

一类新型激波捕捉格式的耗散性与稳定性分析

谢文佳 李桦 潘沙 田正雨

On the accuracy and robustness of a new flux splitting method

Xie Wen-Jia Li Hua Pan Sha Tian Zheng-Yu

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 024702 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.024702

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.024702>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I2>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于弱可压与不可压光滑粒子动力学方法的封闭方腔自然对流数值模拟及算法对比

[Comparisons among weakly-compressible and incompressible smoothed particle hydrodynamic algorithms for natural convection](#)

物理学报.2014, 63(22): 224701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.224701>

于浸入式边界方法的串联双矩形柱绕流数值模拟

[Numerical simulation of flow around two elongated rectangles in tandem arrangement using an immersed boundary method](#)

物理学报.2014, 63(21): 214702 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.214702>

脉动流血液通栓的晶格玻尔兹曼模型

[Effect of pulsation on thrombus studied by the lattice Boltzmann method](#)

物理学报.2014, 63(19): 194701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.194701>

探空湿度测量太阳辐射误差修正流体动力学研究

[Fluid dynamic analysis on solar heating error of radiosonde humidity measurement](#)

物理学报.2014, 63(14): 144701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.144701>

改性疏水固壁润湿性反转现象的格子 Boltzmann 方法模拟

[Wettability alteration simulation of modified hydrophobic solid surface by lattice Boltzmann method](#)

物理学报.2014, 63(10): 104701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.104701>

一类新型激波捕捉格式的耗散性与稳定性分析*

谢文佳[†] 李桦 潘沙 田正雨

(国防科学技术大学航天科学与工程学院, 长沙 410073)

(2014年5月5日收到; 2014年6月8日收到修改稿)

高超声速流动是高复杂性的可压缩黏性流动, 其中存在激波、剪切层、激波/激波干扰、激波/边界层干扰、旋涡与分离流动等复杂流场结构. 对其进行准确模拟需要使用低耗散、强鲁棒性的激波捕捉方法. 本文基于一类新型的通量项分裂方法, 提出了一种耗散低且鲁棒性好的激波捕捉格式 K-CUSP-X. 对该格式的耗散性和激波稳定性进行了详细的理论分析, 得到了格式激波稳定的数值条件. 推论认为, 迎风格式激波稳定的充分条件为速度扰动量具有衰减性, 数值实验验证了该推论. 研究表明, 该格式与 Toro 提出的通量分裂格式 K-CUSP-T 相比, 在保证精确捕捉接触间断的同时, 又具有更好的稳定性, 在激波处不会产生“红玉”现象.

关键词: 高超声速, 激波捕捉, 接触间断, 激波不稳定

PACS: 47.11.-j, 47.40.Ki, 47.20.Cq

DOI: 10.7498/aps.64.024702

1 引言

高超声速流动特别是内流流动的本质是高复杂性的可压缩黏性流动, 其中存在许多复杂的流场结构, 包括激波、剪切层、激波/激波干扰、激波/边界层干扰、旋涡与分离流动等现象^[1-3]. 对这些复杂流场结构的准确模拟需要使用数值耗散性小、间断分辨率高, 同时数值振荡小、稳定性好的数值方法^[4,5].

迎风格式被认为是模拟高速流动问题的最有效的数值工具, 它通常可以被分为通量差分分裂法(FDS)和通量矢量分裂法(FVS)两大类. FDS格式耗散低, 可以精确捕捉以接触间断为代表的线性波, 因为接触间断在数值上是边界层的极限情况, 因而适用于边界层的模拟^[6]. 在捕捉激波等非线性波时, FDS格式的表现也非常突出. 但是, FDS格式在模拟缓慢移动激波面问题时在激波后会产生低频扰动, 在模拟强激波时常常会发

生“红玉”等激波不稳定现象. 实际上, 多数的低耗散格式都面临着激波后低频扰动以及“红玉”等激波不稳定问题^[7,8]. FVS格式可以准确地捕捉激波面, 并且其计算效率和鲁棒性都普遍地好于FDS格式. 但是经典的FVS格式(如: van Leer格式和Steger-Warming格式)不能有效地分辨线性波, 因而难以用于模拟接触间断、剪切波以及强旋流动问题^[9]. 格式的强耗散性限制了该方法在边界层流动问题中的应用. 因而发展低耗散性且强鲁棒性的迎风格式是模拟高速流动问题的关键.

近年来, 以Liou和Zha等为代表的学者从考虑对流项信息和压力项信息不同传播机理的角度出发, 发展了一类对流迎风分裂格式. 该类格式结合了FDS格式的低耗散性和FVS格式的强鲁棒性的优点, 能够准确地捕捉线性和非线性波, 适用于边界层流动的模拟, 并且在捕捉强激波时有良好的稳定性. Liou的分裂方法(即AUSM类格式)将通量矢量分裂为对流项和压力项, 其中对流项中对应于能量方程的对流量为总焓 H , 因而可以被

* 国家自然科学基金(批准号: 0902010112008)资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: wjxie_kingwen@126.com

归为H-CUSP类格式^[10-12]. Zha^[13-16]的分裂方法(即E-CUSP)与Liou的方法类似,不同之处在于对流项中对应于能量方程的对流量为总能 E .最近,Toro等^[9]提出了一种新型的通量分裂格式(即TV),该分裂方法同样将通量矢量分裂为对流项和压力项,但是其对流项中对应于能量方程的对流量为动能 K .根据文献^[9]的分析,该种分裂方式的对流项不包含压力变量,与压力有关的信息都包含在压力项中,而Liou和Zha的分裂方式不满足这一特性.从对流信息和压力信息的不同传播机理的角度考虑,Toro的分裂方式更为合理.但是,数值实验表明,Toro的方法虽然满足低耗散性但是在捕捉强激波时稳定性很差,会产生“红玉”等激波不稳定现象.此外,关于该格式的耗散性也没有得到分析,产生激波不稳定的原因也尚未明确.本文基于Toro的通量矢量分裂方式,借鉴Mandal和Panwar的HLL-CPS格式^[17]的构造思想,提出了一种新型的通量分裂格式K-CUSP-X,分析了此类通量分裂格式在接触间断处的耗散性.

