

花簇分形无标度网络中节点影响力的区分度

舒盼盼 王伟 唐明 尚明生

Discriminability of node influence in flower fractal scale-free networks

Shu Pan-Pan Wang Wei Tang Ming Shang Ming-Sheng

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 208901 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.208901

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.208901>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I20>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

多峰场负氢离子源磁体布局对等离子体特性影响的数值模拟研究

Numerical simulation research of plasma characteristics in a multi-cusp proton source based on magnets layout

物理学报.2015, 64(8): 085203 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.085203>

Japan Atomic Energy Agency 10 Ampere 多峰负氢离子源全三维数值诊断

A full three-dimensional numerical diagnosis of Japan Atomic Energy Agency 10 Ampere multi-cusp negative hydrogen ion source

物理学报.2013, 62(21): 215202 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.215202>

潘宁源放电的全三维电磁粒子模拟/蒙特卡罗碰撞数值算法研究

The full three-dimensional electromagnetic PIC/MCC numerical algorithm research of Penning ion source discharge

物理学报.2013, 62(20): 205207 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.205207>

表面产生负氢离子引出 MCC 算法设计

The MCC numerical algorithm of the extraction of the surface-produced negative hydrogen ions

物理学报.2013, 62(2): 025206 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.025206>

Ta 及 Nanbu 库仑碰撞模型数值对比研究

Numerical comparison between Ta and Nanbu models of Coulomb collisions

物理学报.2013, 62(1): 015206 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.015206>

花簇分形无标度网络中节点影响力的区分度*

舒盼盼 王伟 唐明† 尚明生

(电子科技大学, 互联网科学中心, 成都 610054)

(2015年2月10日收到; 2015年6月28日收到修改稿)

大量研究表明分形尺度特性广泛存在于真实复杂系统中, 且分形结构显著影响网络上的传播动力学行为. 虽然复杂网络的节点传播影响力吸引了越来越多学者的关注, 但依旧缺乏针对分形网络结构的节点影响力的系统研究. 鉴于此, 本文基于花簇分形网络模型, 研究了分形无标度结构上的节点传播影响力. 首先, 对比了不同分形维数下的节点影响力, 结果表明, 当分形维数很小时, 节点影响力的区分度几乎不随节点度变化, 很难区分不同节点的传播影响力, 而随着分形维数的增大, 从全局和局域角度都能很容易识别网络中的超级传播源. 其次, 通过对原分形网络进行不同程度的随机重连来分析网络噪声对节点影响力区分度的影响, 发现在低维分形网络上, 加入网络噪声之后能够容易区分不同节点的影响力, 而在无穷维超分形网络中, 加入网络噪声之后能够区分中间度节点的影响力, 但从全局和局域角度都很难识别中心节点的影响力. 所得结论进一步补充、深化了基于花簇分形网络的节点影响力研究, 研究结果对实际病毒传播的预警控制提供了一定的理论借鉴.

关键词: 分形结构, 疾病传播, 影响力, 区分度

PACS: 89.75.Hc, 87.19.X-, 87.23.Ge

DOI: 10.7498/aps.64.208901

1 引言

分形尺度特性广泛存在于一些真实社会系统中, 如万维网、合作网和新陈代谢网络^[1,2]等. 一个网络具有分形性是指在对网络进行重整化的过程中, 覆盖整个网络中的节点所需要的大小为 l_B 的盒子的最小数量 N_B , 随着 l_B 的增长呈有限指数的幂律衰减^[3,4]. 与非分形网络相比, 分形网络具有一些特殊的结构特性, 比如分形网络中节点度和介数中心性之间的相关性要比非分形网络中的小得多^[5], 分形网络不具有同配性^[2,6]等.

研究表明, 分形网络固有的结构特性使得其对网络动力学行为产生重要的影响. 例如, 分形无标度网络更能抵抗对中心节点的恶意攻击^[2,6], 分形网络结构不利于同步^[6], 伊辛模型在分形模块

网络上呈现特殊的相变^[7]. 对比分形网络和非分形网络上的俘获过程, Zhang等^[8]发现前者中的迁移效率要比后者低得多. 此外, 他们对分形无标度网络中的SIR (susceptible-infected-removed) 疾病传播进行了研究, 结果表明分形导致的“大世界”特性使得无标度网络中的疾病传播具有非零阈值, 即分形结构能够阻碍疾病传播^[9]. Lee等则基于另一种分形无标度网络结构——花簇模型 (u, v) (flower model)^[10], 对SIS (susceptible-infected-susceptible) 传播阈值进行了研究^[11], 他们指出, 大度节点之间相距很远的非集群网络上存在非零传播阈值, 而在诸如 k_{\max} -星形结构的集群网络中传播阈值为零.

除了探讨疾病爆发阈值之外, 如何确定影响传播过程的关键节点一直以来都是传播动力学研

* 国家自然科学基金(批准号: 11105025, 11575041)和电子科技大学优秀博士生学术支持计划(批准号: YXBSZC20131033)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: tangminghuang521@hotmail.com

研究的热点之一^[12-14]. 传统观点认为, 具有大度的节点在网络中扮演超级传播者的角色^[15]. Kitsak等^[16]对此观点进行了纠正, 提出了新的节点影响力指标——核层, 并指出在一些真实网络中大度节点集合和最高核层的节点集合并不相同, 且基于核层指标能更好地预测SIR传播的最终规模. 这一发现激起了更多研究者致力于寻找可能与传播影响力密切相关的拓扑中心性因素. Chung等^[17]基于真实航空网络, 考虑了边移除对关键节点的介数中心性的影响. Chen等^[18]权衡度中心性和介数中心性的优缺点, 提出了局域中心性指标. 文献^[19]则基于游走计数方法识别关键传播者. 正如分形特征已是刻画复杂网络结构的一个基本特性^[20], 基于局域分形维数的中心性指标在文献^[21]中得以提出. 值得注意的是, 这里的分形维数中心性指标与分形网络的维数并不一致, 其思想同样是基于网络的拓扑距离. 此外, 虽然上述中心性指标的有效性在众多真实网络结构中得以体现, 但针对分形结构上节点影响力仍然缺少系统的研究.

