

三稳系统的动态响应及随机共振

赖志慧 冷永刚

Dynamic response and stochastic resonance of a tri-stable system

Lai Zhi-Hui Leng Yong-Gang

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 200503 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.200503

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.200503>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I20>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

电感电流伪连续导电模式下 Buck 变换器的动力学建模与分析

Dynamical modeling and analysis of buck converter operating in pseudo-continuous conduction mode

物理学报.2015, 64(18): 180501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.180501>

基于有源广义忆阻的无感混沌电路研究

Inductorless chaotic circuit based on active generalized memristors

物理学报.2015, 64(17): 170503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.170503>

混沌信号的压缩感知去噪

Chaotic signal denoising in a compressed sensing perspective

物理学报.2015, 64(16): 160502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.160502>

基于数模混合的混沌映射实现

Chaotic map implementation based on digital-analog hybrid method

物理学报.2015, 64(16): 160501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.160501>

基于对偶数理论的资料同化新方法

A new data assimilation method based on dual-number theory

物理学报.2015, 64(13): 130502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.130502>

# 三稳系统的动态响应及随机共振\*

赖志慧<sup>1)2)†</sup> 冷永刚<sup>2)</sup>

1)(南昌大学机电工程学院, 南昌 330031)

2)(天津大学机械工程学院, 天津 300072)

(2015年4月22日收到; 2015年5月18日收到修改稿)

以平衡点参数  $p, q$  构造出一类对称三稳势函数, 进而提出微弱信号和噪声共同驱动下的三稳系统模型. 深入研究并总结参数  $p, q$  对势垒高度  $\Delta U_1, \Delta U_2$  及两势垒高度差的影响. 从定常输入的角度提出了系统稳态解曲线的概念, 并进一步研究低频谐波信号输入时系统的输出动态响应. 引入噪声, 三稳系统在合适的参数条件下实现随机共振, 从稳态解曲线的角度分析了噪声诱导的三稳系统随机共振机理. 最后研究了阻尼比  $k$  和平衡点参数  $p, q$  对系统随机共振的影响.

**关键词:** 三稳系统, 动态响应, 随机共振, 稳态解曲线

**PACS:** 05.45.-a, 05.40.-a, 02.60.Cb

**DOI:** 10.7498/aps.64.200503

## 1 引言

随机共振是自然界中众多非线性系统中由内或外噪声诱发的一种普遍现象. 在输入信号、噪声和非线性系统三者的协同作用下, 系统输出的信噪比将在某一噪声强度时出现峰值, 此时一部分噪声能量转移到信号上, 使原本微弱的信号强度大大增强, 产生随机共振.

随机共振概念最早由 Benzi 等<sup>[1-3]</sup> 提出, 此后, 研究人员不仅在实验中观察到随机共振现象<sup>[4,5]</sup>, 也不断提出新的随机共振理论<sup>[6,7]</sup>, 同时由于其对微弱信号的放大作用, 随机共振也广泛应用于微弱信号处理<sup>[8-10]</sup> 等诸多领域中.

微弱信号和噪声共同驱动的一维 Langevin 方程模型<sup>[1,2,6]</sup> 是最经典的随机共振模型, 而近十几年的研究中, 人们不断提出新的随机共振模型, 如单稳系统<sup>[11]</sup>、混沌系统<sup>[12]</sup>、时延系统<sup>[13]</sup>、二维 Duffing 系统<sup>[14]</sup> 等. 这些模型的提出极大地丰富了随机共振的理论, 也在很大程度上扩展了随机共振的应用, 如二维 Duffing 系统中可调的阻尼比参数大大提高了随机共振模型对不同噪声强度信号的

适应能力<sup>[15]</sup>. 近几年来, 三稳系统的研究逐渐兴起, 人们提出不同的三稳随机共振模型<sup>[16-19]</sup>. 但是一方面, 大多数研究侧重于利用实际的三稳系统模型实现振动能量采集<sup>[16]</sup>, 以仿真和实验分析为主, 而较少关注三稳系统模型本身的动力学特性和随机共振响应分析; 另一方面, 所提出的三稳模型并不规范, 在分析研究中存在诸多不便, 如文献<sup>[17, 18]</sup> 中系统的三稳势场结构在很大程度上依赖于系统参数的选择, 文献<sup>[19]</sup> 中很难从势函数推算出系统平衡点等关键信息, 因此有必要对三稳系统模型进行规范和统一; 此外, 已有成果对随机共振现象的研究也并不深入, 尤其是缺乏对系统产生随机共振的机理解释和参数分析.

针对三稳系统随机共振研究的必要性和局限性, 本文在此前研究的基础上, 以平衡点参数  $p, q$  构造出一类标准的对称三稳势函数, 进而提出微弱信号和噪声共同驱动下的三稳系统模型. 深入研究并总结参数  $p, q$  对势垒高度  $\Delta U_1, \Delta U_2$  及两势垒高度差的影响; 从定常输入的角度提出了系统稳态解曲线的概念, 并进一步研究低频谐波信号输入时系统的输出动态响应; 引入噪声, 三稳系统在合适的

\* 国家自然科学基金(批准号: 51275336)和天津市应用基础与前沿技术研究计划(批准号: 15JCZDJC32200)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: laizh@ncu.edu.cn

参数条件下实现随机共振, 从稳态解曲线的角度分析了噪声诱导的三稳系统随机共振机理; 最后, 研究了阻尼比  $k$  和平衡点参数  $p, q$  对系统随机共振的影响.

## 2 三稳系统的构建及其基本性质

图 1(a) 描述了一个典型的双稳势场结构. 系统由悬臂梁和一对完全相同的磁铁组成, 其中一块磁铁 A 黏接在悬臂梁的自由端, 另一块磁铁 B 固定, 且与悬臂梁高度一致. 在不考虑磁铁 A 重力对悬臂梁形变影响的前提下, 磁铁 A 具有一个不稳定平衡位置和如图所示的两个稳定平衡位置. 对系统施以纵向的外界激励, 磁铁 A 受到外界激励、悬臂梁阻尼力和磁铁 B 的磁场作用力的共同作用, 其纵向位移可用一个经典的双稳系统方程模型来描述.

在图 1(a) 结构的基础上, 如果再增加一个相同的磁铁 C, 且 B, C 两磁铁沿悬臂梁延长线对称布置, 如图 1(b) 所示. 此时系统变成一个三稳势场结构, 在不考虑磁铁 A 重力对悬臂梁影响的前提下, 磁铁 A 具有两个不稳定平衡位置和如图所示的三个稳定平衡位置. 此时对系统施以纵向的外界激励, 磁铁 A 将受到外界激励、悬臂梁阻尼力和磁铁 B, C 共同施加的磁场作用力的共同作用. 容易知道, 其纵向位移可以用一个三稳系统方程模型来描述.

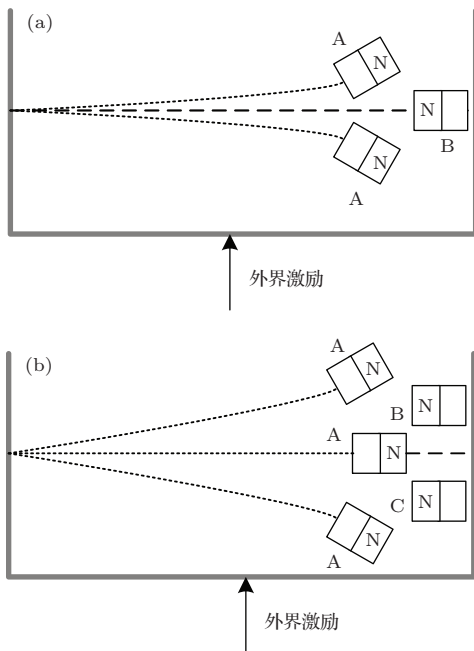


图 1 双稳势场结构 (a) 和三稳势场结构 (b)

Fig. 1. The bi-stable structure (a) and tri-stable structure (b).

为了更容易理解图 1(b) 所示三稳势场结构中磁铁 A 的纵向输出位移和动力学特性, 我们从 Brownian 粒子运动的角度构建三稳系统模型并进行分析研究. 考虑一个单位质量 Brownian 粒子运动的宏观方程:

$$\ddot{x}(t) + k\dot{x}(t) = -\frac{dU(x)}{dx} + A \sin(2\pi f_0 t + \phi) + \sqrt{2D}\xi(t), \quad (1)$$

方程中,  $k$  是阻尼比;  $U(x)$  是粒子所处势场的势函数;  $s(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \phi)$  表示幅值为  $A$ 、频率为  $f_0$ 、初相位为  $\phi$  的周期驱动力;  $n(t) = \sqrt{2D}\xi(t)$  表示噪声强度为  $D$  的随机激励, 其中  $\xi(t)$  是均值为 0 方差为 1 的高斯白噪声. 这样,  $x(t)$  就表示单位质量的 Brownian 粒子在阻尼力、势场作用力、周期驱动力和随机噪声激励的共同作用下的输出位移函数.

