)^2-\frac{(p'-p)^2}{\kappa}\right].$$

此外, 研究还表明, Husimi 算符 $\Delta_{\mathrm{H}}(q,p,\kappa)$ 具有压缩相干态投影子形式[15]

$$\Delta_{\mathrm{H}}(q,p,\kappa)=|q,p,\kappa\rangle\langle q,p,\kappa|,\tag{4}$$

其中, $|q,p,\kappa\rangle$ 是一种压缩相干态, 其在 Fock 空间的形式为

$$\begin{aligned}&|q,p,\kappa\rangle\\&=\left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{1+\kappa}\right)^{1/2}\exp\left[\frac{-\kappa}{2(1+\kappa)}q^2-\frac{p^2}{2(1+\kappa)}\right.\\&\quad\left.+\frac{\sqrt{2}a^+}{1+\kappa}(\kappa q+\mathrm{i}p)+\frac{1-\kappa}{2(1+\kappa)}\left(a^+\right)^2\right]|0\rangle\\&=S^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)D(\alpha)|0\rangle\\&=S^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)|\alpha\rangle\equiv|\alpha,\kappa\rangle,\end{aligned}\tag{5}$$

这里, $|\alpha\rangle$ 是相干态, $\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\kappa}q+\frac{\mathrm{i}p}{\sqrt{\kappa}}\right)$, $S^{-1}(1/\sqrt{\kappa})=\exp\left[\frac{1}{2}\left(a^2+a^{+2}\right)\ln(1/\sqrt{\kappa})\right]$ 是通常的单模压缩算符, $D(\alpha)=\exp(\alpha a^+-\alpha^* a)$ 为平移算符, 并注意到 κ 同时将平移算符和压缩算符联系在一起. 由 (4) 和 (5) 式知

$$\Delta_{\mathrm{H}}(p,q,\kappa)=\Delta_{\mathrm{H}}(\alpha,\alpha^*,\kappa).\tag{6}$$

此外, $|\alpha,\kappa\rangle$ 可以构成一个量子力学表象, 即

$$\begin{aligned}&\int\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi}|\alpha,\kappa\rangle\langle\alpha,\kappa|\\&=\int\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi}S^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)|\alpha\rangle\langle\alpha|S\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)=1.\end{aligned}\tag{7}$$

3 利用 Husimi 算符构造新的密度算符表示

利用 (5) 式中的完备性关系, 定义密度算符 ρ 在 $|p,q,\kappa\rangle$ 表象中的表示, 即

$$\rho=\int\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi}F(\alpha,\alpha^*,\kappa)|\alpha,\kappa\rangle\langle\alpha,\kappa|,\tag{8}$$

其中, 函数 $F(\alpha,\alpha^*,\kappa)$ 即称为算符的压缩相干态表示.

为获得 $F(\alpha,\alpha^*,\kappa)$ 的具体形式, 首先, 在 (8) 式等号两边同时分别左乘 $\langle -z|$ 和右乘 $|z\rangle$, 则

$$\begin{aligned}&\langle -z|\rho|z\rangle\\&=\int\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi}F(\alpha,\alpha^*,\kappa)\langle -z\mid\alpha,\kappa\rangle\langle\alpha,\kappa\mid z\rangle.\end{aligned}\tag{9}$$

利用 (5) 式和单模压缩算符的正规乘积表示[16]

$$\begin{aligned}&S\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)\\&=\sqrt{\mathrm{sech}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)}:\exp\left[-\frac{\left(a^+\right)^2}{2}\tanh\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)\right.\\&\quad+\left(\mathrm{sech}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)-1\right)a^+a\\&\quad\left.+\frac{a^2}{2}\tanh\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)\right]:,\end{aligned}\tag{10}$$