在高速流动问题的数值模拟中,经常会出现激波不稳定现象^[18].“红玉”等激波不稳定现象一直是困扰几乎所有的低耗散迎风格式的难题,尤其是一些可以精确捕捉接触间断的格式在模拟强激波时更容易产生“红玉”现象.即便是对于一些发展相对成熟、已经被广泛应用于工程实际问题的迎风格式(如:AUSMPW+,AUSM+UP)在某些情况下,仍然会遭遇“红玉”现象^[19].Liou^[20]分析了多种迎风格式的质量通量,认为质量通量耗散项的压力系数不为零会导致格式遭遇“红玉”现象.Xu和Li^[21]认为迎风格式在激波面切向的低耗散性是诱发“红玉”的原因.Pandolfi和D'Ambrosio^[8]在分析Quirk的奇偶失联问题的基础上提出格式的压力扰动量和密度扰动量的相互作用特性是决定格式是否产生“红玉”的重要因素.本文在Pandolfi和D'Ambrosio的工作基础上,通过分析两种K-CUSP格式在Quirk的奇偶失联问题中的物理量扰动衰减特性,给出了迎风格式满足激波稳定的数值条件.与Pandolfi和D'Ambrosio的分析结论不同的是,本文认为激波面法向速度扰动的衰减特性是决定格式是否产生“红玉”的关键因素,并且结合高超声速钝头绕流问题对该分析结论进行了讨论和数值验证.该结论可以被考虑用于已有迎风格式激波稳定性的分析与发展新型的激波捕捉格式.

2 控制方程与新型的通量分裂格式

2.1 欧拉方程

一维守恒形式的欧拉方程为

$$\partial_t \mathbf{Q} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{Q}) = 0, \quad (1)$$

式中, \mathbf{Q} 为守恒变量, $\mathbf{F}(\mathbf{Q})$ 为矢通量,且分别为

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

其中, ρ 为密度, u 为速度, p 为压力而 E 为总能.

求解方程(1)的数值方法为

$$\mathbf{Q}_i^{n+1} = \mathbf{Q}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}], \quad (3)$$

其中, $\mathbf{F}_{i+1/2}$ 为界面处的数值通量.

2.2 K-CUSP-X 格式

矢通量 $\mathbf{F}(\mathbf{Q})$ 按照Toro的通量分裂方式分裂为对流项 $\mathbf{C}(\mathbf{Q})$ 和压力项 $\mathbf{P}(\mathbf{Q})$,即

$$\mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \mathbf{C}(\mathbf{Q}) + \mathbf{P}(\mathbf{Q}), \quad (4)$$

其中,

$$\mathbf{C}(\mathbf{Q}) = u \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho u^2/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ \gamma p u / (\gamma - 1) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

对应于对流项 $\mathbf{C}(\mathbf{Q})$ 的波速为 (u, u, u) ,而对应于压力项 $\mathbf{P}(\mathbf{Q})$ 的波速为 $(-a, 0, a)$.这表明对流项信息是以速度矢量 \mathbf{u} 进行传播,而压力项信息则是以声速 a 向四周传递^[16,17].值得一提的是,该种分裂方式不同于Liou等的H-CUSP类格式与Zha等的E-CUSP类格式的分裂方式,能量守恒量被分裂为动能与静焓,与压力有关的信息均包含在压力项通量中,对流项通量不包含压力信息.该种分裂方

法考虑到对流信息和压力信息的不同传播机理, 将对流信息与压力信息分开处理, 在物理意义上更加合理.

本文应用HLL-CPS格式的构造方法分别处理对流项通量和压力项通量. 关于HLL-CPS格式的构造细节请参见文献[17]. 对流通量采用迎风方式处理, 对流信息的传播方向取决于界面处马赫数. 即

$$\mathbf{C}_{1/2} = M_k \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho u^2/2 \end{pmatrix}_k, \quad (6)$$

$$k = \begin{cases} L & \text{if } \bar{u} \geq 0 \\ R & \text{if } \bar{u} < 0 \end{cases}, \quad (7)$$

其中, $\bar{u} = \frac{u_L + u_R}{2}$. 而界面处马赫数定义为

$$M_k = \begin{cases} \frac{\bar{u}}{\bar{u} - S_L} & \text{if } \bar{u} \geq 0 \\ \frac{\bar{u}}{\bar{u} - S_R} & \text{if } \bar{u} < 0 \end{cases}, \quad (8)$$

左右声速定义为

$$a_k = \begin{cases} u_L - S_L & \text{if } \bar{u} \geq 0 \\ u_R - S_R & \text{if } \bar{u} < 0 \end{cases}. \quad (9)$$