构造一个如图 2 所示的对称三稳势函数, 势场存在三个稳定平衡点 ( $x_{s1}, x_{s2}, x_{s3}$ ) 和两个不稳定平衡点 ( $x_{u1}, x_{u2}$ ), 形成被势垒分隔开的三稳势场结构. 中间势阱的深度为  $\Delta U_1$ , 两边对称势阱的深度为  $\Delta U_2$ ,  $\Delta U_1$  和  $\Delta U_2$  亦可理解为势阱间的势垒高度.

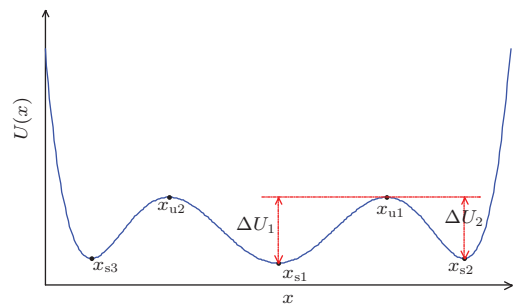


图 2 三稳势函数

Fig. 2. The tri-stable potential function.

从图 2 可以看出, 势函数的稳定平衡点就是其极小值点, 而不稳定平衡点就是其极大值点. 取大于零的实数  $p$  和  $q$ , 且  $p < q$ . 设  $x_{s1} = 0$ ,  $x_{u1, u2} = \pm p$ ,  $x_{s2, s3} = \pm q$ , 三稳势函数需要满足

$$\begin{cases} U'(x) = mx(x+p)(x-p)(x+q)(x-q), \\ U''(p) < 0, \\ U''(q) > 0. \end{cases} \quad (2)$$

为简化分析, 取  $m = 1$ . 设  $a = p^2 q^2$ ,  $b = p^2 + q^2$ , 容易得到

$$U(x) = \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{4}bx^4 + \frac{1}{6}x^6, \quad (3)$$

这就是三稳势场的函数表达式. 将其代入(1)式, 得到三稳势场下的Brownian粒子运动方程

$$\ddot{x} + k\dot{x} + ax - bx^3 + x^5 = A \sin(2\pi f_0 t + \phi) + \sqrt{2D}\xi(t). \quad (4)$$

对三稳势场进行进一步的深入分析. 将  $x_{s1} = 0$ ,  $x_{u1,u2} = \pm p$  和  $x_{s2,s3} = \pm q$  代入势函数(3)式, 可以得到势场平衡稳定点和不平衡稳定点处的势场强度:

$$\begin{cases} U(x_{s1}) = 0, \\ U(x_{u1,u2}) = U(\pm p) = \frac{1}{12}p^4(3q^2 - p^2), \\ U(x_{s2,s3}) = U(\pm q) = \frac{1}{12}q^4(3p^2 - q^2), \end{cases} \quad (5)$$

进而得到势垒高度

$$\begin{cases} \Delta U_1 = U(x_{u1}) - U(x_{s1}) \\ \quad = \frac{1}{12}p^4(3q^2 - p^2), \\ \Delta U_2 = U(x_{u1}) - U(x_{s2}) \\ \quad = \frac{1}{12}(p+q)^3(q-p)^3. \end{cases} \quad (6)$$

显然,  $\Delta U_2$  是  $p \in (0, q)$  的单调递减函数, 是  $q \in (p, +\infty)$  的单调递增函数;  $\Delta U_1$  是  $q \in (p, +\infty)$  的单调递增函数. 将  $\Delta U_1$  对  $p$  求导有

$$\frac{d\Delta U_1}{dp} = \frac{1}{2}p^3(2q^2 - p^2). \quad (7)$$

显然, 在  $p \in (0, q)$  区间内,  $d\Delta U_1/dp > 0$  恒成立, 所以  $\Delta U_1$  是  $p \in (0, q)$  的单调递增函数.  $\Delta U_1$  和  $\Delta U_2$  随参数  $p$  和  $q$  变化的单调性如表 1 所列.

表 1  $\Delta U_1$  和  $\Delta U_2$  随参数  $p$  和  $q$  变化的单调性

Table 1. The monotonicity of  $\Delta U_1$  and  $\Delta U_2$  against parameters  $p$  and  $q$ .

	$p \in (0, q)$	$q \in (p, +\infty)$
$\Delta U_1$	单调递增	单调递增
$\Delta U_2$	单调递减	单调递增

表 2 势垒高度差随参数  $p, q$  的调节规律

Table 2. The rules for adjusting potential barrier height with parameters  $p$  and  $q$ .

$0 < p < \sqrt{3}q/3$ ( $q > \sqrt{3}p$ )	$\sqrt{3}q/3 < p < \sqrt{2}q/2$ ( $\sqrt{2}p < q < \sqrt{3}p$ )	$\sqrt{2}q/2 < p < q$ ( $p < q < \sqrt{2}p$ )
$\Delta U_1 < \Delta U_2$	$\Delta U_1 > \Delta U_2$	$\Delta U_1 > \Delta U_2$
$ \Delta U_1 - \Delta U_2 $ 随 $p$ 单调递减	$ \Delta U_1 - \Delta U_2 $ 随 $p$ 单调递增	$ \Delta U_1 - \Delta U_2 $ 随 $p$ 单调递增
$ \Delta U_1 - \Delta U_2 $ 随 $q$ 单调递增	$ \Delta U_1 - \Delta U_2 $ 随 $q$ 单调递增	$ \Delta U_1 - \Delta U_2 $ 随 $q$ 单调递减

注意到

$$\begin{aligned} \Delta U_1 - \Delta U_2 &= U(x_{s2}) - U(x_{s1}) \\ &= \frac{1}{12}q^4(3p^2 - q^2), \end{aligned} \quad (8)$$

易知当  $0 < p < \sqrt{3}q/3$  时,  $\Delta U_1 - \Delta U_2 < 0$ , 即中间的势阱比两边的势阱浅; 而当  $\sqrt{3}q/3 < p < q$  时,  $\Delta U_1 - \Delta U_2 > 0$ , 中间的势阱比两边的势阱深. 由于随着  $p$  的增大,  $\Delta U_1$  单调递增, 而  $\Delta U_2$  单调递减, 因此在固定  $q$  而增大  $p$  的过程中, 必然存在从中间势阱较两边势阱浅向中间势阱较两边势阱深的变化, 两势阱恰好等深的点位于  $p = \sqrt{3}q/3$  处, 如图 3(a) 所示. 类似地, 当  $p < q < \sqrt{3}p$  时,  $\Delta U_1 - \Delta U_2 > 0$ , 中间的势阱比两边的势阱深; 当  $q > \sqrt{3}p$  时,  $\Delta U_1 - \Delta U_2 < 0$ , 中间的势阱比两边的势阱浅. 因此在固定  $p$  而增大  $q$  的过程中, 存在从中间势阱较两边势阱深向中间势阱较两边势阱浅的变化, 两势阱恰好等深的点位于  $q = \sqrt{3}p$  处, 如图 3(b) 所示. 这样我们就可以得到势阱高度差的调节规律: 满足  $0 < p < \sqrt{3}q/3$  ( $q > \sqrt{3}p$ ) 时, 三稳势函数中间势阱比两边势阱浅, 此时固定另一参数不变, 通过减小  $p$  或增大  $q$  可以增大两势垒高度差; 满足  $\sqrt{3}q/3 < p < q$  时, 三稳势函数中间势阱比两边势阱深, 此时固定  $q$ , 通过增大  $p$  可以增大两势垒高度差, 而固定  $p$  时, 减小  $q$  会使两势垒高度差先增后减, 其临界值即为(8)式的极点, 由

$$\frac{d(\Delta U_1 - \Delta U_2)}{dq} = \frac{1}{2}q^3(2p^2 - q^2) = 0 \quad (9)$$

易得  $q = \sqrt{2}p$ , 此时两势垒高度差取得最大值

$$\begin{aligned} &(\Delta U_1 - \Delta U_2)_{\max} \\ &= (\Delta U_1 - \Delta U_2)|_{q=\sqrt{2}p} = \frac{1}{3}p^6. \end{aligned} \quad (10)$$

势垒高度差随参数  $p, q$  的调节规律总结于表 2 中.

