物理学报 Acta Physica Sinica
Chinese Physical Society
Institute of Physics, CAS

周期受击陀螺系统随时间演化波函数的多重分形

周洁　杨双波

Multifractal behaviors of the wave function for the periodically kicked free top

Zhou Jie　Yang Shuang-Bo

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 64, 200505 (2015)　DOI: 10.7498/aps.64.200505
在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.200505
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I20

周期受击陀螺系统随时间演化波函数的多重分形

周洁 杨双波†

(南京师范大学物理科学与技术学院, 大规模复杂系统数值模拟江苏省重点实验室, 南京 210023)

(2015 年 4 月 3 日收到; 2015 年 5 月 22 日收到修改稿)

研究了周期受击陀螺系统波函数的多重分形. 发现: 1) 在打击次数较小时, 周期受击陀螺系统波包的扩散速度、扩散方向与打击强度相关, 打击强度越大扩散越混乱、扩散速度也越大; 2) 波函数在相空间的精细结构的分布范围随着打击强度的增大而扩大, 最后充满整个相空间; 3) 局部分维 a 的分布范围对应波函数在相空间的分布, 规则态时 a 的分布范围最宽, 过渡态的 a 的分布范围较窄, 而混沌态的 a 的分布范围则最狭窄且稳定.

关键词: 陀螺, 波函数, 多重分形, 相空间

PACS: 05.45.Mt, 05.45.Df **DOI:** 10.7498/aps.64.200505

1 引 言

在传统欧几里德几何中, 我们用光滑的曲线或光滑的曲面等来近似表示物体的形状或结构, 但是在非线性物理学[1,2]中, 物体拥有非常复杂的内部结构, 而这些内部结构将对它的物理性质产生根本性的影响, 如果还用光滑曲线或光滑曲面来近似, 将会得到错误的结果. 因此, 需要一种新的几何来描述非线性物质内部结构, 分形几何[3−7]也因此孕育而生. 分形几何作为近年来兴起的一种研究非线性系统的新方法, 在各个领域中都有非常重要的应用[8−11]. 例如, 运用分形动力学方法治疗疾病和延缓衰老[12], 多重分形用于研究光的散射和吸收[13], 金属-绝缘体安德森转换[14], 量子电导中豪斯多夫维能量谱的分形分析[15], 上证综合指数的分形分析[16], 空间体热扩散分形生长的方向区域控制模型[17], 在低渗透多孔介质中运用分形的方法来降低 non-Darcy 流动[18], 近年来有报道将现有的方法推广到高维后, 分形还可以用于分析布朗面及火星表面[19]. 在最近的研究中我们发现, 量子混沌系统[20−22]的波函数拥有非常精细的内部结构[23], 进一步的研究发现它表现出了分形几何的标度不变性特征. 因此, 我们尝试用分形几何的方法来处理这样的非线性物理过程. 通过研究量子混沌系统波函数的分形结构, 我们进一步了解了它的性质, 而计算与分析系统的分形参量将可以直接确定系统的物理状态, 这为量子混沌系统的研究工作提供了新的思路和方法. 本文以周期受击陀螺系统为例来研究混沌系统波函数的分形性质, 期待这样的方法能够被推广到更多的混沌系统之中.

2 多重分形

把研究对象以线度 L 分为 N 块, 为了描述线度大小 L 与某一小块 i 的布居概率 P_i 的关系, 引入公式

$$P_i \sim L^a, \tag{1}$$

其中 $i = 1, 2, 3, \cdots, N$. 当 $L \to 0$ 时, (1) 式可以写为

$$a = \lim_{L\to 0} \frac{\ln P_i}{\ln L}, \tag{2}$$

这里把 a 称作局部分维, 而局部分维为 a 的子集的分形维称为奇异谱 $f(a)$. 这是多重分形的基本公式, 显然上述公式更侧重于划分的每一小块的性质. 为了研究所有这些小块的整体的性质, 对 (1)