压力项通量采用HLL格式的构造方式处理, 并假设流动满足等熵条件: $\bar{a}^2 = \delta p / \delta \rho$, 即

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}_{1/2} \\ &= \frac{S_R}{S_R - S_L} \mathbf{P}_L - \frac{S_L}{S_R - S_L} \mathbf{P}_R \\ & \quad + \frac{S_R S_L}{\bar{a}^2 (S_R - S_L)} \\ & \quad \times \begin{pmatrix} p_R - p_L \\ p_R u_R - p_L u_L \\ \frac{\bar{a}^2 (p_R - p_L)}{\gamma - 1} + \frac{p_R u_R^2 - p_L u_L^2}{2} \end{pmatrix}, \quad (10) \end{aligned}$$

S_L 和 S_R 分别是左行和右行波速, 按如下方式计算:

$$\begin{aligned} S_L &= \min(0, u_L - a_L, \hat{u} - \hat{a}), \\ S_R &= \max(0, u_R + a_R, \hat{u} + \hat{a}), \end{aligned} \quad (11)$$

\hat{u} 和 \hat{a} 分别为 Roe 平均速度和声速.

最后, 界面处的数值总通量为

$$\mathbf{F}_{1/2} = \mathbf{C}_{1/2} + \mathbf{P}_{1/2}. \quad (12)$$

基于同样的分裂方式, Toro 提出了一种可以精确分辨接触间断的通量分裂格式 TV. 在本文中将其记作 K-CUSP-T, 关于该格式的详细构造方法和数值特性请参见文献[9], 本文中不再赘述.

3 数值耗散性分析

边界层流动的模拟要求格式具有低耗散性, 因为过大的数值耗散将掩盖真实的物理黏性在边界层中的作用, 导致计算所得的边界层厚度偏大. 接触间断被认为是黏性边界层的极限情况, 格式对接触间断的分辨能力是检验其是否可以模拟边界层流动问题的重要指标. 为了分析数值格式在接触间断处的耗散性, 可以将通量矢量表示为包含耗散项的形式:

$$\mathbf{F}_{1/2} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_R) + \mathbf{D}, \quad (13)$$

其中, \mathbf{D} 为耗散项. 对于本文提出的通量分裂格式 K-CUSP-X, 则有

$$\mathbf{D}|_1 = \frac{S_L S_R}{\bar{a}^2 (S_R - S_L)} (p_R - p_L), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}|_2 &= \frac{S_L + S_R}{2(S_R - S_L)} (p_L - p_R) \\ & \quad + \frac{S_L S_R}{\bar{a}^2 (S_R - S_L)} (p_R u_R - p_L u_L), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}|_3 &= \frac{\gamma (S_L + S_R)}{2(\gamma - 1)(S_R - S_L)} (p_L u_L - p_R u_R) \\ & \quad + \frac{S_L S_R}{\bar{a}^2 (S_R - S_L)} \left[\frac{\bar{a}^2}{\gamma - 1} (p_R - p_L) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} (p_R u_R^2 - p_L u_L^2) \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

在接触间断处即 $(u, p)_L = (u, p)_R = (u_c, p)$, $\rho_L \neq \rho_R$, K-CUSP-X 格式的耗散项为

$$\mathbf{D}|_{1,2,3} = 0, \quad (17)$$

因此, 在接触间断处 K-CUSP-X 格式的耗散为 0, 可以精确捕捉定常接触间断.

图 1 给出了 K-CUSP-X 格式与 K-CUSP-T 格式计算一维定常接触间断问题的结果. 从图中可以看出, K-CUSP-X 和 K-CUSP-T 的计算结果与精确解完全一致, 在间断处没有耗散. 因此该新型通量分裂格式 K-CUSP-X 具有低耗散性, 可以被考虑用于边界层流动问题的模拟.

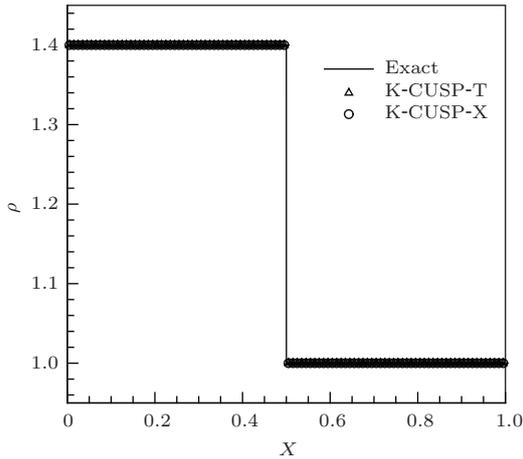


图1 一维定常接触间断问题

4 激波稳定性分析

4.1 Quirk 奇偶失联问题的线性分析

Quirk 奇偶失联问题是分析数值格式产生“红玉”现象机理的有力分析算例 [22,23]. 该问题描述了一束马赫数为6的平面激波在平行导管中从左向右行进. 如图2所示, 计算网格为 800×20 的结构网格, 在网格中线垂直方向人为地加入扰动量 $\Delta y = \pm 10^{-3}$. 初始化条件为: $\rho = 1.4, p = 1, u = 0$ 以及 $v = 0$. 入口为激波后条件, 出口为无反射边界条件, 上下边界为固壁.