本文基于花簇模型 (u, v) ^[10], 研究分形网络上的SI (susceptible-infected) 疾病传播过程, 分析影响疾病传播的关键节点以及关键拓扑特性. 结果表明, 分形结构对疾病传播范围和感染时间具有很大的影响. 我们提出了节点影响力的全局区分度和局域区分度指标, 研究不同分形维数下的节点影响力区分度, 发现节点之间的拓扑距离(即连接紧密性)与节点影响力区分度密切相关. 对比分形网络和随机化网络上的节点影响力区分度, 不但再次肯定了连接紧密性对节点影响力区分度的影响, 还发现随机化过程会显著改善不同节点的传播影响力.

表1 $G = 5, u + v = 6$ 时网络基本拓扑属性的统计, 其中 N 为网络规模, $\langle k \rangle$, k_{\min} 和 k_{\max} 分别代表网络节点平均度、最小和最大节点度, c 表示网络集群系数, r 表示网络节点度的匹配系数, $\langle d \rangle$ 为任意节点对之间的最短平均距离, d_f 为网络的分形维数

Table 1. The basic statistics of network with $G = 5$ and $u + v = 6$. N represents the network size; $\langle k \rangle$, k_{\min} , and k_{\max} are the average degree, minimum degree, and maximum degree in each network, respectively; c is the clustering coefficient; r is the correlation coefficient of the degrees; $\langle d \rangle$ is the average shortest distance. d_f represents the fractal dimension.

网络类型	N	$\langle k \rangle$	k_{\min}	k_{\max}	c	r	$\langle d \rangle$	d_f
(1,5)	6222	2.50	2	32	0	0.135	9.898	∞
(2,4)	6222	2.50	2	32	0	-0.152	38.827	2.585
(3,3)	6222	2.50	2	32	0	-0.152	123.917	1.631

2 模型介绍

2.1 网络模型

本文基于文献^[10]中的花簇模型 (u, v) 构建分形网络结构, 其中 $u + v = w$. 网络构建过程如下: 初始时(即第0代), 网络中只有两个节点相连而成的一条边. 在第1代, 这条边将被替换成一个边数为 w 的多边形, 该多边形由长度为 u 和长度为 v 的两条路径围成, 路径的两端为初始边的两个端点, 路径的中间节点均为新产生的节点. 同样地, 在第 $G + 1$ 代, 第 G 代的网络中的每一条边都被换成一个 w 多边形. 由此, 第 G 代网络中的节点度只能为 $2^m, m = 1, 2, \dots, G$. 其中, 度为 2^m 的节点为第一代产生的节点, 度为 2^{m-1} 的节点在第2代产生, 以此类推. 当 w 一定时, u, v 的取值并不影响节点度序列, 但会明显改变节点之间的距离. 图1给出了 $G = 3, w = 6$ 时(1,5)和(3,3)网络结构示意图. 不同颜色代表不同代, 节点越大表示其实际度值越大. 两个网络的节点度序列完全一致, 但(3,3)网络中最大度节点之间的距离明显比(1,5)网络中的大. 表1进一步对 $w = 6$ 时不同网络的拓扑特性进行了统计, 发现这些网络的度分布、簇系数完全一致. 除了 $u = 1$ 时网络具有正的度关联, 其他情形下均为负关联. 特别是 u 值越大, 网络的直径越大. u, v 的取值决定了网络的分形维数. 当 $u \neq 1$ 时, 网络具有有限分形维数

$$d_f = \frac{\ln(u + v)}{\ln(u)}, \quad (1)$$

当 $u = 1$ 时, 网络具有无穷维数, 此时网络为超分形网络^[10]. 由于 (u, v) 和 (v, u) 网络的结构相同, 本文只考虑 $u < v$ 的情形.

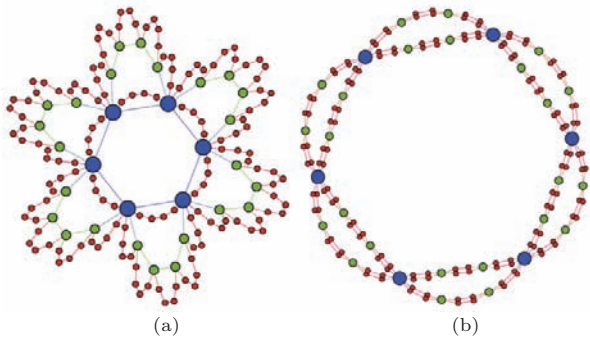


图1 (网刊彩色) $G = 3$ 时, $u + v = 6$ 的花簇模型 (u, v) 示意图 (a) $u = 1, v = 5$; (b) $u = 3, v = 3$; 在 $G + 1$ 代的网络生成过程中, 第 G 代 $(1, 5)$ 网络中的每条边替换成一条长度为 1 和一条长度为 5 的路径, 第 G 代 $(3, 3)$ 网络中的每条边替换成两条长度均为 3 的路径, 每条路径的两端均为原网络连边的两个端点

Fig. 1. (color online) Flower model with $G = 3$, and $u + v = 6$: (a) $u = 1$ and $v = 5$; (b) $u = 3$ and $v = 3$. In generation $G + 1$, each link in generation G is replaced by two parallel paths of $u = 1$ and $v = 5$ links long for the model with $u = 1$ and $v = 5$, and each link in generation G is replaced by two parallel paths of $u = 3$ and $v = 3$ links long for the model with $u = 1$ and $v = 3$.