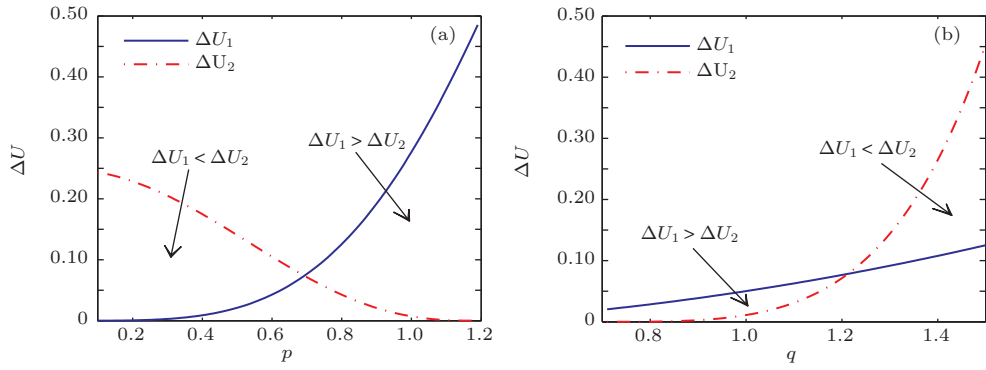


图3 势垒高度随参数  $p, q$  的变化规律 (a)  $q = 1.2$  时,  $\Delta U_1$  和  $\Delta U_2$  随参数  $p$  的变化曲线; (b)  $p = 0.7$  时,  $\Delta U_1$  和  $\Delta U_2$  随参数  $q$  的变化曲线

Fig. 3. The change curves of potential barrier height  $\Delta U_1$  and  $\Delta U_2$  against parameters (a)  $p$  when  $q = 1.2$  and (b)  $q$  when  $p = 0.7$ .

### 3 三稳系统的动态响应及随机共振

#### 3.1 三稳系统的稳态解曲线

为研究三稳系统(4)式的动态响应, 首先考虑定常输入的情况. 在方程(4)中, 等号右端设为常数  $r$ , 从而得到定常激励的三稳系统方程:

$$\ddot{x} + k\dot{x} + ax - bx^3 + x^5 = r. \quad (11)$$

将其改写为状态空间的动力学方程形式:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -ky - ax + bx^3 - x^5 + r. \end{cases} \quad (12)$$

从Brownian粒子运动的角度来看, 方程(11)和(12)的稳态响应意味着Brownian粒子运动的速度和加速度均为0, 即

$$\begin{cases} \dot{x} = y = 0, \\ \dot{y} = -ky - ax + bx^3 - x^5 + r = 0, \end{cases} \quad (13)$$

等价于

$$\begin{cases} -ax + bx^3 - x^5 + r = 0, \\ y = 0. \end{cases} \quad (14)$$

这说明三稳系统方程(11)的稳态解等价于方程(14)的解. 由于参数  $a, b, r$  确定时, 方程(14)中第一式可解得  $x$  为一常数, 则方程中第二式  $y = \dot{x} = 0$  显然成立. 那么, 方程

$$-ax + bx^3 - x^5 + r = 0 \quad (15)$$

就是三稳系统方程(11)稳态解的隐式表达式, 换句话说, 方程(15)的解正是三稳系统方程(11)的稳态

解. 需要注意的是, 从三稳系统方程(11)被常量  $r$  调制后的势函数

$$V(x) = ax^2/2 - bx^4/4 + x^6/6 - rx \quad (16)$$

可以看出, 方程(15)实际上等价于  $dV(x)/dx = 0$ . 为便于理解, 我们在图4(a)中绘出当  $p = 0.5, q = 1.2, r = 0.04$  时, 三稳系统(11)式被常量  $r$  调制前的势函数  $U(x)$  和调制后的势函数  $V(x)$ , 此时  $\Delta U_1 < \Delta U_2$ .  $U(x)$  的极小值点  $x_{s1} = 0, x_{s2, s3} = \pm q$ , 极大值点  $x_{u1, u2} = \pm p$ . 而由于被常量  $r$  调制,  $V(x)$  的极值点也随之变化, 在此参数条件下  $V(x)$  同样有三个极小值点 ( $x'_{s1}, x'_{s2}$  和  $x'_{s3}$ ) 和两个极大值点 ( $x'_{u1}$  和  $x'_{u2}$ ). 显然, 这些极值点的横坐标值正是方程(15)的解, 也就是三稳系统方程(11)的响应解的可能形式.

由于方程中高阶项的存在, 从方程(15)不易求出  $x$  的显式表达式, 因此考虑以图解法对其进行求解. 定义曲线

$$\begin{cases} g_1(x) = ax - bx^3 + x^5, \\ g_2 = r. \end{cases} \quad (17)$$

在与图4(a)相同的参数条件下, 两曲线如图4(b)所示. 易知  $g_1$  与势函数  $U(x)$  的导数  $dU(x)/dx$  相等, 其与  $x$  轴的5个交点的横坐标值对应于  $U(x)$  的5个极值点位置; 而  $g_1$  与  $g_2$  交点的横坐标值  $x$  就是方程(15)的解, 对应于图4(a)中  $V(x)$  的极值点位置, 亦即三稳系统方程(11)的响应解的可能形式.

在  $g_1$  与  $g_2$  的5个交点中,  $x'_{u1}$  和  $x'_{u2}$  对应于势函数  $V(x)$  的极大值点, 也是其不稳定平衡点, 在任何轻微扰动下, Brownian粒子都会偏离该平衡点, 实际上是三稳系统方程(11)的非稳态解. 只有中间和两侧的曲线交点横坐标  $x'_{s1}, x'_{s2}$  和  $x'_{s3}$  是方

程(11)的稳态解, 对应于 $V(x)$ 的稳态平衡点, 即调制后的势阱位置. 实际上, 三稳系统方程(11)在经历一段暂态过程的演化之后, 只可能存在一个稳态解,  $x'_{s1}$ ,  $x'_{s2}$ 和 $x'_{s3}$ 是该稳态解的三种可能形式, 方程(11)的输出响应稳定在哪一个稳态解, 是由初始条件决定的.

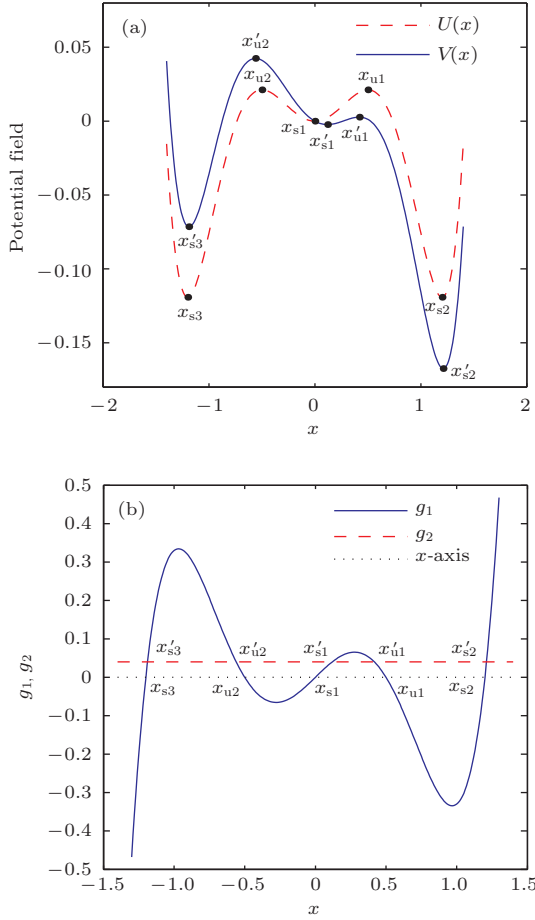


图4 三稳系统的势函数和稳态图解法示意图 (a) 三稳系统被常量 $r$ 调制前和调制后的势函数; (b) 图解法求解三稳系统方程示意图

Fig. 4. (a) The potential function of tri-stable system before and after modulated by invariable  $r$ ; (b) the graphical method to solve the tri-stable system equation.

注意到当常量 $r$ 取值不同时,  $g_1$ 和 $g_2$ 曲线的交点数量可能发生变化, 其临界值等于曲线 $g_1$ 取得极值时的曲线纵坐标值. 令

$$\frac{dg_1(x)}{dx} = a - 3bx^2 + 5x^4, \quad (18)$$

可解得曲线 $g_1(x)$ 的四个极值点位置:

$$\begin{cases} x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{3b - \sqrt{9b^2 - 20a}}{10}}, \\ x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{3b + \sqrt{9b^2 - 20a}}{10}}, \end{cases} \quad (19)$$

其中 $x_1$ 和 $x_2$ 表示距离原点更近的两个极值点横坐标, 而 $x_3$ 和 $x_4$ 表示距离原点更远的两个极值点横坐标. 定义

$$\begin{cases} r_{C1} = g_1(x_1), \\ r_{C2} = g_1(x_4) \end{cases} \quad (20)$$

为常量 $r$ 的两个临界值, 显然 $r_{C1} > 0$ ,  $r_{C2} > 0$ . 在图4参数条件下, 计算得到 $x_{1,2} = \pm 0.2772$ ,  $r_{C1} = 0.0654$ ,  $x_{3,4} = \pm 0.9681$ ,  $r_{C2} = 0.3345$ .