可得

$$\begin{aligned}&\langle\alpha,\kappa|z\rangle\\&=\sqrt{\mathrm{sech}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)}\exp\left[-\frac{1}{2}|z|^2\right.\\&\quad\left.+\frac{z^2}{2}\tanh\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)\right]\exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right.\\&\quad-\frac{(\alpha^*)^2}{2}\tanh\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)\\&\quad\left.+\mathrm{sech}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)\alpha^* z\right],\end{aligned}\tag{11}$$

其中, (10) 式中的符号 : : 表示算符的正规乘积. 由 (11) 式显然有

$$\begin{aligned}&\langle -z|\alpha,\kappa\rangle\langle\alpha,\kappa|z\rangle\\&=\mathrm{sech}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)\exp\left[\mathrm{sech}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)(\alpha^* z-\alpha z^*)\right]\\&\quad\times\exp\left[-|\alpha|^2-|z|^2-\frac{(\alpha^*)^2+\alpha^2}{2}\tanh\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)\right.\end{aligned}$$

$$+\frac{(z^*)^2+z^2}{2}\tanh\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)\bigg]. \tag{12}$$

将(12)式代入(9)式, 并令 $\beta=\operatorname{sech}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)\alpha$, 则有

$$\begin{aligned}&\langle -z|\,\rho\,|z\rangle\\ &=\frac{1}{\operatorname{sech}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)}\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}F\left(\frac{\beta}{\operatorname{sech}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)}\right)\\ &\quad\times\exp\left[-|z|^2+\frac{\tanh\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)}{2}\left(z^2+(z^*)^2\right)\right]\\ &\quad\times\exp\left(\beta^*z-\beta z^*\right)\\ &\quad\times\exp\Bigg[-\frac{1}{\left(\operatorname{sech}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)\right)^2}|\beta|^2\\ &\quad-\frac{(\beta^*)^2+\beta^2}{2\tanh\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)}\Bigg],\end{aligned} \tag{13}$$

这里, $(\beta^*z-\beta z^*)$ 为纯虚数, 故(13)式可视为傅里叶变换. 则由傅里叶逆变换关系得

$$\begin{aligned}&F(\alpha,\alpha^*,\kappa)\\ &=\operatorname{sech}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)\\ &\quad\times\exp\left[|\alpha|^2+\frac{\left(\alpha^2+(\alpha^*)^2\right)}{2}\tanh\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)\right]\\ &\quad\times\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}\langle -z|\,\rho\,|z\rangle\\ &\quad\times\exp\left[|z|^2-\frac{\left(z^2+(z^*)^2\right)}{2}\tanh\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)\right]\\ &\quad\times\exp\left[\operatorname{sech}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)(\alpha z^*-\alpha^*z)\right].\end{aligned} \tag{14}$$

尤其, 当 $\kappa=1$ 时,

$$\begin{aligned}F(\alpha)=&\exp\left(|\alpha|^2\right)\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}\langle -z|\,\rho\,|z\rangle\\ &\times\exp\left(|z|^2+z^*\alpha-z\alpha^*\right),\end{aligned} \tag{15}$$

这是通常的 P 函数.

此外, 当把密度算符 ρ 替换成任意算符 A 时, 显然有

$$A=\int\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi}F(\alpha,\alpha^*,\kappa)\,|\alpha,\kappa\rangle\,\langle\alpha,\kappa| \tag{16}$$

成立, 相应的 $F(\alpha,\alpha^*,\kappa)$ 表示为

$$\begin{aligned}&F(\alpha,\alpha^*,\kappa)\\ &=\operatorname{sech}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)\\ &\quad\times\exp\left[|\alpha|^2+\frac{\left(\alpha^2+(\alpha^*)^2\right)}{2}\tanh\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)\right]\\ &\quad\times\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}\langle -z|\,A\,|z\rangle\\ &\quad\times\exp\left[|z|^2-\frac{\left(z^2+(z^*)^2\right)}{2}\tanh\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)\right]\\ &\quad\times\exp\left[\operatorname{sech}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)(\alpha z^*-\alpha^*z)\right].\end{aligned} \tag{17}$$