2.2 传播动力学

为了简单而又不失一般性, 我们考虑经典的 SI 疾病传播模型, 该模型能够用于描述艾滋病、淋病、梅毒等疾病的传播过程^[22]. 在传播动力学模拟过程中, 网络中每个节点的状态只能为健康态(S)或者感染态(I). 初始时选择一个节点作为传播种子. 为了比较不同度的传播效果, 我们选择不同度值的节点作为初始传播源. 接下来的每个时间步, 每一个 I 态节点随机选择 α 比例的邻居节点进行接触. 若这些邻居节点处于 S 态, 它们将以一定概率 λ 被感染. 一旦某个 S 节点被感染, 它将永远处于 I 态. 不失一般性, 设 $\lambda = 1$. 理论上 α 可以取 0—1 之间的任意小数, 但鉴于有限接触^[23,24] 和全接触^[25] 是两种最为常见的疾病传播接触模式, 本文分别考虑了 $\alpha = 1/k_i$ 和 $\alpha = 1$ 两种情形. 其中, $\alpha = 1/k_i$ 代表单位时间步内一个节点只能随机接触一个邻居 (简称为 CP 接触), $\alpha = 1$ 则表示节点能与其所有邻居进行接触 (简称为 RP 接触).

2.3 统计参数

在研究疾病传播时, 感染范围和感染时间是两个重要的统计参量. 定义 t 时刻的感染范围为 $\rho(t)$,

其表示 t 时刻网络中的所有感染节点密度. 对应的 t_ρ 表示从疾病开始传播到感染 ρ 比例的节点所需要的感染时间. 考虑到不同的度的传播源可能会对传播结果造成不同程度的影响, 本文将分别从全局和局域角度区分不同节点的影响力. 定义影响力的全局区分度

$$\Psi t_\rho(k) = t_\rho(k)/t_\rho(k_{\min}), \quad (2)$$

影响力的局域区分度

$$\Delta t_\rho(k) = \Psi t_\rho(k) - \Psi t_\rho(k - 1), \quad (3)$$

其中 $t_\rho(k)$ 表示度为 k 的传播源对应的感染时间; $\Psi t_\rho(k)$ 立足于网络的全局结构, 表示度为 k 的传播源相对于最小度传播源的影响, 其值越小, 越容易区分度 k 节点的影响力, 从而能够识别出网络中的超级传播源; $\Delta t_\rho(k)$ 则进一步从局域角度出发, 表示相邻度值的传播源在影响力上的差异性, 差距越大, 则越容易将相邻度节点的影响力区分开. 特别地, 当 $\rho = 1$ 时 SI 传播过程达到稳定, 此时可称 $T = t_1$ 为稳定感染时间, 对应 $\Psi T(k)$ 和 $\Delta T(k)$. 此外, 定义度为 k 的节点与其他节点之间的连接紧密性为

$$d(k) = \frac{\sum_{i \in \tilde{N}_k} d_i}{N_k}, \quad (4)$$

其中 d_i 表示节点 i 与网络中其他节点的平均距离, N_k 表示度为 k 的节点个数, \tilde{N}_k 表示度为 k 的节点集合. 该值越小, 表明度 k 节点与网络中其余节点的连接越紧密, 连接紧密性的全局区分度 $\Psi d(k)$ 和局域区分度 $\Delta d(k)$ 定义同上.

3 试验模拟

3.1 分形网络上的疾病传播

在给定的第 5 代 $(1, 5)$ 和 $(3, 3)$ 网络上, 图 2 分别选取网络中不同度值的节点作为传播源, 考察感染范围的演化过程. 图 2(a) 和图 2(c) 首先展示了基于 CP 接触模式的传播结果. 如图 2(a) 所示, 在 $(1, 5)$ 网络中, 当最大度节点 (与以下出现的中心节点定义等价) 为传播源时, 感染范围的增长明显快于其他传播源的情况. 这是因为该网络中最大度节点之间可以直接相连, 使得疾病能够很快传遍整个网络. 在图 2(c) 中, 对于 $(3, 3)$ 网络, 在传播初期阶段, 虽然最大度传播源之间不能直接相连, 但其周

围的易感邻居众多, 成功感染的机率相对较大, 因此其对应的感染范围依然增长较快. 但中间度值 (介于最小度和最大度之间) 的传播源的传播能力受到限制, 度为16的传播源对应的传播范围增长速度甚至较度为2的传播源慢一些. 这是由于该网络呈现一定的负关联性 (度匹配系数 $r = -0.152$). 度为2的节点能与最大度节点直接相连, 而其他度值的节点只能通过度为2的节点间接到达最大度节点, 即它们与最大度节点之间的距离要相对远一

些. 一旦这些中间度值的节点感染到足够多的度为2的节点, 疾病便能够间接感染到最大度节点, 继而在接下来的时刻, 各种度值的传播源对应的感染范围趋于一致, 如图2(c)所示. 由此我们可以得到: 分形维数越大, 节点影响力的差异越明显, 度大节点更能表现出超级传播源的特性. 图2(b)和图2(d)展示了基于RP接触模式的传播结果, 现象与CP接触下的变化趋势完全一致. 这表明接触模式并不会影响上述结论.