† 通信作者. E-mail: yangshuangbo@njnu.edu.cn

式两边同时取 q 次方并对所有小块求和可以得到

$$X(q)=\sum_{i}^{N} P_i^q \sim L^{\tau(q)}. \tag{3}$$

定义分形维 D_q 为

$$D_q=\lim_{L\to 0}\frac{1}{q-1}\cdot\frac{\ln X(q)}{\ln L}, \tag{4}$$

这里 D_0, D_1, D_2 分别称为容量维、信息维和关联维. 通过Legendre变换可以得到 D_q 与 q, 奇异谱 $f(a)$ 和局部分维 a 的关系式为

$$\tau(q)=(q-1)D_q, \tag{5}$$

$$a=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\tau(q), \tag{6}$$

$$f(q)=qa-\tau(a). \tag{7}$$

3 系统的量子动力学

周期受击陀螺系统的一步时间演化算符为[24]

$$F(\lambda,\alpha)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda j_z^2/(2j)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha j_x}, \tag{8}$$

其中 j 为角动量, j_x, j_z 分别为角动量的 x 及 z 分量, α 及 λ 为参数. 设定系统的初始状态为某一球面相干态 $|\theta_0,\varphi_0\rangle$, $|\theta_t,\varphi_t\rangle$ 为 $|\theta_0,\varphi_0\rangle$ 经过算符 $F(\lambda,\alpha)$ 的 t 次作用后得到的波函数, 即时间演化波函数. 将波函数 $|\theta_t,\varphi_t\rangle$ 投影到相干态 $|\theta,\varphi\rangle$ 上, 这样便得到

$$\begin{aligned}&\langle\theta,\varphi|\theta_t,\varphi_t\rangle\\&=\sum_{m=-j}^{j}\langle\theta,\varphi|j,m\rangle\langle j,m|\theta_t,\varphi_t\rangle,\end{aligned} \tag{9}$$

其中

$$\langle\theta,\varphi|j,m\rangle=(1+\gamma\gamma^*)^{-j}\gamma^{j-m}\sqrt{\begin{pmatrix}2j\\ j-m\end{pmatrix}}, \tag{10}$$

$$\langle j,m|\theta_t,\varphi_t\rangle=\varphi_{jm}^t,$$

$$\varphi_{jm}^t=\sum_{m'=-j}^{j}\langle j,m|F\,|j,m'\rangle\,\varphi_{jm'}^{t-1}, \tag{11}$$

$$\gamma=\mathrm{e}^{i\varphi}\tan(\theta/2). \tag{12}$$

通过 $\varphi_{jm}^0=\langle j,m|\theta_0,\varphi_0\rangle$ 及 (11) 式的迭代关系可以得到 (9) 式的值. 接下来计算概率密度函数

$$P=\sqrt{|\langle\theta,\varphi|\theta_t,\varphi_t\rangle|^2}. \tag{13}$$

根据上面概率密度函数的计算公式, 可以得到初始波包随时间演化的轮廓图, 如图1所示, 这里取 $\alpha=2.0$. 从图1中可以看到当打击强度非常小时, 如图1 (a)—(c) 中 $\lambda=1.0$, 波包在相空间扩散得非常缓慢而且具有一定的方向性, 这样的分布对应经典可积的情况, 但是增大打击强度为临界值3.0时波包的扩散加快, 而且扩散的方向变得比较混乱, 此时对应的相空间主要为混沌运动, 如图1 (a′)—(c′) 所示. 继续增大打击强度到8.0时, 波包向各个方向迅速扩散到整个空间, 此时Kolmogoroff-Arnold-Moser环全部破裂, 混沌运动充满整个相空间, 如图1 (a″)—(c″) 所示. 图1中三个不同打击强度的波函数的初始态是一样的, 这里我们选取的是相干态 $\theta_0=0.88997$, $\varphi_0=0.944194$. 从图1中也可以注意到即使打击强度很强, 达到了8.0, 混沌运动也是需要一定的时间才能充满整个相空间.