至此, 我们已经获得了算符的压缩相干态表示的具体积分表达式. 当取 $A=\Delta_{\mathrm{H}}(\beta,\beta^*,\kappa)$ 时, 可看出Husimi算符的压缩相干态表示为

$$F_{\Delta_{\mathrm{H}}(\beta,\beta^*,\kappa)}(\alpha,\alpha^*)=\pi\delta^{(2)}(\alpha-\beta). \tag{18}$$

作为例子, 我们还可计算热场压缩相干态表示. 由热场密度算符[17]

$$\rho=\sum_n\frac{\langle n\rangle^n}{(1+\langle n\rangle)^{n+1}}\,|n\rangle\,\langle n|, \tag{19}$$

可得

$$\langle -z|\,\rho\,|z\rangle=\frac{\mathrm{e}^{-|\beta|^2}}{1+\langle n\rangle}\exp\left[\frac{-|\beta|^2}{\left(1+\frac{1}{\langle n\rangle}\right)}\right]. \tag{20}$$

将(20)式代入(17)式, 可得

$$\begin{aligned}&F_{\mathrm{T}}(\alpha,\alpha^*,\kappa)\\ &=\operatorname{sech}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)\\ &\quad\times\exp\left[|\alpha|^2+\frac{\alpha^2+(\alpha^*)^2}{2}\tanh\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)\right]\\ &\quad\times\frac{1}{1+\langle n\rangle}\frac{1}{\sqrt{\left(\langle n\rangle/1+\langle n\rangle\right)^2-\left(\tanh\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)\right)^2}}\\ &\quad\times\exp\left[\frac{-\left(\langle n\rangle/1+\langle n\rangle\right)\left(\operatorname{sech}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)\right)^2|\alpha|^2}{\left(\langle n\rangle/1+\langle n\rangle\right)^2-\left(\tanh\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)\right)^2}\right]\\ &\quad\times\exp\left[\frac{\tanh\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)}{2}\left(\operatorname{sech}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)\right)^2\right.\end{aligned}$$

$$\times\left[\left(\alpha^{*}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^{2}-\left(\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^{2}\right]\left\{\left(\langle n\rangle/1+\langle n\rangle\right)^{2}\right.$$
$$\left.\left.-\left(\tanh\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)\right)^{2}\right\}^{-1}\right]. \tag{21}$$

注意到, 当 $\kappa=1$ 时,

$$F_{\mathrm{T}}(\alpha)=\frac{1}{\langle n\rangle}\exp\left[-\frac{|\alpha|^{2}}{\langle n\rangle}\right], \tag{22}$$

即为热场的 P 函数.

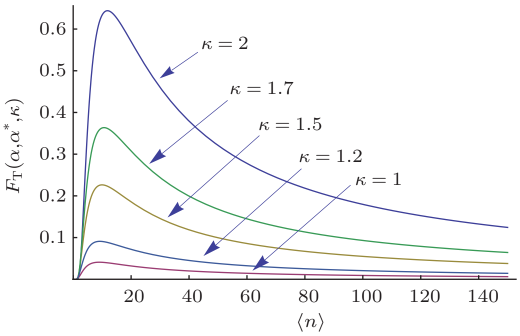

图 1 热场的压缩相干态表示

图 1 给出了热场的压缩相干态表示函数 $F_{\mathrm{T}}(\alpha,\alpha^{*},\kappa)$ 随平均光子数 $\langle n\rangle$ 的分布情况, 可看出热场的压缩相干态表示函数的分布将受到展宽参数 κ 的调制, 图中 $\kappa=1$ 时的曲线即为热场的 P 表示函数分布曲线.

4 量子光学中常见分布函数的压缩相干态表示

算符的压缩相干态表示并非孤立的分布函数, 它与量子光学中常见的分布函数存在密切的联系, 下面将重点揭示压缩相干态表示与常见的量子分布函数间的积分关系.