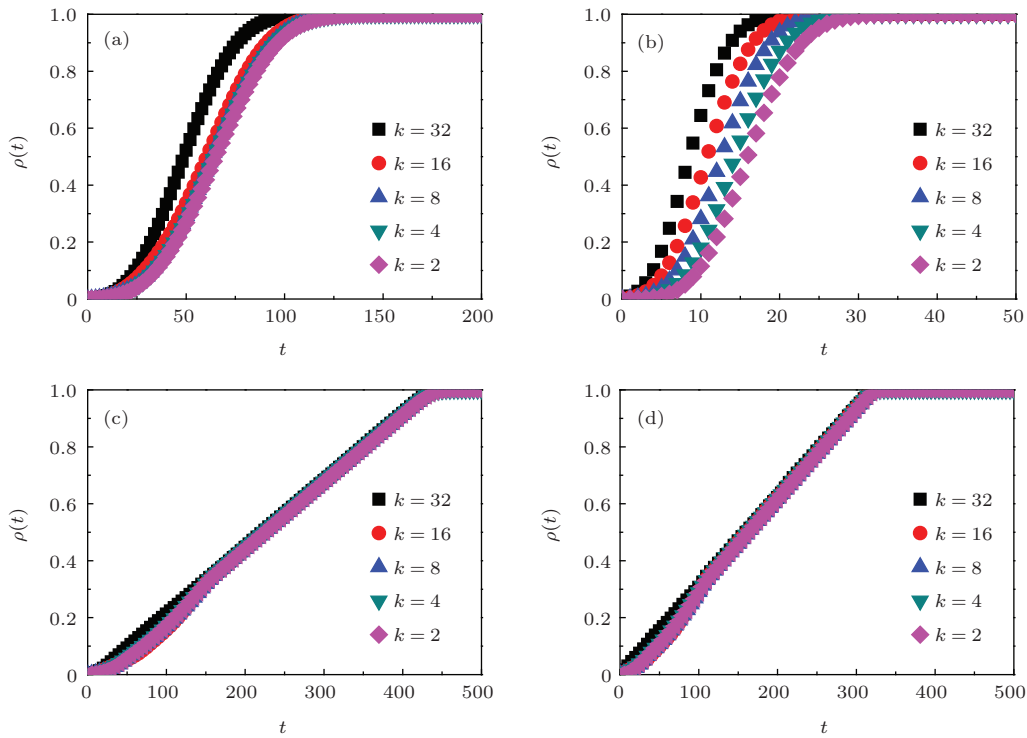


图2 (网刊彩色) 在给定分形网络上, 感染节点密度随时间 t 的演化 (a), (c) 基于 CP 接触的传播结果; (b), (d) 基于 RP 接触的传播结果; 其中 (a), (b) 对应 (1,5) 网络, (c), (d) 对应 (3,3) 网络; 图中每种形状分别代表度为 k 的初始传播源对应的传播情形

Fig. 2. (color online) The time evolution of the density of infected nodes on given fractal networks for CP contact pattern (a) and (c) and RP contact pattern (b) and (d). The network with (1,5) (a, b), and (3,3) (c, d) are considered, respectively. Each symbol represents the case starting from an infected node with degree k .

为了进一步分析和理解分形维数在节点影响力区分方面的影响, 我们具体对比 (1,5) 和 (3,3) 分形网络上的影响力区分情况. 其中 (1,5) 网络具有极大分形维数, 而 (3,3) 网络的分形维数很小. 图3(a) 对度为 k 的传播源对应的稳定感染时间 $T(k)$ 进行了统计. 总体来看, (1,5) 网络上的任意 $T(k)$ 都要比 (3,3) 网络中的小得多. 具体地, 在 (1,5) 网络中, $T(k_{\max})$ 明显小于 $T(k_{\min})$. 而 (3,3) 网络中, $T(k_{\max})$ 和 $T(k_{\min})$ 差不多. 在图3(b) 中, 通过统计节点紧密性发现, $d(k)$ 的变化趋势与 $T(k)$

基本一致. 鉴于此, 图3(c) 基于全局区分度指标对上述现象进行了更直观的阐述. 结果表明, (1,5) 网络中大度传播源的 $\Psi T(k)$ 要比 (3,3) 网络中的小得多, 且前者中 $\Psi T(k)$ 与 k 成反比, 后者中 $\Psi T(k)$ 几乎不随 k 变化. 另外, $\Psi d(k)$ 与 $\Psi T(k)$ 的变化完全一致. 这表明在 (1,5) 网络中, 度越大的节点与其他节点的连接越紧密. 故当最大度节点作为传播源时, 疾病能够在短时间内感染整个网络, 从而成为超级传播源. 而在 (3,3) 网络中, 所有节点的连接紧密性相差不大, 从而不同度的传播源对应的传

播稳定时间几乎一样, 无法区分不同度节点的影响力. 图 3 (d) 进一步对局域区分度指标进行了统计. 结果显示 (1,5) 中的 $\Delta T(k)$ 要比 (3,3) 中的大, 且 $\Delta T(k)$ 和 $\Delta d(k)$ 的变化趋势依然非常一致. 具体地, 在超分形网络中, 中间度值的传播源和最小度传播源之间、最大度传播源和中间度值的传播源之间都存在很明显的影響力差异, 而低分形维网络中几乎所有相邻度值的传播源之间的影响力差异

都非常小. 节点连接紧密性上的局域差异可以较好地解释这一差别. 由上述结果不难看出, 两种接触模式下的传播结果非常相似, 即接触模式并不会定性地影响结论. 但不难发现, 基于 RP 接触的传播结果更直观, 且与网络的连接紧密性更相关. 鉴于此, 本文接下来将集中分析基于 CP 接触的疾病传播, 从而能更充分有力地支持分形结构对节点影响力区分度的影响.