当打击次数 n 非常大的时候, 将无法得到精确的经典和量子的对应关系, 但是从图2仍然可以清楚地看到一些潜在的对应. 图2 (a)—(c), 图2 (a′)—(c′), 图2 (a″)—(c″) 分别对应打击强度 $\lambda=1.0$, $\lambda=3.0$, $\lambda=8.0$ 的情形. 从图2中可以观察到在打击次数很大的情况下, 对于较小的打击强度1.0, 波函数相空间的分布出现了精细结构, 但它仍然是局域化的. 增加打击强度到临界值3.0时, 发现波函数在相空间的分布范围扩大, 并且精细结构的分布范围也扩大了. 我们试着进一步增加打击强度 λ 到8.0, 这时发现波函数精细结构分布到整个相空间, 由于波函数的分布范围扩大, 也导致波函数的振幅变小且更加平稳.

由于图2中波函数伴随着非常精细的结构, 因此我们使用分形几何的方法来研究波函数, 并依靠多重分形的参量来研究波函数的结构是如何随着时间也就是打击次数 n, 以及打击强度 λ 变化的.

首先将相空间以尺度 $l=l_0\times 2^m$ $(m=0,1,2,3,\cdots)$ 划分为 n_l 个小方块, 第 i 个小方块用 $A_i(l)$ 表示, 这里为了使每个小方块能容一个量子态, 并计算 $X(q)$ 与 $f(a)$, 我们取 $l_0=O(J^{-1/2})$, 这样就可算得处在某个小方块 i 的概率 $P_{n,i}(l)$,

$$P_{n,i}(l)=\int_{(\theta,\varphi)\subset A_i(l)}P_n(\theta,\varphi)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi. \tag{14}$$

这时再利用公式 $\sum_i^{n_l}P_i^q=X(q)$, 便可以算得 $X(q)$ 的值. 由于概率函数 $P_{n,i}(l)$ 依赖于选取的尺度 l, 因此 $X(q)$ 的取值也依赖于选取的尺度 l. 对不同的 q 值及不同的 λ 值下, 我们计算了 $X(q)$ 与 l 的关系, 其结果示于图3. 可以看出, 图3中, 在 $q=0$ 与 $q=1.0$ 的情况下, λ 不同取值的结果是重合的. 另一方面对给定的 q 值其 $\ln X(q)$ 与 $\ln L$ 呈近似线性关系.