定义 $\Delta r_C = r_{C1} - r_{C2}$ , 图5绘出了 $\Delta r_C$ 与参数 $p, q$ 的对应关系. 从图5中可以看出, 当固定参数 $q$ 时,  $\Delta r_C$ 随着参数 $p$ 的增大而增大, 呈正相关; 当固定参数 $p$ 时, 随着参数 $q$ 的增大,  $\Delta r_C$ 先是短暂地增大然后迅速衰减. 整体而言, 当 $p, q$ 取值较为接近时,  $\Delta r_C > 0$ , 即 $r_{C1} > r_{C2}$ . 此时, 若 $p, q$ 取值较小, 则 $\Delta U_1, \Delta U_2$ 和 $\Delta r_C$ 都较小, 不利于后文所研究系统随机共振的产生; 若 $p, q$ 取值较大, 则 $\Delta U_1$ 和 $\Delta r_C$ 较大,  $\Delta U_2$ 却较小, 系统很容易退化为单稳系统, 亦不利于随机共振的产生. 因此, 本文中只考虑 $\Delta r_C < 0$ , 即 $r_{C1} < r_{C2}$ 的情况.

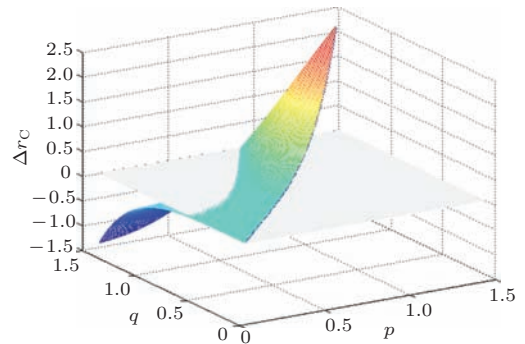


图5  $\Delta r_C$ 与参数 $p, q$ 的对应关系

Fig. 5. The correspondence of  $\Delta r_C$  against parameters  $p$  and  $q$ .

假设 $r_{C1} < r_{C2}$ . 当 $|r| < r_{C1}$ 时, 曲线 $g_1$ 与 $g_2$ 有5个交点,  $V(x)$ 为图4(a)所示的三稳势场; 当 $|r| = r_{C1}$ 时, 曲线 $g_1$ 与 $g_2$ 的交点数退化为4个,  $V(x)$ 在 $x'_{s1}$ 处的极小值点将变成拐点,  $V(x)$ 将退化为双稳势场; 当 $r_{C1} < |r| < r_{C2}$ 时, 曲线 $g_1$ 与 $g_2$ 有3个交点,  $V(x)$ 保持双稳势场结构; 当 $|r| = r_{C2}$ 时, 曲线 $g_1$ 与 $g_2$ 的交点数进一步退化为2个,  $V(x)$ 在 $x'_{s2}$ (或 $x'_{s3}$ )处的极小值点也将变成拐点,  $V(x)$ 将退化为单稳势场; 最后, 当 $|r| > r_{C2}$ 时,  $V(x)$ 将保持单稳势场结构. 曲线 $g_1$ 与 $g_2$ 的交点数目及 $V(x)$ 的势场结构类型与常量 $r$ 的关系总结于表3中.

表3  $r_{C1} < r_{C2}$  时, 曲线  $g_1$  与  $g_2$  的交点数目及  $V(x)$  的势场结构类型与常量  $r$  的关系  
 Table 3. The intersection numbers of  $g_1$  and  $g_2$ , the potential structure form of  $V(x)$  and their relationships with invariable  $r$  under the condition of  $r_{C1} < r_{C2}$ .

	$ r  < r_{C1}$	$ r  = r_{C1}$	$r_{C1} <  r  < r_{C2}$	$ r  = r_{C2}$	$ r  > r_{C2}$
$g_1$ 与 $g_2$ 的交点数	5	4	3	2	1
$V(x)$ 的势场结构类型	三稳势场	双稳势场	双稳势场	单稳势场	单稳势场

基于以上分析, 我们定义曲线  $g_1(x)$  为三稳系统方程的稳态解曲线. 对于定常激励的三稳系统方程 (11), 系统输出响应等于  $g_1(x)$  与输入量曲线  $g_2 = r$  的某一稳定交点.

### 3.2 基于稳态解曲线的三稳系统动态响应分析

在方程 (4) 中, 令  $D = 0$ , 考虑仅谐波信号输入的三稳系统方程:

$$\ddot{x} + k\dot{x} + ax - bx^3 + x^5 = A \sin(2\pi f_0 t + \phi), \quad (21)$$

可以看出, 系统输入  $sn(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \phi)$  随时间  $t$  变化. 在任意  $t = t_p$  时刻, 方程 (21) 都可以理解成形如方程 (11) 的定常输入方程, 其中  $r = sn(t_p)$ . 假设  $f_0$  足够小, 那么系统输入的是一个极缓变且连续的谐波信号, 我们可以合意地认为在任意  $t = t_p$  时刻, 系统的输出响应都能够稳定在系统的稳定解, 即输入量曲线  $g_2 = sn(t_p)$  与  $g_1$  的某一稳定交点上. 那么, 将这样无数个稳态解  $x_s$  按照时间  $t$  的顺序联系起来, 可以得到一条  $x_s-t$  曲线, 这就是三稳系统方程 (21) 的输出响应解.

在方程 (21) 中, 令  $k = 0.5$ ,  $p = 0.5$ ,  $q = 1.2$ ,  $f_0 = 0.01$  Hz,  $\phi = 0$ , 信号采样频率  $f_s = 5$  Hz, 计算点数  $N = 5000$ . 采用 4 阶 Runge-Kutta 算法对方程进行数值求解, 设信号初值  $x_0 = \dot{x}_0 = 0$ , 当  $A = 0.04$  ( $A < r_{C1}$ ) 时, 系统的输入信号和输出响应如图 6(b) 和 (c) 所示, 二者可以通过系统的稳态解曲线  $g_1$  (图 6(a)) 建立一一对应的映射关系, 分析如下.

系统输入信号图 6(b) 中每一点的横坐标表示该时刻图 6(a) 中的曲线  $g_2$ . 初始时刻系统输出位于稳态解  $x'_{s1} = 0$  处; 在第 1 个  $1/4$  周期, 随着时间  $t$  增大, 系统输入逐渐增大, 相当于图 6(a) 中曲线  $g_2$  逐渐左移, 这个过程中两曲线交点的横坐标即稳态解  $x'_{s1}$  沿着曲线  $g_1$  逐渐增大, 那么系统输出逐渐增大, 直到  $g_2 = A$  时达到最大; 类似地, 在第 2 个和第 3 个  $1/4$  周期内, 随着时间  $t$  增大, 系统输入逐渐

减小, 相当于图 6(a) 中曲线  $g_2$  逐渐右移, 这个过程中稳态解  $x'_{s1}$  沿着曲线  $g_1$  逐渐减小, 那么系统输出逐渐减小, 直到  $g_2 = -A$  时达到最大; 在第 4 个  $1/4$  周期内, 系统输入开始增大, 系统输出也逐渐增大. 这样完成一个周期循环并继续下去, 系统输出就被限制在  $g_1$  和  $g_2$  曲线交点的两个极限位置之间, 在中间势阱实现小幅周期振荡, 其振荡周期与信号周期一致.