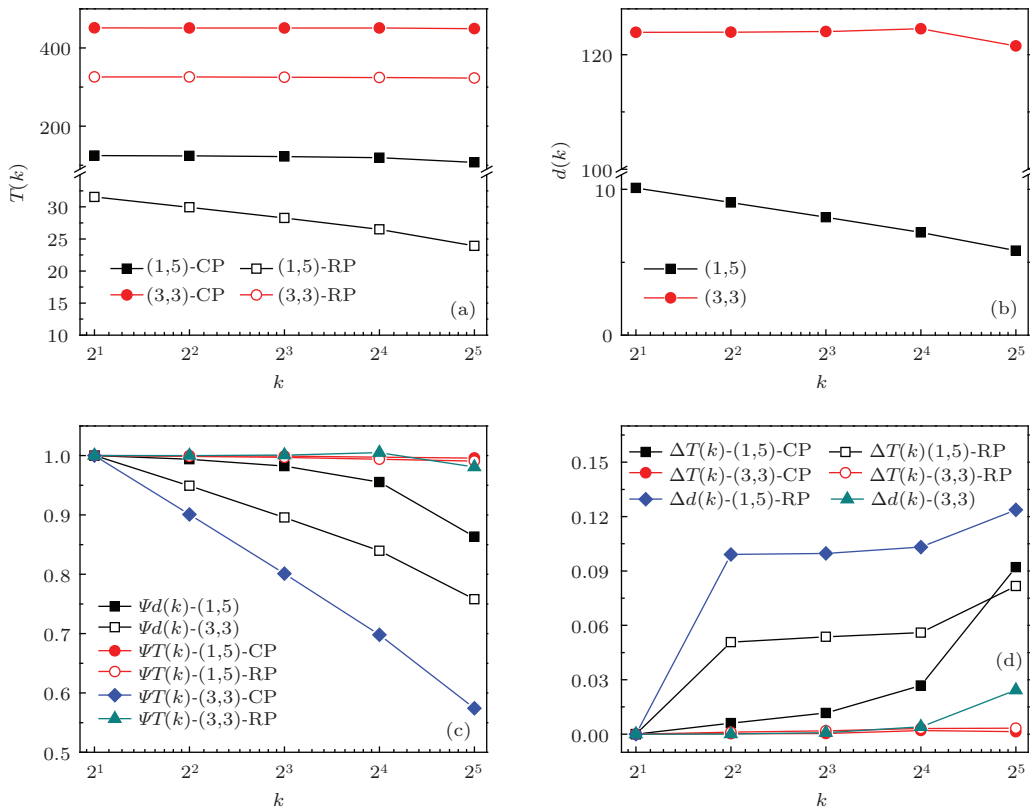


图 3 (网刊彩色) 在给定分形网络上, 节点度对传播稳定时间和连接紧密性的影响 (a) 度为 k 的传播源对应的传播稳定时间; (b) 度为 k 的节点的连接紧密性; (c) 度 k 节点的影响力及其连接紧密性的全局区分度; (d) 度 k 节点的影响力及其连接紧密性的局域区分度; 其中 $\Psi T(k)-(1,5)-CP$ 表示 (1,5) 网络上基于 CP 接触的度 k 节点影响力的全局区分度, $\Psi d(k)-(1,5)$ 表示 (1,5) 网络上度 k 节点连接紧密性的全局区分度, $\Delta T(k)-(1,5)-CP$ 表示 (1,5) 网络上基于 CP 接触的度 k 节点影响力的局域区分度, $\Delta d(k)-(1,5)$ 表示 (1,5) 网络上度 k 节点连接紧密性的局域区分度, 其他标示的定义与此类同

Fig. 3. (color online) Effect of node degree on the steady spreading time and connection closeness: (a) Steady spreading time vs. degree k ; (b) connection closeness vs. degree k ; (c) the global discriminability of the node influence and connection closeness for nodes with degree k ; (d) the local discriminability of the node influence and connection closeness for nodes with degree k . In (c), (d), $\Psi T(k)-(1,5)-CP$ and $\Delta T(k)-(1,5)-CP$ represent the global and local discriminability of the node influence for nodes with degree k on network (1,5) for CP contact pattern, $\Psi d(k)-(1,5)$ and $\Delta d(k)-(1,5)$ indicate the global and local discriminability of the connection closeness for nodes with degree k on network (1,5), other symbols have the similar meanings.

考虑到在不同传播阶段, 不同传播源之间的影响力差异可能会有所不同, 图 4 进一步考察了感染不同比例的节点所需要的时间. 如图 4(a) 所示, 在 (1,5) 网络中, 感染范围 ρ 为不同值时, 感染

时间都随 k 呈递减趋势, 而在 (3,3) 网络中, 传播早期阶段和其他阶段的感染时间变化有明显差异. 如图 4(b) 所示, 当 $\rho = 0.1$ 时, 中间度值的传播源对应的感染时间比最小度传播源对应的感染时间还

要大, 从而进一步验证了图 1 中对 (3,3) 网络上早期传播过程的分析. 在影响力全局区分度的统计结果中, 能够更清楚地观察到上述现象, 如图 4(c) 和图 4(d) 所示. 由此可知, 在高维网络中, 影响力区分度不随疾病演化阶段改变. 在低维网络中, 很

容易区分大度节点在传播初期阶段的影响力, 但其他演化阶段的影响力区分度基本一致. 值得关注的是, 已有的传播动力学研究多是致力于分析最终的稳定结果^[26,27]. 鉴于此, 本文接下来将集中讨论 $\rho = 1$ 时的稳定感染时间.