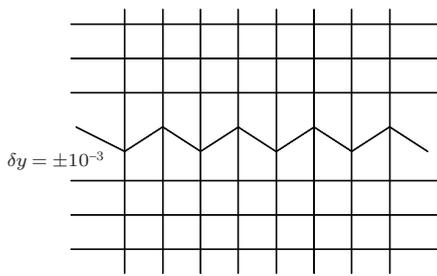


图2 Quirk 奇偶失联问题网格示意 (局部放大)

Pandolfi 和 D'Ambrosio 针对多种迎风格式, 采用线性分析法对扰动物理量 $(\hat{\rho}, \hat{u}, \hat{p})$ 的衰减特性进行了理论分析 [8]. 本文应用该方法对两种 K-CUSP 格式的扰动物理量衰减特性进行了分析, 试图得到格式激波稳定的数值条件. 如图3所示, 在二维平面中, 沿 y 方向单位网格相邻分布, 初始物理量为: $\rho_0 = 1, u_0 \neq 0, v_0 = 0$ 以及 $p_0 = 1$. 在网格 (N, M) 中有 $\rho = 1 - \hat{\rho}, u = u_0 - \hat{u}, v = 0$ 以及 $p = 1 - \hat{p}$, 在网格 $(N, M + 1)$ 中有 $\rho = 1 + \hat{\rho}$,

$u = u_0 + \hat{u}, v = 0$ 以及 $p = 1 + \hat{p}$. 忽略切向速度扰动即 $\hat{v}^0 = 0$. 界面 $M_{1/2}$ 处的数值通量为 $\mathbf{G} = (\rho v, \rho uv, p + \rho v^2, v(p + E))^T$, 求解方程 (3), 得到两种新型通量分裂格式扰动物理量的表达式, 见表1. 其中, CFL 数 $v = \sqrt{\gamma} \frac{Dt}{Dy}$, γ 为比热比, 若流体为空气则取值为1.4.

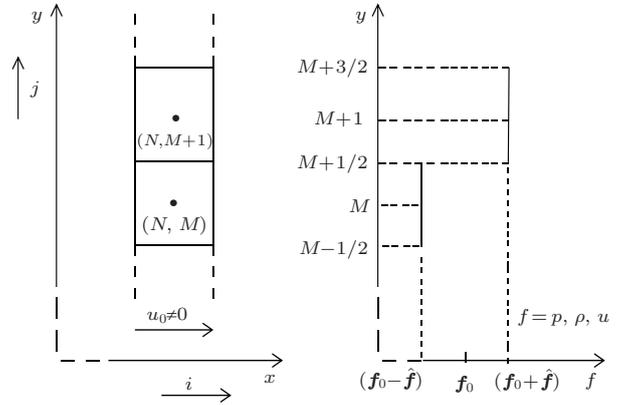


图3 扰动物理量线性分析示意 [8]

表1 两种格式扰动物理量的线性表达式

数值格式	K-CUSP-T	K-CUSP-X
密度扰动	$\hat{\rho}^{k+1} = \hat{\rho}^k - \frac{2v}{\gamma} \hat{p}^k$	$\hat{\rho}^{k+1} = \hat{\rho}^k - \frac{2v}{\gamma} \hat{p}^k$
速度扰动	$\hat{u}^{k+1} = \hat{u}^k$	$\hat{u}^{k+1} = \left(1 - \frac{2v}{\gamma}\right) \hat{u}^k$
压力扰动	$\hat{p}^{k+1} = (1 - 2v) \hat{p}^k$	$\hat{p}^{k+1} = (1 - 2v) \hat{p}^k$

图4—图6给出了不同初始扰动量的情况下 K-CUSP-T 的扰动衰减特性曲线. 情况一: 如图4所示, 在初始扰动 \hat{p}^0 与 \hat{u}^0 为0, 而初始密度扰动 $\hat{\rho}^0$ 不为0 ($\hat{\rho}^0 = 0.01$) 的情况下, 密度扰动保持初始值, 随时间步 $K \rightarrow \infty$ 而保持不变, 扰动量既没有收敛也没有被放大. 压力扰动与速度扰动均保持初始值为0. 情况二: 图5给出了在初始扰动 $\hat{\rho}^0$ 与 \hat{u}^0 为0, 而初始压力扰动 \hat{p}^0 不为0 ($\hat{p}^0 = 0.01$) 的情况下, 物理量扰动衰减特性曲线. 可以看出, 密度扰动在压力扰动的作用下逐渐增大至有限值 $\hat{\rho}^\infty = -\hat{p}^0$, 随后保持不变. 压力扰动很快地衰减至0, 而速度扰动保持初始值0不变. 情况三: 如图6所示, 在初始扰动 $\hat{\rho}^0$ 与 \hat{p}^0 为0, 而初始速度扰动 \hat{u}^0 不为0 ($\hat{u}^0 = 0.01$) 的情况下, 密度扰动和压力扰动均保持初始值为0, 而速度扰动保持初始值不变, 随时间步 K 增加不发生衰减. 对于 K-CUSP-X 格式而言, 对应于情况一与情况二的扰动量衰减

特性曲线与K-CUSP-T一致, 因为两种方法的扰动量线性表达式是相同的(见表1). 不同的是, 对于情况三来说(如图7所示), 在初始扰动 $\hat{\rho}^0$ 与 \hat{p}^0 为0, 而初始速度扰动 \hat{u}^0 不为0的情况下, 密度扰动和压力扰动均保持初始值为0, 而速度扰动很快衰减为0, 随后保持不变, 即速度扰动具有衰减性.