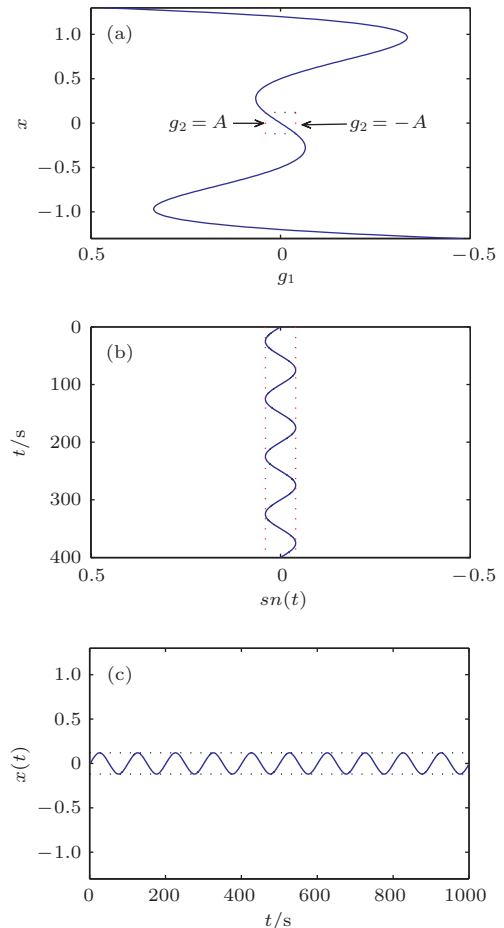


图 6  $A < r_{C1}$  时, 三稳系统方程的动态响应映射图 (a) 稳态解曲线; (b) 系统输入信号; (c) 系统输出信号  
 Fig. 6. The dynamic response of tri-stable system when  $A < r_{C1}$ : (a) the steady-state solution curve; (b) the system input signal; (c) the system output signal.

需要指出的是, 从图6可知, 在  $g_2 = [-A, A]$  区间内, 如果  $g_1$  曲线越平缓, 系统输出信号幅值则越大. 由于  $g_1 = dU(x)/dx$ , 那么在势函数  $U(x) = [-A, A]$  范围内,  $U(x)$  的斜率变化越慢, 即  $U(x)$  曲线越平缓, 系统的输出信号幅值也越大. 这一点在下文分析中同样成立.

如果改变信号初值, Brownian 粒子也有可能落入稳态解  $x'_{s2}$  或  $x'_{s3}$  处, 此时系统输出就将被限定在相应的稳态解周围, 在相应的右势阱或左势阱处实现小幅周期振荡, 分析过程与上文一致.

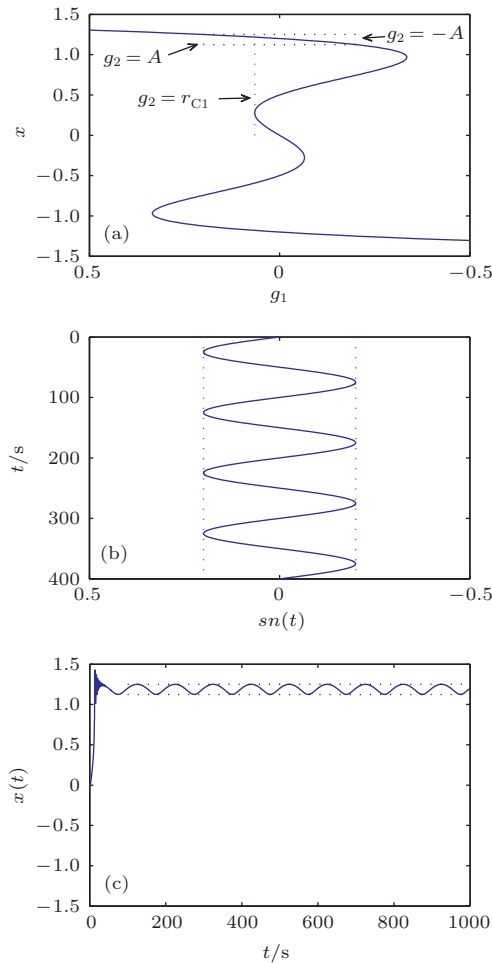


图7  $r_{C1} < A < r_{C2}$  时, 三稳系统方程的动态响应映射图 (a) 稳态解曲线; (b) 系统输入信号; (c) 系统输出信号  
Fig. 7. The dynamic response of tri-stable system when  $r_{C1} < A < r_{C2}$ : (a) the steady-state solution curve; (b) the system input signal; (c) the system output signal.

按照这样的思路, 进一步分析  $r_{C1} < A < r_{C2}$  时三稳系统方程的动态响应输出. 在方程(21)中, 保持其他参数不变, 令  $A = 0.2$ , 绘出系统的输入信号和输出响应如图7(b)和(c)所示, 并通过稳态解曲线  $g_1$  (图7(a)) 进行分析. 初始时刻系统输出位

于稳态解  $x'_{s1} = 0$  处; 接下来, 随着时间  $t$  增大, 系统输入逐渐增大, 相当于图7(a)中曲线  $g_2$  逐渐左移, 这个过程中两曲线交点的横坐标即稳态解  $x'_{s1}$  沿着曲线  $g_1$  逐渐增大, 那么系统输出逐渐增大; 当系统输入增大到  $r_{C1}$  时, 曲线  $g_1$  和  $g_2$  的交点由5个退化为4个, 系统势函数由三稳势场退化为双稳势场, 此时系统的稳态解将离开  $x'_{s1}$ , 迅速转移到  $x'_{s2}$  处; 系统输入继续随时间  $t$  变化, 系统输出将留在稳态解  $x'_{s2}$  处, 被限定在  $g_1$  和  $g_2 = \pm A$  曲线确定的两个极限交点位置之间, 在右势阱实现小幅周期振荡, 其振荡周期同样与信号周期一致.

不同的信号初值条件下, 系统输出也有可能最终稳定在稳态解  $x'_{s3}$  处, 在左势阱处实现小幅周期振荡, 分析过程与上文一致.

图7与图6的对比分析表明, 当  $r_{C1} < A < r_{C2}$ , 系统瞬时输入量  $sn(t)$  将有可能大于临界幅值  $r_{C1}$ , 系统输出将迅速从稳态解  $x'_{s1}$  跃迁到  $x'_{s2}$  处, 在跃迁完成瞬间显然  $\dot{x} \neq 0$ , 由(12)式得到  $-ax + bx^3 - x^5 + r_{C1} \neq 0$ , 因此跃迁后粒子无法落在该输入条件下的稳态解曲线上, 而是存在一个振荡过程, 并在阻尼的作用下逐渐恢复到稳态解曲线上.

类似地,  $A > r_{C2}$  时三稳系统的输入信号和输出响应如图8(b)和(c)所示, 其中方程(21)中输入信号幅值  $A = 0.5$ , 其他参数不变, 并通过稳态解曲线  $g_1$  (图8(a)) 进行分析. 初始时刻系统输出位于稳态解  $x'_{s1} = 0$  处; 接下来, 随着时间  $t$  增大, 系统输入逐渐增大, 相当于图8(a)中曲线  $g_2$  逐渐左移, 这个过程中两曲线交点的横坐标即稳态解  $x'_{s1}$  沿着曲线  $g_1$  逐渐增大, 那么系统输出逐渐增大; 当系统输入增大到  $r_{C1}$  时, 系统的稳态解将离开  $x'_{s1}$ , 迅速转移到  $x'_{s2}$  处, 系统输出响应发生振荡并逐渐恢复到稳态解曲线; 系统输入继续随时间  $t$  增大, 直到  $g_2 = A$  时达到最大, 系统输出响应的瞬时值也达到最大; 接下来, 系统输入继续随时间  $t$  开始减小, 系统输出响应的瞬时值沿着曲线  $g_1$  和  $g_2$  的交点  $x'_{s2}$  逐渐减小; 当系统瞬时输入减小到  $-r_{C2}$  时, 系统的稳态解将离开  $x'_{s2}$ , 迅速转移到  $x'_{s3}$  处, 系统输出相应发生振荡并逐渐恢复到稳态解曲线; 之后, 系统瞬时输入继续减小, 直到  $g_2 = -A$  时达到最小, 系统输出响应的瞬时值也达到最小; 系统输入继续随时间  $t$  变化, 系统输出将沿稳态解曲线变化, 在  $g_2 = \pm r_{C2}$  时发生跃迁和振荡, 在  $g_2 = \pm A$  时达到最大瞬时输出. 这表明, 当  $A > r_{C2}$  时, 三稳系统输出将在  $x'_{s2}$  和  $x'_{s3}$  两个稳态解之间实现大范围的跃



迁,即在  $g_1$  和  $g_2 = \pm A$  曲线确定的两个极限交点位置之间进行大范围周期振荡,实现左右势阱的往复跃迁,其振荡周期同样与信号周期一致.

在系统瞬时输入量与  $r_{C2}$  相等的瞬间,系统输出将发生跃迁,此时同样存在一个振荡过程,并在阻尼的作用下逐渐恢复到稳态解曲线上.在

这个过程中,阻尼对 Brownian 粒子的振荡过程起阻碍作用,那么增大阻尼比  $k$  的大小,能够减弱振荡过程,使系统输出响应迅速恢复到稳态解曲线上,如图 8(d) 给出  $k = 2$  时三稳系统的输出响应,与图 8(c) 相比,输出跃迁过程的振荡明显减弱.