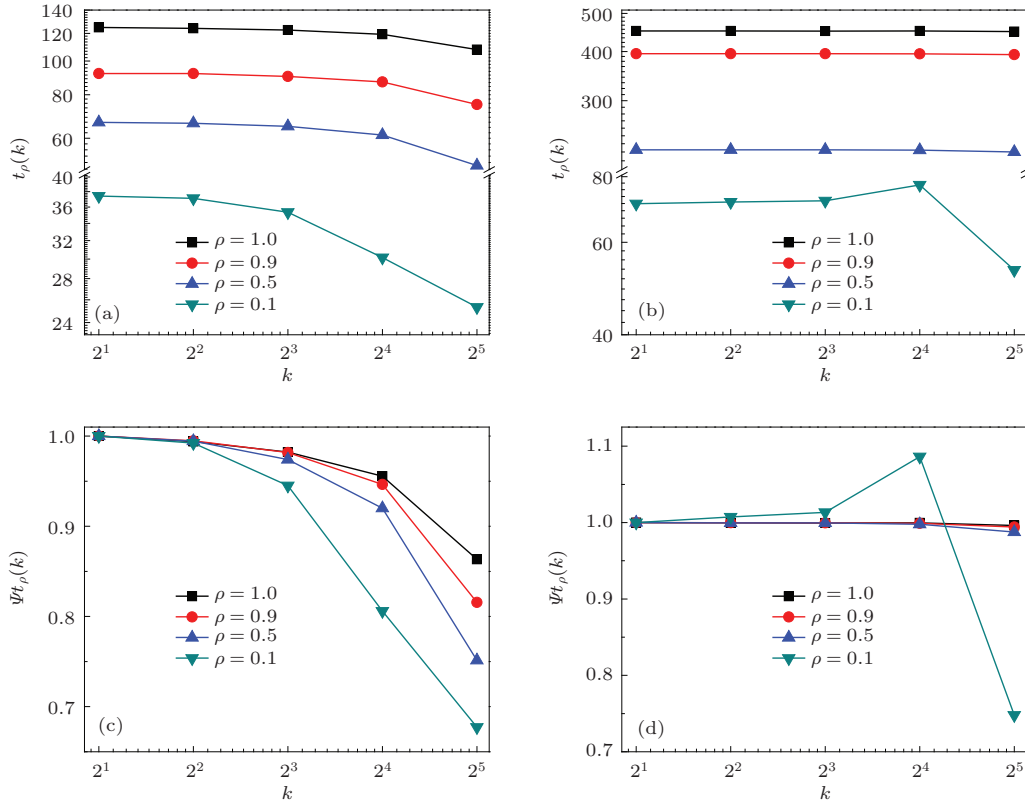


图 4 (网刊彩色) 在给定分形网络上, 不同传播阶段的感染时间比较 (a), (b) 度为 k 的传播源对应的感染时间; (c), (d) 度 k 节点影响力的全局区分度; 其中 (a) 和 (c) 对应 (1,5) 网络, (b) 和 (d) 对应 (3,3) 网络

Fig. 4. (color online) Comparison of the infection time in different spreading stages on the given fractal networks: (a), (b) the infection time of nodes with degree k ; (c), (d) the global discriminability of the node influence for nodes with degree k . The networks (1,5) (a) and (c) and (3,3) (b) and (d) are considered, respectively.

下面我们进一步考虑分形维数的变化对于中心节点影响力区分度的影响. 根据方程 (1), 当给定 w 时, 可以产生一系列度序列一样但分形结构不同的网络, 且分形维数由 u 的取值决定. $u = 1$ 时分形维数趋于无穷大, 而 u 值越大, 分形维数越小. 图 5 分别以 $w = 6$ 和 $w = 10$ 为例, 考察了不同 u 值下的中心节点影响力. 如图 5(a) 所示, 随着 u 的增大, 影响力全局区分度 $\Psi T(k_{\max})$ 逐渐增大, 并更趋于 1. 这表明, 分形维数越小, 越难区分中心节点的影响力. 图 5(c) 中, 当 u 值较小时, $d_{k_{\max}}$ 明显小于 $d_{k_{\min}}$. 随着 u 的增大, $\Psi d(k_{\max})$ 也逐渐趋于 1, $d_{k_{\max}}$ 与 $d_{k_{\min}}$ 趋于一致. 即随着分形维数的减小,

中心节点与网络中其他节点的连接不再紧密, 从而对传播起不到明显的促进作用. 图 5(b) 对影响力局域区分度的分析结果表明, $\Delta T(k_{\max})$ 随着 u 的增大而减小, 即最大度节点和次大度节点的影响力随着维数的减小而趋于一致. $\Delta d(k_{\max})$ 的变化与 $\Delta T(k_{\max})$ 的变化趋势也基本一致, 如图 5(d) 所示. 此外, 我们发现其他度节点的影响力区分度在不同维数的分形网络上也具有上述变化趋势. 这些结论进一步说明在低维分形网络上很难区分不同节点的影响力, 而分形网络的维数越大, 越容易区分不同节点的影响力.