4.1 *P* 函数与压缩相干态表示的关系

利用 Mehta [18] 曾给出的一个由 ρ 求其 P 表示 $P(z)$ 的公式

$$P(z)=\mathrm{e}^{|z|^{2}}\int\frac{\mathrm{d}^{2}\gamma}{\pi}\langle-\gamma|\rho|\gamma\rangle\times\exp\left(|\beta|^{2}+\beta^{*}z-\beta z^{*}\right). \tag{23}$$

将 (8) 式代入 (23) 式, 导出

$$\begin{aligned}P(z)=&\,\mathrm{e}^{|z|^{2}}\int\frac{\mathrm{d}^{2}\gamma}{\pi}\langle-\gamma|\rho|\gamma\rangle\\&\times\exp\left(|\gamma|^{2}+\gamma^{*}z-\gamma z^{*}\right)\\=&\,e^{|z|^{2}}\int\frac{\mathrm{d}^{2}\gamma}{\pi}\int\frac{\mathrm{d}^{2}\alpha}{\pi}F(\alpha,\alpha^{*},\kappa)\\&\times\langle-\gamma||\alpha,\kappa\rangle\langle\alpha,\kappa||\gamma\rangle\\&\times\exp\left(|\gamma|^{2}+\gamma^{*}z-\gamma z^{*}\right)\\=&\,e^{|z|^{2}}\operatorname{sech}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)\\&\times\int\frac{\mathrm{d}^{2}\alpha}{\pi}F(\alpha,\alpha^{*},\kappa)\\&\times\exp\left[-|\alpha|^{2}-\frac{(\alpha^{2}+\alpha^{*2})}{2}\right.\\&\left.\times\tanh\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)\right]\int\frac{\mathrm{d}^{2}\gamma}{\pi}\\&\times\exp\left[\left(\operatorname{sech}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)\alpha^{*}-z^{*}\right)\gamma\right.\\&-\left(\operatorname{sech}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)\alpha-z\right)\gamma^{*}\\&\left.-\frac{\tanh\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)}{2}\left(\gamma^{2}+\gamma^{*2}\right)\right].\end{aligned} \tag{24}$$

当取特殊情况 $\kappa=1$ 时, 上式约化为通常的 P 函数.

4.2 Wigner 函数的压缩相干态表示

Wigner 函数可以表示成如下求迹形式

$$W=\operatorname{Tr}\left[\rho\Delta(\alpha,\alpha^{*})\right], \tag{25}$$

这里算符 $\Delta(\alpha,\alpha^{*})$ 称为 Wigner 算符, 具有正规乘积形式

$$\begin{aligned}&\Delta(p,q)\equiv\Delta(\alpha,\alpha^{*})\\=&\frac{1}{\pi}:\exp\left[-(q-Q)^{2}-(p-P)^{2}\right]:\\=&\frac{1}{\pi}:\exp\left[-2\left(a^{+}-\alpha^{*}\right)^{2}-(a-\alpha)^{2}\right]:.\end{aligned} \tag{26}$$

将 (8) 式代入 (25) 式, 即可得 Wigner 函数的压缩相干态积分表示形式

$$\begin{aligned}W=&\int\frac{\mathrm{d}^{2}\alpha'}{\pi}F(\alpha',\alpha'^{*},\kappa)\langle\alpha',\kappa|\Delta(\alpha,\alpha^{*})|\alpha',\kappa\rangle\\=&\int\frac{\mathrm{d}^{2}\alpha'}{\pi}F(\alpha',\alpha'^{*},\kappa)\\&\times\exp\left[-2\left(\alpha'^{*}\cosh\lambda+\alpha'\sinh\lambda-\alpha^{*}\right)\right.\\&\left.\times\left(\alpha'^{*}\sinh\lambda+\alpha'\cosh\lambda-\alpha\right)\right],\end{aligned} \tag{27}$$

其中 $\lambda=\ln\sqrt{\kappa}$. 当 $\kappa=1$ 时,

$$W=\operatorname{Tr}\left[\rho\Delta(\alpha,\alpha^{*})\right]$$

$$= \int \mathrm{d}^2\alpha' F(\alpha', \alpha'^*, \kappa) \times \exp\left[-2(\alpha'^* - \alpha^*)(\alpha' - \alpha)\right], \tag{28}$$

这恰好是 Wigner 函数与 P 函数之间的变换关系.