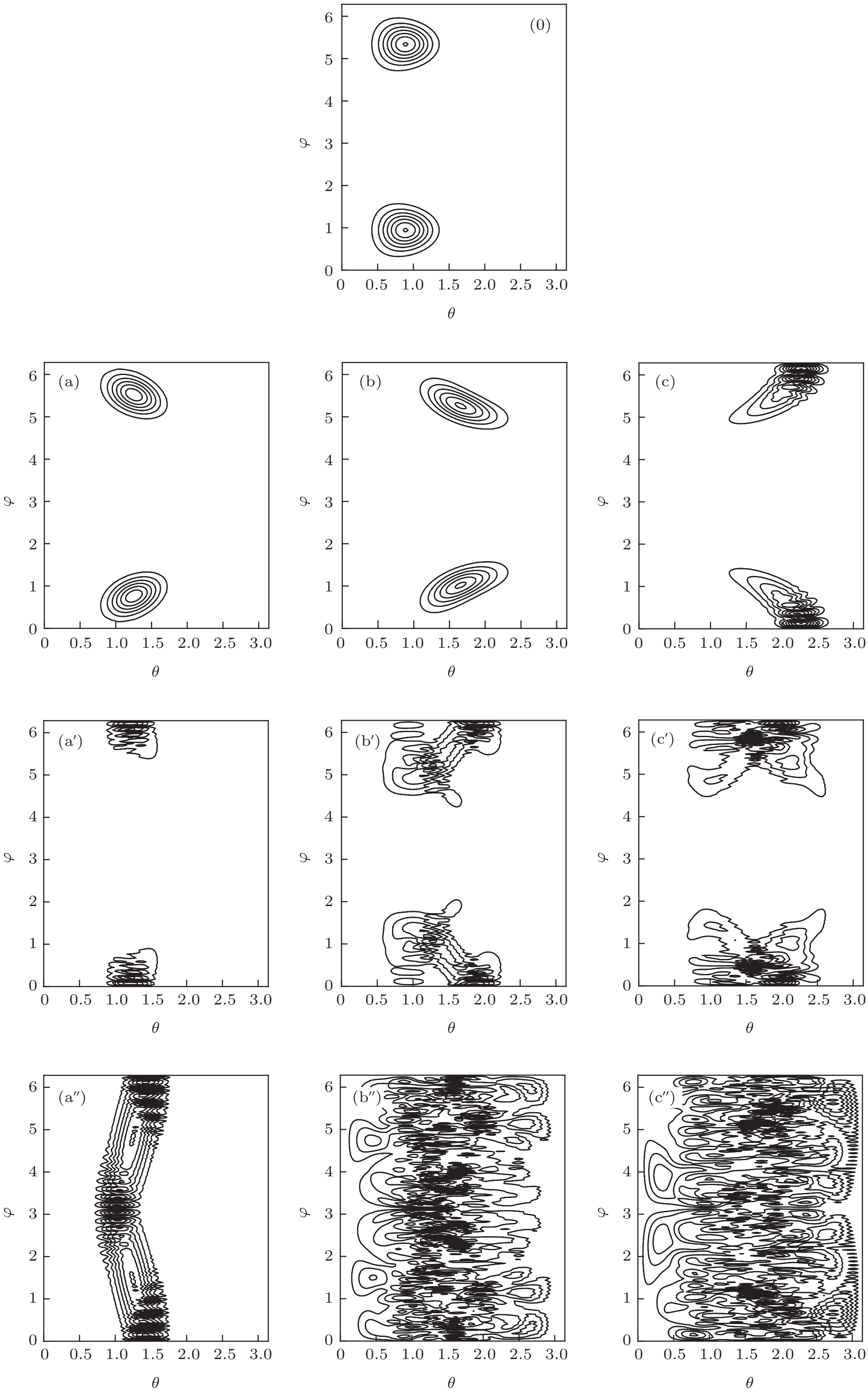

图 1　不同打击强度下波函数随时间的演化　(a)—(c) 打击强度为 1.0, $t = 1, 5, 10$; (a′)—(c′) 打击强度为 3.0, $t = 1, 5, 10$; (a″)—(c″) 打击强度为 8.0, $t = 1, 5, 10$; (0) 为初始相干态

Fig. 1. The time evolution of wave functions at different kicking strength: (a)–(c) kicking strength = 1.0, $t = 1, 5, 10$; (a′)–(c′) kicking strength = 3.0, $t = 1, 5, 10$; (a″)–(c″) kicking strength = 8.0, $t = 1, 5, 10$; (0) initial coherent state.