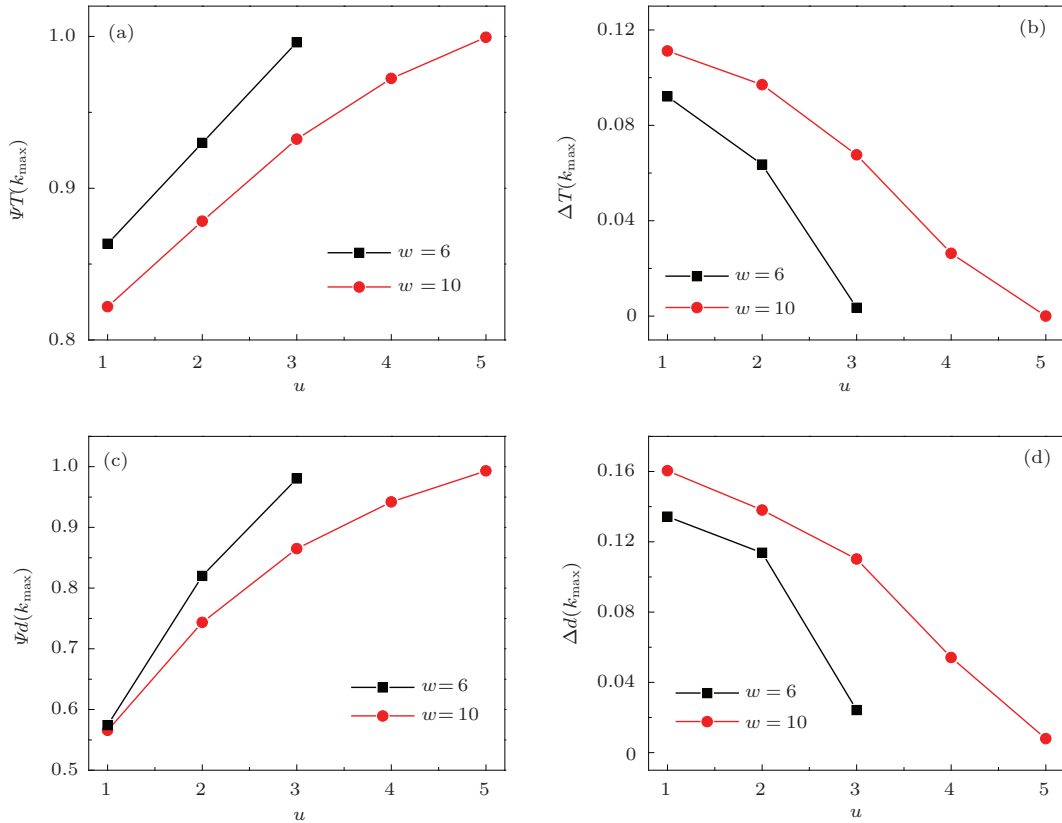


图5 (网刊彩色) 分形维数对中心节点影响力及其连接紧密性的影响 (a) 中心节点影响力的全局区分度; (b) 中心节点影响力的局域区分度; (c) 中心节点连接紧密性的全局区分度; (d) 中心节点连接紧密性的局域区分度
 Fig. 5. (color online) Effect of fractal dimension on the node influence and connection closeness: (a) The global discriminability of the node influence for hub nodes; (b) the local discriminability of the node influence for hub nodes; (c) the global discriminability of the connection closeness for hub nodes; (d) the local discriminability of the connection closeness for hub nodes.

3.2 网络噪声对节点影响力区分度的影响

在实际社会网络中, 个体之间的交互关系并不是一成不变的, 交互关系的变化会改变原网络的连边情况, 从而给原网络信息带来一定的噪声干扰 [28]. 在含噪网络数据中存在一定的虚假连边或缺失一些重要的连边 [29], 例如, 生物试验得到的蛋白质交互包含大量的错误信息和漏报率 [30]; 社会网络中对朋友的定义会形成有歧义的人际关系, 并且获得全面的社会网络数据存在成本和技术困难 [31]. 本小节中, 我们对分形网络进行了一定的随机化 [32], 以此来考察网络噪声对节点影响力区分度的影响. 具体的随机化过程按照如下方式进行: 随机选择两条边 $a-b$ 和 $c-d$, 在不存在重边和自环的前提下, 将它们交换成 $a-d$ 和 $b-c$. 重复该过程直到网络中有 p 比例的连边发生了改变, 且最终只考虑联通网络. p 值的大小体现了网络噪声的干扰强度, 也决定了网络随机化的程度. 随机化过程不会改变

原网络的度分布, 但会影响原网络的簇系数、度关联性、节点距离和分形结构等, 如表 2 所列. 随机化后两种网络都具有较小的聚类系数. (3, 3) 网络的度关联性 r 随着 p 的增大而增大, 节点之间的平均距离 d 随着 p 的增大而减小; (1, 5) 网络中 r 和 d 则呈相反的变化趋势. 我们基于盒子算法 [3] 计算覆盖整个网络中的节点所需要的大小为 l_B 的盒子的最小数量 N_B , 结果发现在随机化网络上, N_B 与 l_B 不满足幂律关系 $N_B \sim l_B^{-d_f}$, 即随机化后网络不再具有严格的分形维数.

在给定 p 时, 为获得精确稳定的传播结果, 我们分别在 100 个不同的网络上, 每个网络上进行 N 次不同的试验, 其中 N 是网络规模, 其值为 6222. 文中所有随机化网络上的传播结果均为 $100N$ 次试验的平均值. 图 6 分别基于 (1, 5) 和 (3, 3) 分形网络, 考虑随机化后的影响力全局区分度. 如图 6(a) 所示, 在 (1, 5) 网络中, 只需少许随机化 (例如, $p = 0.1$) 便能明显增大最大度传播源对应的

$\Psi T(k)$, 而中间度值的传播源对应的 $\Psi T(k)$ 则明显减小. 这表明, 相比于最小度传播源, 网络噪声的引入提升了中间度节点的传播影响力, 而中心节点的传播影响力则相应降低了. 这是因为网络噪声使得中间度节点与其他节点之间的连接变得更加紧密, 但使得中心节点不能再与其他节点紧密相连. 如图 6(c) 所示, 中间度节点对应的 $\Psi d(k)$ 随着 p 的增大稍许减小, 而中心节点对应的 $\Psi d(k)$ 则随 p 明显增大. 图 6(b) 中, 对于 (3,3) 网络, 随着重连概率 p 的增大, 相对于最小度传播源, 度 k 传播源对应的 $\Psi T(k)$ 明显减少, 特别是中心节点. 这是因为网络

噪声降低了度 k 节点的连接紧密性, 使得它们与其他节点之间的连接变得紧密. 如 6(d) 所示, 度 k 节点连接紧密性的全局区分度 $\Psi d(k)$ 随着 p 的增大而减小. 由此不难得出, 在分形维数无穷大的超分形网络中, 网络噪声的存在使得更容易区分中间度节点与最小度节点的影响力, 但很难区分中心节点与最小度节点的影响力, 从而削弱了中心节点对疾病传播的影响. 而在分形维数很小的网络中, 加入网络噪声之后能够很容易区分不同度节点的影响力, 特别是能够突出中心节点的超级传播源角色.