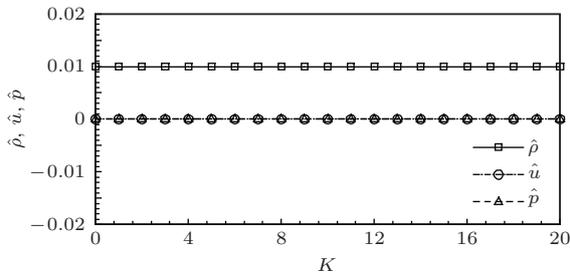


图4 K-CUSP-T 格式的扰动物理量衰减特性 ($\hat{\rho}^0 \neq 0$, $\hat{u}^0 = 0$, $\hat{p}^0 = 0$, $\nu = 0.2$)

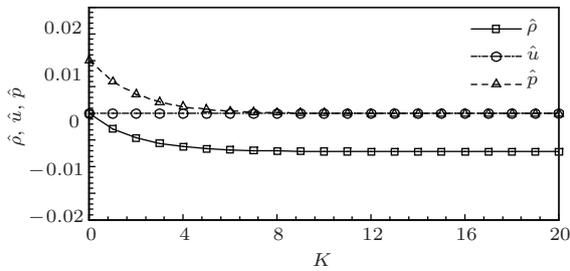


图5 K-CUSP-T 格式的扰动物理量衰减特性 ($\hat{\rho}^0 = 0$, $\hat{u}^0 = 0$, $\hat{p}^0 \neq 0$, $\nu = 0.2$)

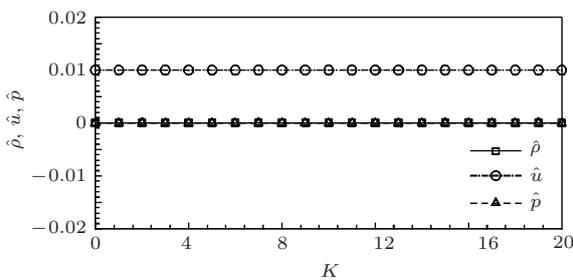


图6 K-CUSP-T 格式的扰动物理量衰减特性 ($\hat{\rho}_0 = 0$, $\hat{u}_0 \neq 0$, $\hat{p}_0 = 0$, $\nu = 0.2$)

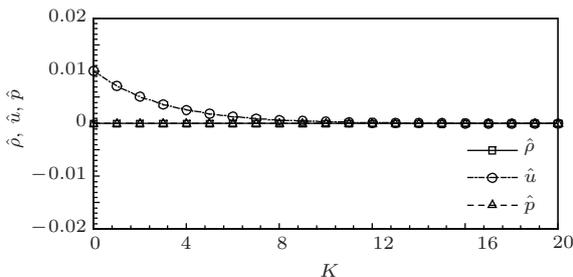


图7 K-CUSP-X 格式的扰动物理量衰减特性 ($\hat{\rho}_0 = 0$, $\hat{u}_0 \neq 0$, $\hat{p}_0 = 0$, $\nu = 0.2$)

研究发现, 正是不同的速度扰动量衰减特性决定了两种通量分裂格式是否具有激波稳定性. 图8给出了两种通量分裂格式计算Quirk奇偶失联问题的数值结果, 可以看出K-CUSP-T出现了激波不稳定现象, 激波后流场受到严重扰动, 激波型面扭曲. 而K-CUSP-X可以很好地捕捉激波, 没有发生激波不稳定现象. 值得一提的是, Quirk在分析Roe格式激波稳定性问题时, 认为密度扰动与压力扰动的相互作用是导致Roe格式无法正确捕捉激波的原因^[22]. 然而, 根据上述分析, 我们发现K-CUSP-X格式与Roe格式具有相同的密度扰动和压力扰动衰减特性(见附录A), 其密度扰动和压力扰动的相互作用性质也是一样的, 但是K-CUSP-X格式却具有很好的激波稳定性而Roe格式则不然, 可见密度扰动与压力扰动的衰减特性对格式激波稳定性并没有显著的影响. 此外, Roe格式与K-CUSP-T格式的速度扰动均不具衰减性, 而两者也同样不具有激波稳定性. 可以看出, 速度扰动的衰减特性对于决定格式是否具有激波稳定性有着关键的作用. 事实上, 对于其他迎风格式来说, 速度扰动的衰减特性在决定格式是否激波稳定时同样起着主导作用. 附录A综合给出了多种迎风格式的速度扰动衰减特性和激波稳定性的分析结果. 分析后发现激波稳定、鲁棒性好的格式, 其速度扰动量具备衰减性, 而那些容易发生激波不稳定和“红玉”现象的格式, 其速度扰动量不衰减. 因此我们有如下推论:

推论 迎风格式激波稳定的充分条件为: 速度扰动量具有衰减性, 当 $K \rightarrow \infty$ 时速度扰动 \hat{u}^∞ 为0.