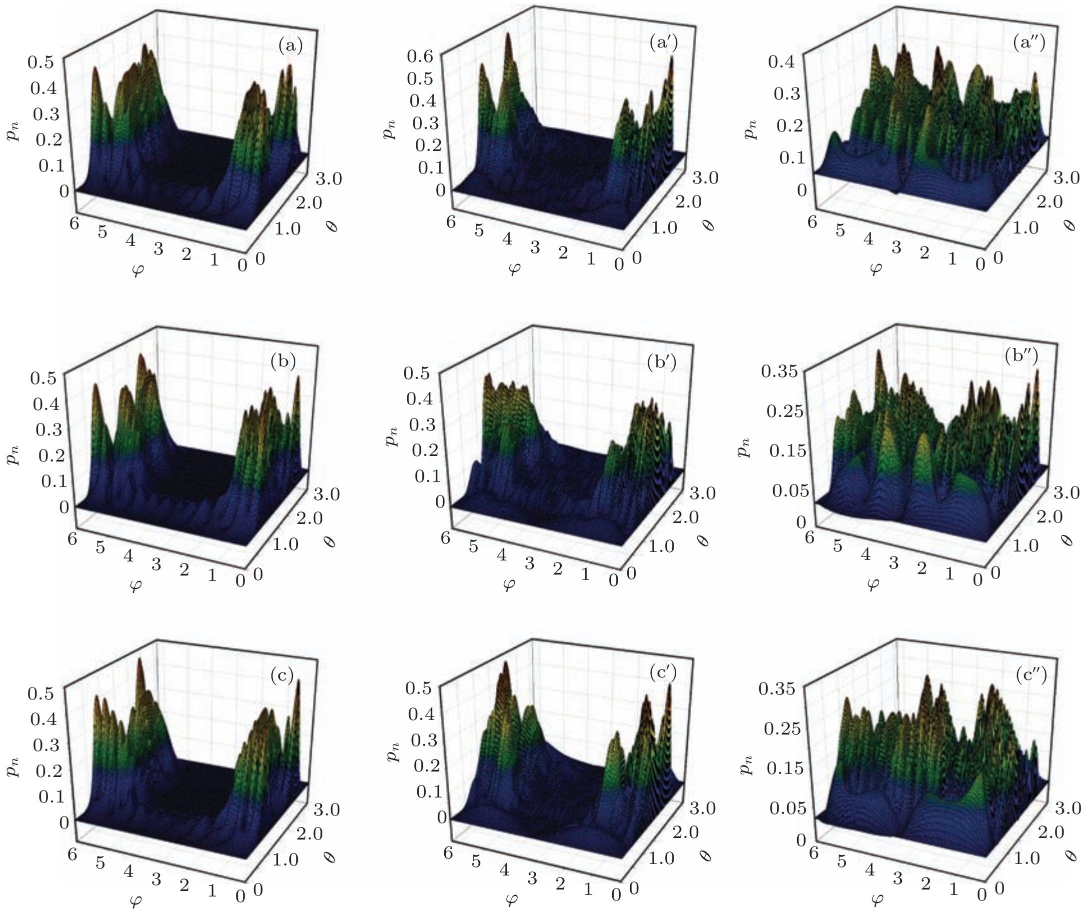

图 2 (网刊彩色) 当 $n \gg 1$ ($n = 70, 80, 90$) 时, 波函数在相空间分布 (a)—(c) $\lambda = 1.0$; (a′)—(c′) $\lambda = 3.0$; (a″)—(c″) $\lambda = 8.0$

Fig. 2. (color online) Probability amplitude distribution in phase space for $n \gg 1$ ($n = 70, 80, 90$): (a)–(c) $\lambda = 1.0$; (a′)–(c′) $\lambda = 3.0$; (a″)–(c″) $\lambda = 8.0$.

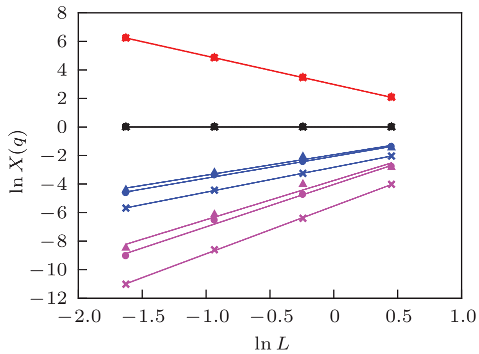

图 3 (网刊彩色) 不同 q 与不同 λ 值下, $X(q)$ 与 L 的关系图中, 红色代表 $q = 0$ 的情况, 黑色代表 $q = 1$, 蓝色代表 $q = 2$, 艳红代表 $q = 3$; 符号 $\times$ 代表 $\lambda = 8.0$ 的情况, 符号 ▲ 代表 $\lambda = 3.0$, 符号 ● 代表 $\lambda = 1.0$

Fig. 3. (color online) $\ln X(q)$ versus $\ln L$ for different q and different λ values; red, $q = 0$; black, $q = 1$; blue, $q = 2$; purple, $q = 3$; $\times$, $\lambda = 8.0$; ▲, $\lambda = 3.0$; ●, $\lambda = 1.0$.