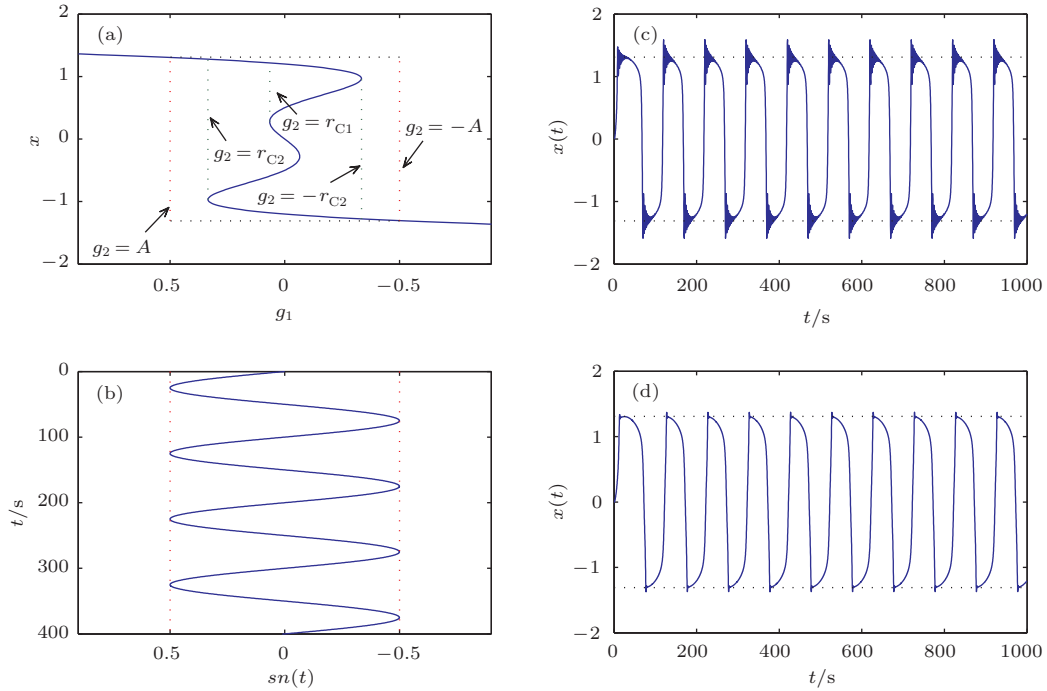


图 8  $A > r_{C2}$  时,三稳系统方程的动态响应映射图 (a) 稳态解曲线; (b) 系统输入信号; (c)  $k = 0.5$  时系统输出信号; (d)  $k = 2$  时系统输出信号

Fig. 8. The dynamic response of tri-stable system when  $A > r_{C2}$ : (a) the steady-state solution curve; (b) the system input signal; (c) the system output signal when  $k = 0.5$ ; (d) the system output signal when  $k = 2$ .

### 3.3 噪声诱导的三稳系统随机共振

根据前文分析,如果三稳系统(4)只有谐波信号输入,当  $r_{C1} < A < r_{C2}$  时,系统输出只能在稳态解  $x'_{s2}$  或  $x'_{s3}$  附近实现小幅周期振荡,而无法实现左右两个势阱间的大幅周期运动.此时如果同时输入噪声,情况将发生变化.

在方程(4)中,令  $k = 0.5$ ,  $p = 0.5$ ,  $q = 1.2$ ,  $A = 0.1$  ( $r_{C1} < A < r_{C2}$ ),  $f_0 = 0.01$  Hz,  $\phi = 0$ ,并将噪声强度  $D$  在  $[0, 1]$  区间内进行取值.取信号采样频率  $f_s = 5$  Hz,计算点数  $N = 20000$ .采用 4 阶 Runge-Kutta 算法对方程进行数值求解,绘出系统输出频谱频率  $f = f_0$  处谱峰值  $Am$  与系统输出信噪比 SNR 随噪声强度  $D$  的变化曲线,如图 9 所示.这里,系统输出信噪比定义为

$$SNR = 20 \log_{10}(\text{signal}/\text{noise}), \quad (22)$$

式中,  $\text{signal} = x(f_0)$  为输出频谱在频率  $f = f_0$  处的谱峰值  $Am$ ,  $\text{noise}$  为噪声频谱,在这里取为输出信号处特征信号频率处所有谱峰的平均值.

系统输出特征信号幅值  $Am$  表征了输出特征信号的绝对强度,输出信噪比 SNR 则表征了输出特征信号的可识别能力,二者随噪声强度  $D$  的增大均呈现出先增大后减小的趋势,并在某一最优噪声强度值  $D_{op}$  时达到最大,这是典型的随机共振特征.这说明,方程(4)所描述的三稳系统输出能够实现随机共振.

保持图 9 参数不变,取计算点数  $N = 4096$ ,当  $D = 0.14$  时,系统实现随机共振,如图 10 所示.图 10(a)–(d) 分别为系统输入和输出信号的部分波形和低频频谱 ( $0-0.25$  Hz).从中可以看出,系统输出频谱在频率  $f = f_0$  处的谱峰值 (0.811) 最大,且比输入频谱  $f = f_0$  处的谱峰值 (0.1105) 大得多,

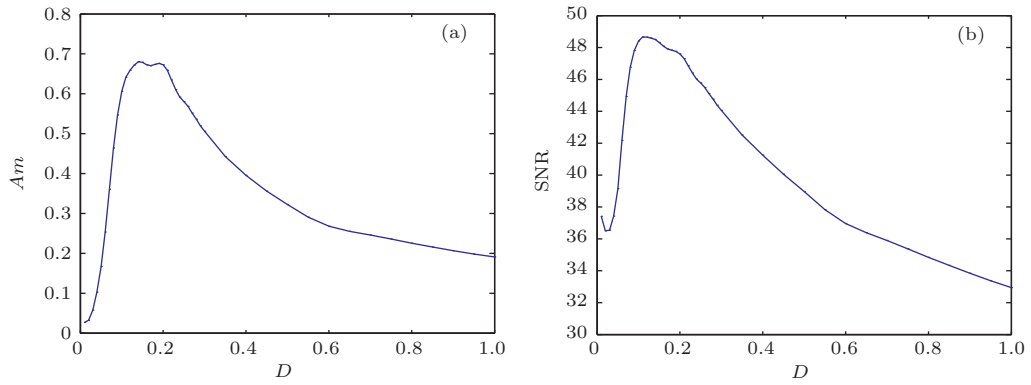


图9 输出信号随噪声强度  $D$  变化的 (a)  $A_m$ - $D$  曲线和 (b) SNR- $D$  曲线

Fig. 9. The (a)  $A_m$ - $D$  and (b) SNR- $D$  curves of output signal against noise intensity  $D$ .

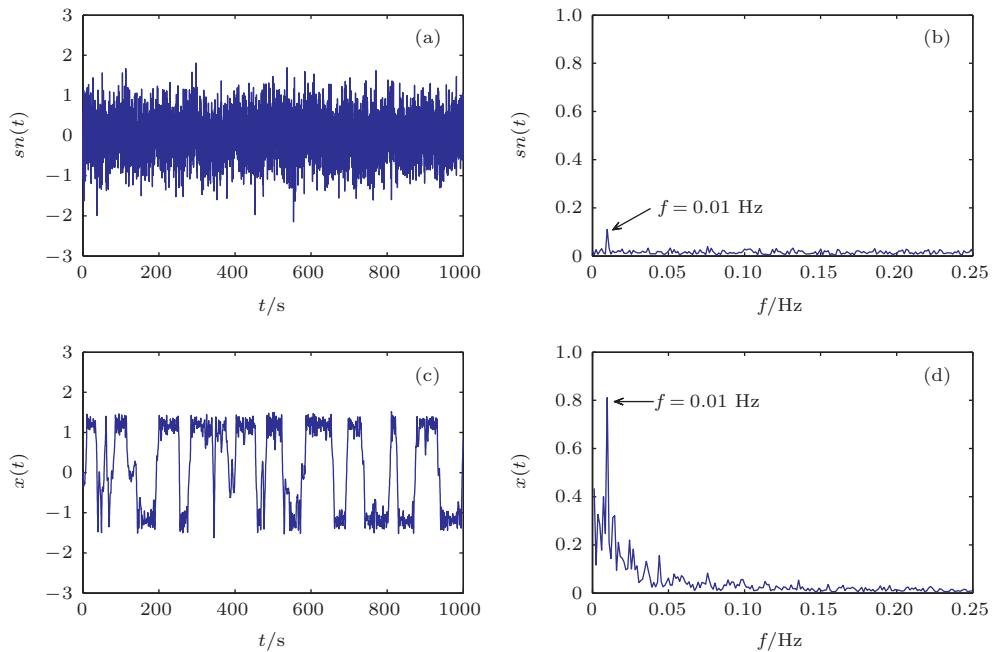


图10 三稳系统的随机共振 (a) 输入信号波形; (b) 输入信号频谱; (c) 输出信号波形; (d) 输出信号频谱

Fig. 10. The stochastic resonance of tri-stable system: (a) Waveform and (b) spectrum of input signal; (c) waveform and (d) spectrum of output signal.