4.3 Q 函数与压缩相干态表示的关系

量子光学中 Q 函数可表示为

$$Q_{(z,z^*)} = \mathrm{Tr}\left(|z\rangle\langle z|\rho\right) = \langle z|\rho|z\rangle. \tag{29}$$

把 (8) 式代入 (29) 式, 即可得到 Q 函数的压缩相干态的表示式

$$\begin{aligned} Q_{(z,z^*)} &= \int \frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi} F(\alpha, \alpha^*, \kappa)\langle z|\alpha, \kappa\rangle\langle\alpha, \kappa|z\rangle \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi} F(\alpha, \alpha^*, \kappa)\left|\langle z|\alpha, \kappa\rangle\right|^2, \end{aligned} \tag{30}$$

其中, 可计算出

$$\begin{aligned} &\langle z|\alpha, \kappa\rangle \\ =&\sqrt{\mathrm{sech}\left(\ln\sqrt{\kappa}\right)} \\ &\times \exp\left[-\frac{|z|^2}{2} - \frac{z^{*2}}{2}\tanh\left(\ln\sqrt{\kappa}\right)\right] \\ &\times \exp\left[-\frac{|\alpha|^2}{2} + \frac{\alpha^2}{2}\tanh\left(\ln\sqrt{\kappa}\right)\right. \\ &\left. + z^*\alpha\,\mathrm{sech}\left(\ln\sqrt{\kappa}\right)\right]. \end{aligned} \tag{31}$$

于是, 进一步可求出

$$\begin{aligned} &\left|\langle z/\alpha, \kappa\rangle\right|^2 \\ =&\mathrm{sech}\left(\ln\sqrt{\kappa}\right)\exp\left[-|z|^2 - \frac{z^{*2} + z^2}{2}\tanh\left(\ln\sqrt{\kappa}\right)\right] \\ &\times \exp\left[-|\alpha|^2 + \mathrm{sech}\left(\ln\sqrt{\kappa}\right)(z\alpha^* + z^*\alpha)\right. \\ &\left. + \frac{\alpha^2 + \alpha^{*2}}{2}\tanh\left(\ln\sqrt{\kappa}\right)\right]. \end{aligned} \tag{32}$$

4.4 Husimi 函数与压缩相干态表示的关系

最后, 虽然 Husimi 函数和密度算符的压缩相干态表示二者都与压缩相干态密切联系, 但是 Husimi 函数也是可以有压缩相干态积分表示式. 同样, 利用 (8) 式, 得

$$\begin{aligned} H =&\mathrm{Tr}\left(\Delta_{\mathrm{H}}(\beta, \beta^*)\rho\right) \\ =&\int \frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi} F(\alpha, \alpha^*, \kappa)\left|\langle\beta, \kappa \mid \alpha, \kappa\rangle\right|^2, \end{aligned} \tag{33}$$

其中,

$$\left|\langle\beta, \kappa \mid \alpha, \kappa\rangle\right|^2 = \exp\left[-(\alpha^* - \beta^*)(\alpha - \beta)\right]. \tag{34}$$

5 结 论

本文重点研究了一种新的量子光学相空间分布函数, 即压缩相干态表示. 获得了压缩相干态表示的具体表达式, 当 $\kappa = 1$ 时, 压缩相干态表示简化为通常的 P 表示; 此外, 为揭示压缩相干态表示与其他几种分布函数间的内在联系, 我们进一步推导出了压缩相干态表示与 Wigner 函数、Q 函数, 以及 Husimi 函数间的积分变换关系, 这些变换关系为研究量子态的非经典性质、量子态 Tomography 等方面有较重要的实用价值 [19–23].