接着利用公式 $\tau(q) = \lim_{l\to 0} \ln X(q)/\ln l$, 便可得到 $\tau(q)$ 的值, 最后再利用 (6) 式和 (7) 式可以得到 $f(a)$ 和 a 的关系如图 4. 对于 $\lambda = 1.0$ 的情况, 图 4 中只给出了 $q > 0$ 时 $f(a)$ 与 a 的关系, 这是因为 $q < 0$ 时很难得到精确的结果, 因此对 $\lambda = 1.0$ 我们没有给出另外一半, 但是这并不影响研究多重分形奇异谱 $f(a)$ 以及局部分维 a 与周期受击陀螺系统随时间演化状态的对应关系. 随后再利用 (5) 式便可最终得到系统的分形维 D_q, 如图 5 所示.

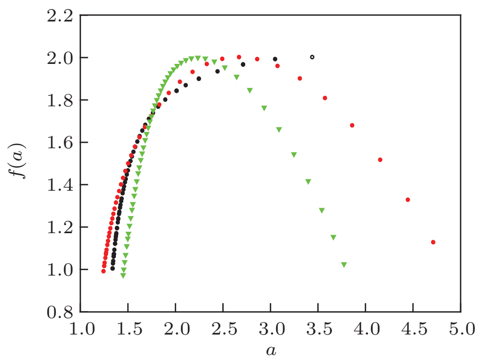

图 4 (网刊彩色) $n = 70$, 黑色, 红色, 绿色分别代表打击强度为 1.0, 3.0, 8.0 时的奇异谱

Fig. 4. (color online) The singularity spectra $f(a)$-a at different kicking strength 1.0 (black), 3.0 (red), 8.0 (green) for $n = 70$.

从图4中可以看到, 对于不同的打击强度, $f(a)$有相同的最大值2.0. 除了$f(a)$的最大值外, 还可以观察到当$f(a)$从左向右达到最大值2.0的过程中的谱宽. 对于较小的打击强度1.0, a分布在一个比较宽的范围中, 而对于打击强度等于过渡态3.0时, a的分布范围较窄, 继续增加打击强度到8.0时, 系统对应全局混沌状态, 此时的a分布范围最窄. 图5中系统分形维D_q和q的关系显然符合多重分形中D_q和q的关系.

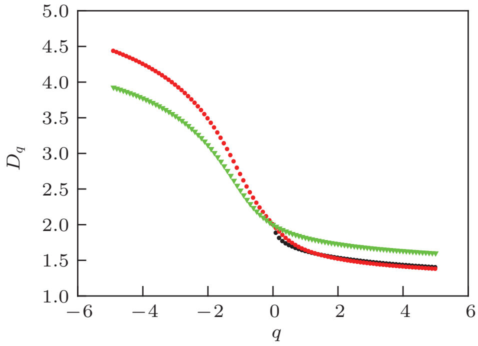

图5 (网刊彩色) $n = 70$时, 分形维D_q与q的关系 绿色, 红色, 黑色分别代表打击强度为8.0, 3.0, 1.0

Fig. 5. (color online) Generalized fractal dimension D_q versus q for different kicking strength 8.0 (green), 3.0 (red), 1.0 (black) for $n = 70$.

通过图6可以发现不同打击强度下a的分布范围与图4的结果是一致的, 即对于相空间分布基本规则的近可积波函数, 此时打击强度λ取较小的值, 例如$\lambda = 1.0$, 则a分布范围较宽, 对于KAM环大部分都破裂了的临界强度$\lambda = 3.0$, a的分布范围较窄, 而当系统陷入全局混沌, 此时对应于$\lambda = 8.0$, a的分布范围最窄, 且稳定.

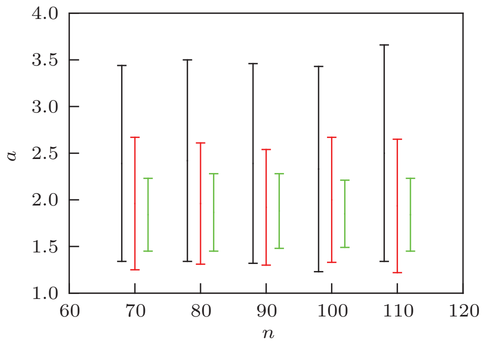

图6 (网刊彩色) a与时间及打击强度的关系 n代表时间; 纵坐标代表a的变化范围; 绿色、红色、黑色分别代表打击强度为8.0, 3.0, 1.0

Fig. 6. (color online) The scope a of the distribution for singularity spectra $f(a)$ versus time n for different kicking strength: 8.0(green), 3.0(red), 1.0 (black).