输出信噪比  $SNR = 42.68$  dB 也比输入信噪比  $SNR = 17.53$  dB 大得多. 同时, 高频噪声能量向低频转移, 呈洛伦兹分布形态, 由此看出三稳系统发生随机共振时, 噪声所起的是积极作用.

正是由于噪声的存在, 使系统输出克服稳态解曲线的限制, 能够在左右两个势阱间进行大范围的往复跃迁运动 (如图 10(c)), 从而实现随机共振. 由图 7 的分析可知, 当无噪声信号输入时, 系统的瞬时输入被限定在  $-A < g_2 < A$  范围内, 由于特征信号幅值  $r_{C1} < A < r_{C2}$ , 因此系统输出无法实现阱间跃迁, 被锁定在稳态解  $x'_{s2}$  或  $x'_{s3}$  附近的小范围内. 而当噪声存在时, 如图 10 中输入噪声强度  $D = 0.14$  的 Gaussian 白噪声信号, 三稳系统的实

际输入信号将偏离特征信号并在其附近上下波动, 在某些时刻的瞬时输入量可能会突然很大或突然很小, 其绝对值大于临界阈值  $r_{C2}$ , 与图 8 相类似, 在一定条件下便能驱动系统响应越过跃迁点向另一侧的稳态解发生曲线, 从而使系统输出响应迅速移至另一侧的稳态解曲线上; 接着特征信号和噪声信号在这一侧的稳态解曲线上继续发挥作用, 由于噪声的存在使得系统输出响应有可能继续突破稳态解曲线的限制, 某些时刻再度发生跃迁, 最终实现如图 10(c) 所示的势阱间的大范围往复跃迁运动, 产生随机共振. 由于特征信号对系统瞬时输入量的变化起着内在本质的推动作用, 所以系统输出响应的跃迁过程也与特征信号周期完全一致, 噪

声则在这个过程中诱发系统的跃迁行为。

需要注意的是,当噪声强度较小时,由于其作用时间短,又受到阻尼的作用,系统响应只能在  $-A < g_2 < A$  限定的某一侧稳态解曲线段附近波动,仍然无法突破跃迁临界点;反之当噪声强度过大时,仅靠噪声的作用就可能使系统地瞬时输入量超越临界阈值  $r_{C2}$  而使系统输出响应发生跃迁,此时系统的跃迁便是以噪声为主驱动的,因此呈现出系统输出响应与特征信号的弱相关性甚至不相关性.综合上述两种情况,我们就可以解释图 9 所示的经典的随机共振曲线.这就是噪声诱导的三稳系统随机共振机理.

#### 4 三稳系统随机共振的参数

前文从稳态解曲线的角度解释了噪声诱导的三稳系统随机共振机理,在此基础上,可以进一步分析和讨论方程 (4) 中阻尼比参数  $k$  和平衡点参数  $p, q$  对三稳系统随机共振的影响.

##### 4.1 阻尼比参数 $k$ 的影响

在三稳系统方程 (4) 中,阻尼力表征了介质对 Brownian 粒子的阻碍作用,其大小取决于粒子的运动速度和阻尼比  $k$  的大小.当  $k$  增大时,系统对 Brownian 粒子的阻碍作用增大,粒子的跃迁速率降低,此时需要更大的噪声强度才能使系统输出实现随机共振.即保持其他参数不变时,增大阻尼比参数  $k$ ,系统发生随机共振的最优噪声强度值  $D_{op}$  也随之增大.

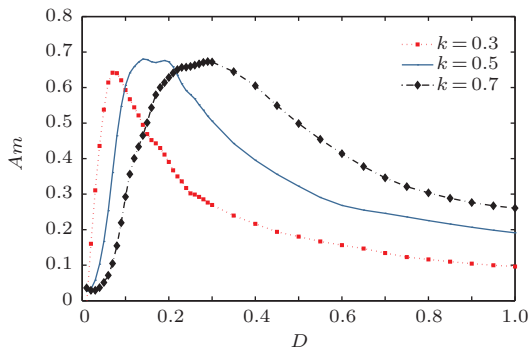


图 11 不同阻尼比参数条件下的  $Am-D$  曲线

Fig. 11. The  $Am-D$  curves under different damping ratios.

仿照图 9 (a),在保持其他参数条件不变的情况下,做出阻尼比  $k$  分别为 0.3, 0.5 和 0.7 时的  $Am-D$  曲线,如图 11 所示.从图 11 中可以看出,随着阻尼

比  $k$  的增大,系统实现随机共振所需的最优噪声强度值  $D_{op}$  也随之增大,从而验证了上述分析.

##### 4.2 平衡点参数 $p$ 的影响

同样以图 9 (a) 参数为基准进行分析.图 12 给出了  $q = 1.2$  条件下,  $p$  分别取 0.3, 0.5 和 0.7 时系统的稳态解曲线  $g_1(x)$ .从图 12 中可以看出,在  $r_{C1} < r_{C2}$  的前提下,随着  $p$  的增大,  $r_{C1}$  增大,  $r_{C2}$  减小.由于  $r_{C2}$  减小,粒子在相同信号参数条件下更容易实现跃迁;换言之,粒子实现跃迁所需的能量减小,因此三稳系统实现随机共振的最优噪声强度值  $D_{op}$  也随之减小.这一点可以从图 13 所绘出的图 9 (a) 参数条件下,  $p$  分别为 0.3, 0.5 和 0.7 时的  $Am-D$  曲线中得到验证.

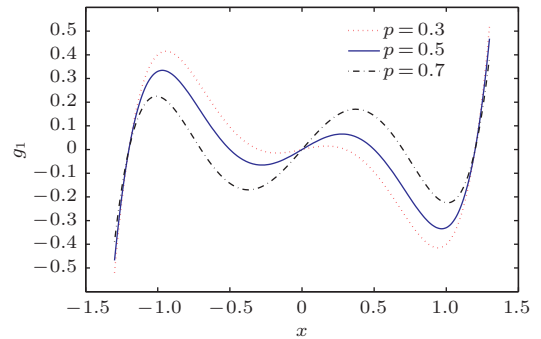


图 12 不同平衡点参数  $p$  条件下的系统  $g_1$  曲线

Fig. 12. The  $g_1$  curves under different  $p$ .

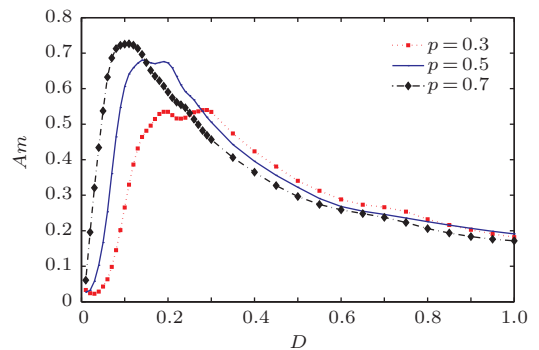


图 13 不同平衡点参数  $p$  条件下的  $Am-D$  曲线

Fig. 13. The  $Am-D$  curves under different equilibrium parameter  $p$ .

##### 4.3 平衡点参数 $q$ 的影响

依然以图 9 (a) 参数为基准进行分析.图 14 给出了  $p = 0.5$  条件下,  $q$  分别取 1.0, 1.2 和 1.4 时系统的稳态解曲线  $g_1(x)$ .从图 14 中可以看出,在  $r_{C1} < r_{C2}$  的前提下,随着  $q$  的增大,  $r_{C1}$  和  $r_{C2}$  均增大,且  $r_{C2}$  的增大幅度更加明显.由于  $r_{C2}$  增大,粒

子在相同信号参数条件下更不容易实现跃迁; 换言之, 粒子实现跃迁所需的能量增大, 因此三稳系统实现随机共振的最优噪声强度值  $D_{op}$  也随之增大. 这一点可以从图 15 所绘出的图 9(a) 参数条件下,  $q$  分别为 1.0, 1.2 和 1.4 时的  $Am-D$  曲线中得到验证.