参考文献

[1] Schleich W P 2001 *Quantum Optics in Phase Space* (Berlin: Wiley-VCH)

[2] Fan H Y 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 020302 (in Chinese) [范洪义 2014 物理学报 **63** 020302]

[3] Zhang X Y, Wang J S 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 090304 (in Chinese) [张晓燕, 王继锁 2011 物理学报 **60** 090304]

[4] Wigner E P 1932 *Phys. Rev.* **40** 749

[5] Hillery M 1984 *Phys. Rep.* **106** 121

[6] Sudarshan E C G 1963 *Phys. Rev. Lett.* **10** 277

[7] Glauber R J 1963 *Phys. Rev. Lett.* **10** 84

[8] Meng X G, Wang J S, Liang B L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2160 (in Chinese) [孟祥国, 王继锁, 梁宝龙 2007 物理学报 **56** 2160]

[9] Wang S, Zhang B Y, Zhang Y H 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1775 (in Chinese) [王帅, 张丙云, 张运海 2010 物理学报 **59** 1775]

[10] Husimi K 1940 *Proc. Phys. Math. Soc. JPN* **22** 264

[11] Fan H Y 2008 *Ann. Phys.* **323** 500

[12] Xu Y J, Fan H Y, Liu Q Y 2010 *Chin. Phys. B* **19** 020303

[13] Fan H Y, Yuan H C 2010 *Chin. Phys. B* **19** 070301

[14] Xu X X, Yuan H C, Hu L Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 4661 (in Chinese) [徐学翔, 袁洪春, 胡利云 2010 物理学报 **59** 4661]

[15] Fan H Y, Guo Q 2006 *Phys. Lett. A* **358** 203

[16] Yuan H C, Xu X X 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 064205 (in Chinese) [袁洪春, 徐学翔 2012 物理学报 **61** 064205]

[17] Scully M O 1997 *Quantum Optics* (England, Cambridge: Cambridge University Press)

[18] Mehta C L 1967 *Phys. Rev. Lett.* **18** 752

[19] Korennoy Y A, Man'ko V I 2011 *Phys. Rev. A* **83** 053817

[20] Benichi H, Furusawa A 2011 *Phys. Rev. A* **84** 032104

[21] Filippov S N, Man'ko V I 2011 *Phys. Rev. A* **84** 033827

[22] Xie C M, Fan H Y 2011 *Chin. Phys. B* **20** 060303

[23] Xie C M, Fan H Y 2012 *Chin. Phys. B* **21** 010302

物理学报 Acta Phys. Sin. Vol. 64, No. 2 (2015) 024207

Transform relations between squeezed coherent state representation and quantum phase space distribution functions*

Liang Xiu-Dong Tai Yun-Jiao Cheng Jian-Min Zhai Long-Hua Xu Ye-Jun†

(*Department of Physics Electronic and Engineering, Chizhou University, Chizhou 247100, China*)

(Received 5 June 2014; revised manuscript received 11 July 2014)

Abstract

A new operator representation, called squeezed coherent state representation, is introduced since Husimi operator has the form of squeezed coherent state. We fisrt introduce its specific integral expression. When $\kappa = 1$, this representation is reduced to the usual P function. As an example, we calculate the squeezed coherent state representation for thermal field to illustrate a difference between P function and the squeezed coherent state representation. Especially, in order to better apply this representation to quantum optics, we reveal the integral transformations between the squeezed coherent state representation, respectively, and the following three functions: Wigner function, Q function, and Husimi function.

Keywords: squeezed coherent state, Wigner function, P function

PACS: 42.50.–p, 03.65.Wj **DOI:** 10.7498/aps.64.024207

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 112471278), the National Training Programs of Innovation and Entrepreneurship for Undergraduates of China (Grant Nos. 201211306009, 201311306011), and the Special Fund for Research Center of Chizhou University, China (Grant Nos. XKY201325, 2014ZR002).

† Corresponding author. E-mail: yejunxu@126.com