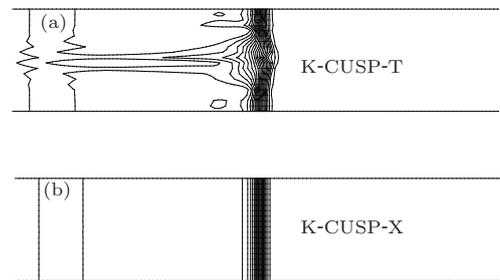


图8 Quirk 奇偶失联问题密度等值线示意

4.2 “红玉”现象的发生机理

在本节中, 我们结合高超声速钝头绕流问题探讨推论的合理性, 并试图给出低耗散格式发生“红玉”

玉”现象的可能原因. Xu和Li在分析定常激波问题时,将激波层分为亚声速区和超声速区,流体流动路径看作为拟一维的喷管(如图9所示)^[21].根据气体动力学关系有

$$\frac{dU}{U} = -\frac{1}{1-M^2} \frac{dS}{S} \quad (18)$$

以及

$$\frac{dP}{P} = \frac{\gamma M^2}{1-M^2} \frac{dS}{S}. \quad (19)$$

Xu和Li认为迎风格式之所以发生“红玉”现象是因为在亚声速区,速度的增加($dU > 0$)必然伴随着压力的下降($dP < 0$),由此形成了局部低压区,低耗散格式在与激波面平行的方向上没有足够的数值黏性来减弱速度梯度,导致周围的流体在压力梯度的驱动下流向低压区使得当地速度继续增加而压力继续下降,反之亦然,由此导致了不稳定现象的产生.

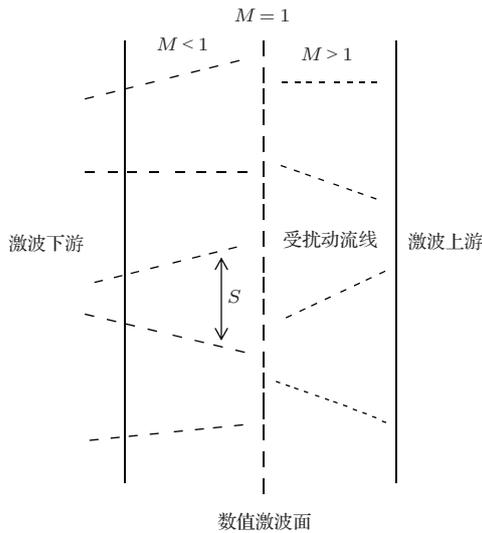


图9 Xu和Li的二维激波数值结构示意图^[21]

假定沿流线方向当地速度与压力的变化分别来自速度扰动与压力扰动,即 $dU = \hat{u}^k$, $dP = \hat{p}^k$.结合4.1节的线性分析法,联立(18), (19)式可以得到当地速度扰动量与压力扰动量的关系式:

$$\hat{p}^k = -u_0 \hat{u}^k. \quad (20)$$

速度扰动量的衰减关系为

$$\hat{u}^{k+1} = \alpha \hat{u}^k, \quad (21)$$

α 为衰减系数, $0 < \alpha < 1$ 时,速度扰动量具有衰减性, $\alpha = 1$ 时,速度扰动量临界稳定.联立(20)和

(21)式以及两种K-CUSP格式的压力扰动量衰减特性表达式,则有

$$\hat{p}^{k+1} = (1-2\nu) \hat{p}^k - u_0 \alpha^{k+1} \hat{u}^0. \quad (22)$$

进一步求解(22)式有

$$\hat{p}^{k+1} = (1-2\nu)^{k+1} \hat{p}^0 - \frac{(1-2\nu)^{k+1} \alpha - \alpha^{k+2}}{1-2\nu-\alpha} u_0 \hat{u}^0, \quad (23)$$

因此,

$$\hat{p}^\infty = \frac{\alpha^\infty}{1-2\nu-\alpha} u_0 \hat{u}^0. \quad (24)$$

从(21)与(24)式可以看出,如果速度扰动量具有衰减性即 $0 < \alpha < 1$,则 $\hat{u}^\infty = 0$, $\hat{p}^\infty = 0$,沿流线方向当地速度与压力变化均为0,即 $dU = 0$ 且 $dP = 0$,”红玉”发生的过程得到抑制.如果速度扰动量不具衰减性即 $\alpha = 1$,则 $\hat{u}^\infty = \hat{u}^0$, $\hat{p}^\infty = -\frac{u_0}{2\nu} \hat{u}^0$,沿流线方向当地速度与压力变化均不为0,即 $dU \neq 0$,且 $dP \neq 0$,”红玉”现象发生.从4.1节的分析可知,K-CUSP-X格式的速度扰动量具有衰减性($0 < \alpha < 1$),在与激波平行的方向上有足够的数值黏性来抑制扰动,因而不会产生”红玉”等激波不稳定现象,而Toro的K-CUSP-T格式的速度扰动量不具衰减性($\alpha = 1$),在与激波平行的方向上没有足够的数值黏性来抑制扰动,速度扰动将随计算过程的推进而迅速累积,加速了激波不稳定现象的发生.