我们进一步研究了随时间演化波函数序列的平均概率的多重分形性. 取$n = 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110$时的7个波函数, 其平均概率密度为

$$\begin{aligned}\bar{P}(\theta,\varphi) = \big(&P_{50}(\theta,\varphi) + P_{60}(\theta,\varphi) + P_{70}(\theta,\varphi)\\ &+ P_{80}(\theta,\varphi) + P_{90}(\theta,\varphi)\\ &+ P_{100}(\theta,\varphi) + P_{110}(\theta,\varphi)\big)/7.\end{aligned}$$

代入(14)式通过计算得到$\lambda = 1.0, 3.0, 8.0$时的奇异谱, 如图7所示. 与$n = 70$时波函数的奇异谱(图4)比较发现, 图7中, $f(a)$最大值不变为2.0, 但是谱宽变窄了, 如$\lambda = 1.0$的谱宽由2.1减小到2.0, $\lambda = 3.0$的谱宽由1.35减小到1.1, $\lambda = 8.0$的谱宽由0.78减小到0.51等.

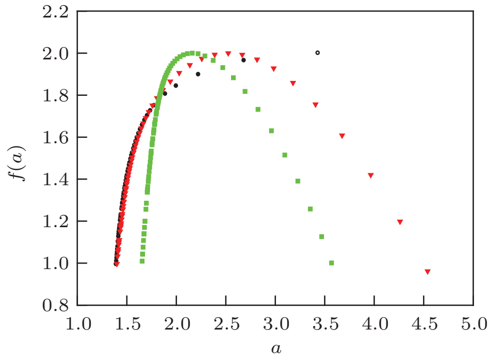

图7 (网刊彩色) 时间演化波函数序列的平均概率的奇异谱 黑色为$\lambda = 1.0$; 红色为$\lambda = 3.0$; 绿色为$\lambda = 8.0$

Fig. 7. (color online) The singularity spectra $f(a)$-a for the mean probability amplitude of a sequence of time evolving wave functions at different kicking strength: black, $\lambda = 1.0$; red, $\lambda = 3.0$; green, $\lambda = 8.0$.

4 总 结

综合以上的研究结果发现, 量子混沌系统的波函数在相空间的分布具有多重分形的基本特征. 对于量子混沌系统拥有了从多重分形角度出发的新的研究方法. 通过研究分形谱、局部分维a的分布范围, 便可以确定混沌系统所处的状态. 系统是规则的, 或是过渡的, 还是混沌的, 都直接对应上述分形参量的不同取值. 因此, 分析与计算系统多重分形参数可成为研究量子混沌系统的一个新方法.

参考文献

[1] Enns R H, McGuire G C 2001 *Nonlinear Physics with Mathematica for Scientists and Engineers* (Boston: Birkhäuser)

[2] Kono M, Skoric M 2010 *Nonlinear Physics of Plasmas* (Berlin: Springer)

[3] Mandelbrot B B 1983 *The Fractal Geometry of Nature* (New York: Freeman)

[4] Zhang J Z 1997 *Fractal* (Beijing: Qing Hua University Press)

[5] Zhou J, Yang S B 2014 *Acta Phys Sin.* **63** 22 (in Chinese) [周洁, 杨双波 2014 物理学报 **63** 22]

[6] Heller E J 1984 *Phys. Rev. Lett.* **53** 1515

[7] Nakamura K, Okazaki Y, Bishop A R 1986 *Phys. Rev. Lett.* **57** 5

[8] Halsey T C, Jensen M H, Kadanoff L P, Procaccia I, Shraimant B I 1986 *Phys. Rev. A* **33** 1141