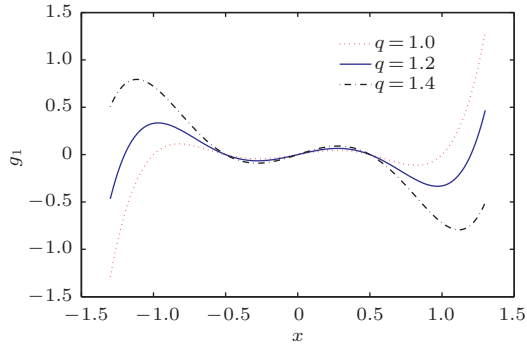


图 14 不同平衡点参数  $q$  条件下的系统  $g_1$  曲线

Fig. 14. The  $Am-D$  curves under different equilibrium parameter  $q$ .

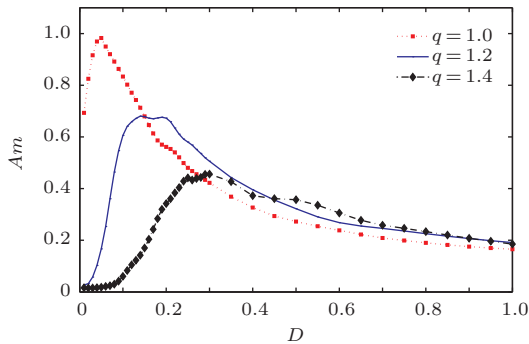


图 15 不同平衡点参数  $q$  条件下的  $Am-D$  曲线

Fig. 15. The  $Am-D$  curves under different equilibrium parameter  $q$ .

综上所述, 三稳系统中阻尼比参数  $k$  和平衡点参数  $p, q$  对系统随机共振的产生条件均产生影响. 具体来说, 阻尼比  $k$  影响了 Brownian 粒子所受阻尼力的大小,  $k$  增大时, 系统实现随机共振所需的最优噪声强度值  $D_{op}$  也随之增大, 反之亦然. 而平衡点参数  $p, q$  主要通过影响稳态解曲线  $g_1(x)$  的极值点  $r_{C1}$  来对系统随机共振产生影响, 在  $r_{C1} < r_{C2}$  的前提下,  $p$  增大或  $q$  减小时,  $r_{C2}$  减小, 系统实现随机共振所需的最优噪声强度值  $D_{op}$  随之减小; 反之,  $p$  减小或  $q$  增大时,  $r_{C2}$  增大, 系统实现随机共振所需的最优噪声强度值  $D_{op}$  随之增大.

## 5 结 论

本文从系统平衡点参数  $p, q$  的角度出发, 构造出一类标准的对称三稳势函数. 在此基础上, 进一步给出势垒高度  $\Delta U_1, \Delta U_2$  及两势垒高度差的解析

表达式, 详细研究它们与系统参数  $p, q$  之间的关系. 对三稳势场作用下微弱信号和噪声共同驱动下的三稳系统模型进行深入的动态响应分析, 首先从定常激励的角度给出系统稳态解曲线的概念, 从图解法给出系统稳态解的可能形式, 并给出临界阈值的数学表达式; 其次以稳态解曲线为工具, 深入揭示了仅谐波信号输入时系统的稳态响应输出与缓变输入之间的一一对应关系; 最后, 进一步研究三稳系统输出的随机共振现象, 并从稳态解曲线的角度阐述了噪声诱导的三稳系统随机共振机理. 在此基础上, 进一步讨论了系统参数  $k, p, q$  对系统随机共振的影响. 研究表明, 当  $k$  增大、 $p$  减小或  $q$  增大时, 系统实现随机共振所需的最优噪声强度值将增大, 反之亦然. 本文提出了标准化的三稳随机共振模型, 对模型基本性质、动态响应及随机共振的具体分析, 为今后三稳随机共振及其微弱信号处理的进一步深入研究奠定了理论基础.

## 参考文献

- [1] Benzi R, Sutera A, Vulpiana 1981 *Physica A* **14** 453
- [2] Bensi R, Parisi G, Srutera A 1982 *Tellus* **34** 11
- [3] Nicolis C 1982 *Tellus* **34** 1
- [4] Fauve S, Heslot F 1983 *Phys. Lett. A* **97** 5
- [5] McNamara B, Wiesenfeld K, Roy R 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 2626
- [6] Gammaitoni L, Hänggi P, Jung P, Marchesoni F 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223
- [7] Fan J, Zhao W L, Zhang M L, Tan R H, Wang W Q 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 110506 (in Chinese) [范剑, 赵文礼, 张明路, 檀润华, 王万强 2014 物理学报 **63** 110506]
- [8] Li Y B, Zhang B L, Liu Z X, Zhang Z Y 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 160504 (in Chinese) [李一博, 张博林, 刘自鑫, 张震宇 2014 物理学报 **63** 160504]
- [9] Qin Y, Tao Y, He Y, Tang B P 2014 *J. Sound Vib.* **333** 7386
- [10] Wang J, He Q B 2015 *IEEE Trans. Instrum. Meas.* **64** 564
- [11] Stocks N G, Stein N D, McClintock P V E 1993 *J. Phys. A* **26** 385
- [12] Gomes I, Mirasso C R, Toral R, Calvo O 2003 *Physica A* **327** 115
- [13] Masoller C 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 034102
- [14] Gammaitoni L, Marchesoni F, Menichella-Saetta E, Santucci S 1989 *Phys. Rev. Lett.* **62** 349
- [15] Lai Z H, Leng Y G, Fan S B 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 070503 (in Chinese) [赖志慧, 冷永刚, 范胜波 2013 物理学报 **62** 070503]
- [16] Lu S L, He Q B, Zhang H B, Zhang S B, Kong F R 2013 *Rev. Sci. Instrum.* **84** 026110
- [17] Li J M, Chen X F, He Z J 2013 *J. Sound Vib.* **332** 5999
- [18] Zhang H Q, Xu Y, Xu W, Li X C 2012 *Chaos* **22** 043130
- [19] Arathi S, Rajasekar S 2011 *Phys. Scr.* **84** 065011

# Dynamic response and stochastic resonance of a tri-stable system\*

Lai Zhi-Hui<sup>1)2)†</sup> Leng Yong-Gang<sup>2)</sup>

1) (School of Mechatronics Engineering, Nanchang University, Nanchang 330031, China)

2) (School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

( Received 22 April 2015; revised manuscript received 18 May 2015 )

## Abstract

Stochastic resonance (SR) describes a nonlinear phenomenon in nature, of which the essential ingredients are a nonlinear system, a weak signal, and a source of noise. Using the nonlinear system, the signal-to-noise ratio (SNR) of the output signal of the system will peak at a certain value of noise intensity under a synergistic action of input signal and noise. Besides the traditional Langevin equation, the new SR models such as monostable oscillators, chaotic systems, time-delay systems and bistable Duffing systems, can also produce SR phenomena. In this paper, a normalized symmetrical tri-stable potential function is constructed by using equilibrium parameters  $p$  and  $q$ , and a tri-stable system model simultaneously driven by weak signal and noise is further proposed. The tri-stable system model can be understood through a cantilever beam structure with three magnets, and deduced from the Brownian motion equation. We study in-depth and summarize the influences of parameters  $p$  and  $q$  on the potential barrier heights  $\Delta U_1$ ,  $\Delta U_2$  and their difference value. By analyzing the steady-state solution of the tri-stable system under invariable input, the concept of system steady-state solution curve (SSS curve) is proposed, and is used to further study the system dynamic response under low-frequency harmonic signal input. In these situations, the system response can be obtained by combining the steady-state solutions of the system following time  $t$  under a group of temporally inputs. Moreover, with the noise injection, the tri-stable system can realize SR under appropriate parameter condition, which can be demonstrated by the output amplitude curve and also the output SNR curve of the system against noise intensity. The mechanism of noise-induced SR of tri-stable system can be analyzed from the perspective of SSS curve. Finally, we further study the influence of tri-stable SR against system parameters. The value of damping ratio  $k$  affects the value of damping force acting on the Brownian particle, thus the tri-stable system needs noise with larger intensity to produce SR under a larger  $k$ . The values of equilibrium parameters  $p$  and  $q$  both affect the shape of the SSS curve, a larger  $p$  or a smaller  $q$  may result in larger-intensity noise for the system to produce SR.

**Keywords:** tri-stable system, dynamic response, stochastic resonance, steady-state solution curve

**PACS:** 05.45.-a, 05.40.-a, 02.60.Cb

**DOI:** 10.7498/aps.64.200503

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51275336) and the Tianjin Research Program of Application Foundation and Advanced Technology, China (Grant No. 15JCZDJC32200).

† Corresponding author. E-mail: laizh@ncu.edu.cn