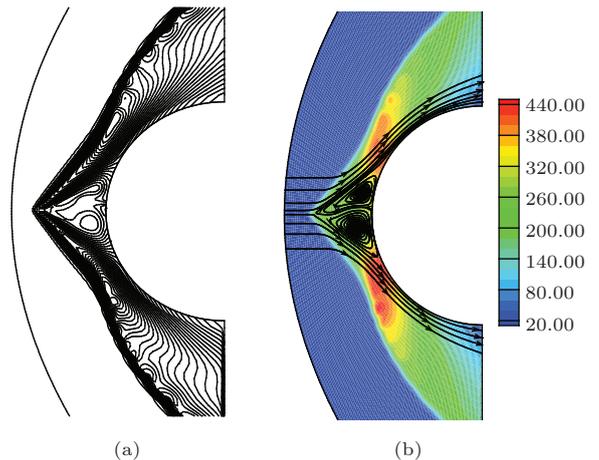


图10 (网刊彩色) K-CUSP-T钝头绕流问题结果 (a) 密度等值线示意; (b) 压力与部分流线示意

图10与图11给出了两种通量分裂格式计算高超声速钝头绕流问题($M_\infty = 20$)的结果.从图10中可以看出,K-CUSP-T格式发生了严重的

“红玉”现象, 头部附体激波变形严重. 激波后驻点区附近因速度扰动的累积形成局部低压区, 在逆压梯度和数值黏性的相互作用下, 流动发生分离形成涡旋. 而对于 K-CUSP-X 来说, 其速度扰动很快衰减为 0, 在激波后不会产生低压区等非物理流场结构. 如图 11 所示, K-CUSP-X 格式可以很好地捕捉激波型面, 流场结构清晰合理. 因此, 该推论是合理且有效的.

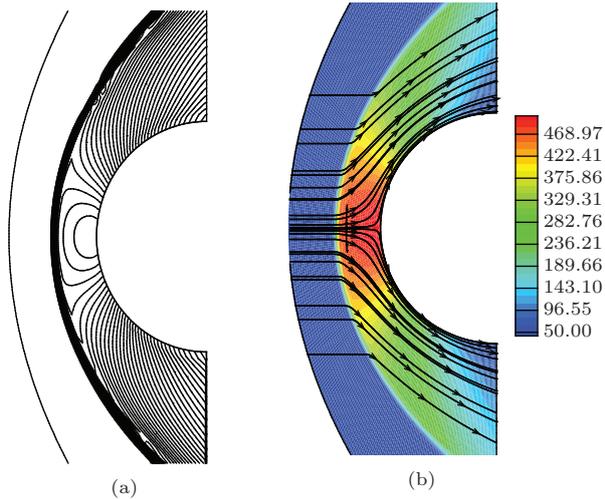


图 11 (网刊彩色) K-CUSP-X 钝头绕流问题结果 (a) 密度等值线示意; (b) 压力与部分流线示意

5 结 论

本文基于一种新型的通量项分裂方式, 提出了一种可以精确捕捉接触间断和激波的通量分裂格式 K-CUSP-X. 应用线性分析法分析了该方法在接触间断处的数值耗散性, 给出了该格式满足低耗散性的原因. 数值实验表明, 该格式可以精确捕捉接触间断, 因此可以用于边界层流动问题的模拟. 在对 Quirk 奇偶失联问题的分析基础上, 提出了该类通量分裂格式满足激波稳定的数值条件. 研究表明, 速度扰动量的衰减性是决定格式激波稳定的充分条件. 针对二维定常激波问题和超声速钝头绕流问题, 探讨了该结论的合理性, 数值实验进一步验证了该结论的正确性. 该结论对于分析已有迎风格式的激波稳定性和发展新型的激波捕捉格式有重要的参考价值.

感谢丁国昊博士为文中算例提供的基础计算平台.

附录 A

表 A1 给出了部分迎风格式对于 Quirk 奇偶失联问题的扰动物理量的线性表达式与激波稳定性的分析结果. 关于扰动物理量线性表达式的详细计算方法请参见文献 [8].

表 A1 迎风格式扰动物理量的线性表达式与激波稳定性

数值格式	扰动量线性表达式	速度扰动 是否具有 衰减性	格式是否 会发生 “红玉”
Roe	$\hat{\rho}^{k+1} = \hat{\rho}^k - \frac{2v}{\gamma} \hat{p}^k$ $\hat{u}^{k+1} = \hat{u}^k$ $\hat{p}^{k+1} = (1 - 2v) \hat{p}^k$	否	是
HLLC	$\hat{\rho}^{k+1} = \hat{\rho}^k - \frac{2v}{\gamma} \hat{p}^k$ $\hat{u}^{k+1} = \hat{u}^k$ $\hat{p}^{k+1} = (1 - 2v) \hat{p}^k$	否	是
Steger-Warming	$\hat{\rho}^{k+1} = \left(1 - \frac{v}{\gamma}\right) \hat{\rho}^k + \left(-\frac{v}{\gamma}\right) \hat{p}^k$ $\hat{u}^{k+1} = \left(1 - \frac{2v}{\gamma}\right) \hat{u}^k$ $\hat{p}^{k+1} = v \hat{\rho}^k + (1 - 3v) \hat{p}^k$	是	否
van Leer	$\hat{\rho}^{k+1} = \left(1 - \frac{v}{2}\right) \hat{\rho}^k + \left(-\frac{v}{2}\right) \hat{p}^k$ $\hat{u}^{k+1} = (1 - 2v) \hat{u}^k$ $\hat{p}^{k+1} = v \frac{\gamma}{\gamma + 1} \hat{\rho}^k + \left(1 - 3v \frac{\gamma}{\gamma + 1}\right) \hat{p}^k$	是	否
HUS	$\hat{\rho}^{k+1} = \hat{\rho}^k + \left(-\frac{v}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma}\right) \hat{p}^k$ $\hat{u}^{k+1} = \hat{u}^k$ $\hat{p}^{k+1} = \left(1 - v \frac{3\gamma - 1}{\gamma + 1}\right) \hat{p}^k$	否	是
HLL	$\hat{\rho}^{k+1} = (1 - 2v) \hat{\rho}^k$ $\hat{u}^{k+1} = (1 - 2v) \hat{u}^k$ $\hat{p}^{k+1} = (1 - 2v) \hat{p}^k$	是	否
AUSM-VEL	$\hat{\rho}^{k+1} = \left(1 + \frac{v}{2}\right) \hat{\rho}^k + \left(-\frac{v}{2}\right) \hat{p}^k$ $\hat{u}^{k+1} = \hat{u}^k$ $\hat{p}^{k+1} = \frac{v\gamma}{2} \hat{\rho}^k + \left(1 - \frac{v\gamma}{2}\right) \hat{p}^k$	否	是
AUSM+	$\hat{\rho}^{k+1} = \hat{\rho}^k$ $\hat{u}^{k+1} = \hat{u}^k$ $\hat{p}^{k+1} = \hat{p}^k$	否	是
AUSMD, AUSMV	$\hat{\rho}^{k+1} = \hat{\rho}^k - v \hat{p}^k$ $\hat{u}^{k+1} = \hat{u}^k$ $\hat{p}^{k+1} = (1 - v\gamma) \hat{p}^k$	否	是
K-CUSP-T	$\hat{\rho}^{k+1} = \hat{\rho}^k - \frac{2v}{\gamma} \hat{p}^k$ $\hat{u}^{k+1} = \hat{u}^k$ $\hat{p}^{k+1} = (1 - 2v) \hat{p}^k$	否	是
K-CUSP-X	$\hat{\rho}^{k+1} = \hat{\rho}^k - \frac{2v}{\gamma} \hat{p}^k$ $\hat{u}^{k+1} = (1 - 2v) \hat{u}^k$ $\hat{p}^{k+1} = (1 - 2v) \hat{p}^k$	是	否