[9] Nakamura K, Bishop A R, Shudo A 1989 *Phys. Rev. B* **39** 12422

[10] Chhabra A, Jensen R V 1989 *Phys. Rev. Lett.* **62** 1328

[11] Martin J, Giraud O, Georgeot B 2008 *Phys. Rev. E* **77** 035201

[12] Goldberger A L, Amaral L A N, Hausdorff J M, Ivanov P C, Peng C K, Stanley H E 2009 *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **99** 2466

[13] Sorensen C M 2001 *Aerosol Sci. Tech.* **35** 648

[14] Evers F, Mirlin A D 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 1355

[15] Albrecht C, Smet J H, von Klitzing K, Weiss D, Umansky V, Schweizer H 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 147

[16] Gu G F, Zhou W X 2010 *Phys. Rev. E* **82** 011136

[17] Qiao W, Sun J, Liu S T 2015 *Chin. Phys. B* **24** 050504

[18] Cai J C 2014 *Chin. Phys. B* **23** 044701

[19] Gu G F, Zhou W X 2006 *Phys. Rev. E* **74** 061104

[20] Gutzwiller M C1990 *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (New York: Springer)

[21] Hönig A, Wintgen D 1989 *Phys. Rev. A* **39** 5642

[22] Huang L, Lai Y C, Grebogi C 2011 *Chaos* **21** 013102

[23] Qin C C, Yang S B 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 140507 (in Chinese) [秦陈陈, 杨双波 2014 物理学报 **63** 140507]

[24] Liu D K, Yang S B 2014 *J. Nanjing Normal University* (Natural Science Edition) **37** 2 (in Chinese) [刘达可, 杨双波 2014 南京师大学报 (自然科学版) **37** 2]

Multifractal behaviors of the wave function for the periodically kicked free top

Zhou Jie Yang Shuang-Bo†

(*Jiangsu Provincial Key Laboratory for Numerical Simulation of Large Scale Complex Systems, School of Physics and Technology, Nanjing Normal University, Nanjing 210023, China*)

(Received 3 April 2015; revised manuscript received 22 May 2015)

Abstract

Starting from time evolution of wave function, quantum dynamics for a periodically kicked free top system is studied in this paper. For an initial spherical coherent state wave packet (localized) we find that 1) as the number of kicking is small, the speed and the direction of the diffusion for a time-evolving wave packet on a periodically kicked free top is related to the kicking strength: the stronger the kicking strength, the more chaotic for the diffusion (which means the more randomized in direction) is and the faster the speed of diffusion is, and then more quickly the full phase space is filled up; 2) as the kicking number is large, the time-evolving wave function will take on fine structure distribution in phase space, and the scope of the distribution for the fine structure will expand with the increase of the kicking strength, and the whole phase space will be filled up finally, and then the wave function will show multifractal property in phase space.

We study the multifractal behavior for a time-evolving wave function by partition function method: 1) for different kicking strengths and different q values, we study the scaling properties of partition function $X(q)$, and find the power law relation between the partition function and the scaling L, i.e., $X(q)$-$L^{\tau(q)}$; 2) at different kicking strength, for a time-evolving wave function we calculate the singularity spectrum $f(a)$-a, and find that a maximum value of $f(a)$ is 2.0 independent of the kicking strength, but the width of the singularity spectrum becomes narrow with the increase of the kicking strength, which means that the scope of the distribution for a is widest for regular state (localized), and is narrower for transition state from regular to chaotic, and is narrowest for chaotic state; 3) in the time-evolving process, the fluctuation for the width of the singular spectrum is smallest for chaotic state, intermediate for transition state of regular to chaotic, and the largest for regular state; 4) we calculate the generalized fractal dimension D_q-q for different kicking strengths, and find $D_0 = 2$ independent of the kicking strength.

We study the mutifractal behaviors for the mean propbability amplitude distribution for a sequence of time-evolving wave functions and find that the result is similar to that of the single wave function type but has the difference: the width of the spectrum is reduced for each kicking strength.

Keywords: top, wave function, multifractal, phase space

PACS: 05.45.Mt, 05.45.Df **DOI:** 10.7498/aps.64.200505

† Corresponding author. E-mail: yangshuangbo@njnu.edu.cn