参考文献

- [1] Tchien G, Fogang F, Burtschell Y, Woafu P 2014 *Comput. Phys. Commun.* **185** 479
- [2] Quan P C, Yi S H, Wu Y, Zhu Y Z, Chen Z 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 084703 (in Chinese) [全鹏程, 易仕和, 武宇, 朱杨柱, 陈植 2014 物理学报 **63** 084703]
- [3] Wu Y, Yi S H, Chen Z, Zhang Q H, Gang D D 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 184702 (in Chinese) [武宇, 易仕和, 陈植, 张庆虎, 冈敦殿 2013 物理学报 **62** 184702]
- [4] Zingg D W, Rango S D, Nemec M, Pulliam T H 2000 *J. Comput. Phys.* **160** 683
- [5] Fu Z, Liu K X, Luo N 2014 *Chin. Phys. B* **23** 020202
- [6] Park S H, Kwon J H 2003 *J. Comput. Phys.* **188** 524
- [7] Huang K B, Wu H, Yu H, Yan D 2011 *Int. J. Numer. Methods Fluids* **65** 1026
- [8] Pandolfi M, D' Ambrosio D 2001 *J. Comput. Phys.* **166** 271
- [9] Toro E F, Vázquez-Cendón M E 2012 *Comput. Fluids* **70** 1
- [10] Liou M S, Steffen C J 1993 *J. Comput. Phys.* **107** 23
- [11] Liou M S 1996 *J. Comput. Phys.* **129** 364
- [12] Liou M S 2006 *J. Comput. Phys.* **214** 137
- [13] Zha G C, Shen Y Q, Wang B Y 2011 *Comput. Fluids* **48** 214
- [14] Zha G C 2005 *AIAA J.* **43** 1137
- [15] Zha G C, Hu Z 2004 *AIAA J.* **42** 205
- [16] Zha G C, Bilgen E 1993 *Int. J. Numer. Methods Fluids* **17** 115
- [17] Mandal J C, Panwar V 2012 *Comput. Fluids* **63** 148
- [18] Sha S, Chen Z H, Xue D W 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 144701 (in Chinese) [沙莎, 陈志华, 薛大文 2013 物理学报 **62** 144701]
- [19] Kitamura K, Shima E, Roe P L 2012 *AIAA J.* **50** 2655
- [20] Liou M S 2000 *J. Comput. Phys.* **160** 623
- [21] Xu K, Li Z W 2001 *Int. J. Numer. Methods Fluids* **37** 1
- [22] Quirk J J 1994 *Int. J. Numer. Methods Fluids* **18** 555
- [23] Henderson S J, Menart J A 2007 *39th AIAA Thermophysics Conference* Miami, America June 25–28 2007 p3904

On the accuracy and robustness of a new flux splitting method*

Xie Wen-Jia[†] Li Hua Pan Sha Tian Zheng-Yu

(College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

(Received 5 May 2014; revised manuscript received 8 June 2014)

Abstract

The high speed flow problems usually involve complex flow phenomena, such as strong shock waves, shock-shock interactions, and shear layers. Prediction of these problems requires robust, efficient and accurate numerical methods. A robust flux splitting method capable of capturing crisp shock profile and exact contact surface is presented. Here, the flux vector of the Euler equation is split into convective and pressure parts according to the Toro's formulation. The accuracy of the numerical method at the contact discontinuity is examined first. Sufficient conditions of shock stability for this new method are obtained through a linear perturbation analysis. Several carefully chosen test problems are numerically investigated, and the numerical results demonstrate the accuracy and robustness of the proposed scheme.

Keywords: hypersonic, shock capturing, contact discontinuity, shock instability

PACS: 47.11.-j, 47.40.Ki, 47.20.Cq

DOI: 10.7498/aps.64.024702

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 0902010112008).

† Corresponding author. E-mail: wjxie_kingwen@126.com