表 2 随机化网络的结构特性, 其中 $c, r, \langle d \rangle$ 和 d_f 的定义同表 1, “—” 表示不存在有效值

Table 2. Topological characters of randomized networks, where $c, r, \langle d \rangle$ and d_f have the same meanings as those in Table 1, “—” stands for the invalid value.

p	c		r		$\langle d \rangle$		d_f	
	(1,5)	(3,3)	(1,5)	(3,3)	(1,5)	(3,3)	(1,5)	(3,3)
0	0	0	0.135	-0.152	9.898	123.917	1.631	∞
0.1	0.0001	0.0001	0.117	-0.135	10.173	15.980	—	—
0.5	0.0003	0.0003	0.052	-0.067	10.485	11.553	—	—
1	0.0004	0.0004	0	0	10.739	10.477	—	—

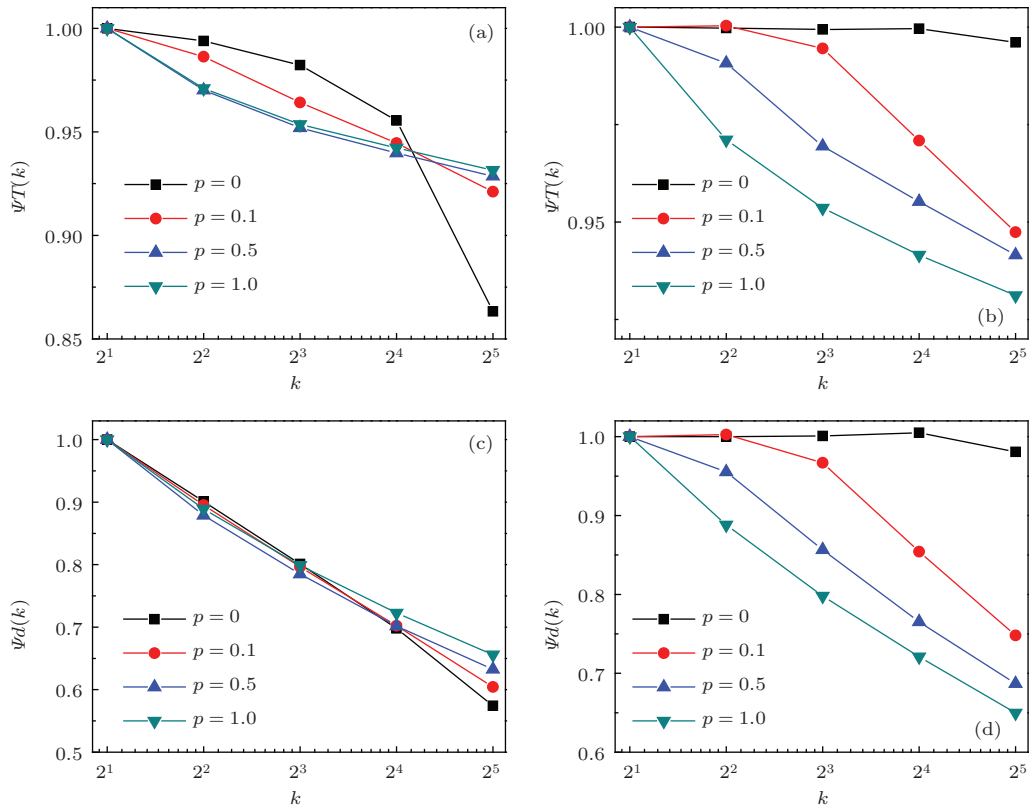


图 6 (网刊彩色) 随机化对全局区分度的影响 (a), (b) 度 k 节点影响力的全局区分度; (c), (d) 度 k 节点连接紧密性的全局区分度; 其中 (a) 和 (c) 对应 (1,5) 网络, (b) 和 (d) 对应 (3,3) 网络

Fig. 6. (color online) Effects of randomized process on the global discriminability: (a), (b) The global discriminability of node influence for nodes with degree k ; (c), (d) the global discriminability of connection closeness for nodes with degree k . The networks (1,5) (a) and (c) and (3,3) (b) and (d) are considered, respectively.

进一步, 图7分别基于(1,5)和(3,3)网络, 考虑随机化后的影响力局域区分度. 值得注意的是, 不同于原分形网络上的结果[见图3(c)和图3(d)], 加入网络噪声之后节点影响力的局域区分度不再随着节点度单调变化, 而是呈一定的非线性变化. 如图7(a)所示, 在(1,5)网络中, 引入网络噪声会显著降低最大度节点和次大度节点影响力的局域区分度, 但同时提高了小度节点影响力的局域区分度. 在(3,3)网络中, 相对于不含噪声的情形($p = 0$), 网络噪声的引入能够提高所有节点影响力的局域区分度. 噪声强度越大, 越能提高小度节点影响力的局域区分度. 少许的噪声干扰(如

$p = 0.1$)会使得最大度节点和次大度节点影响力的局域区分度急剧增大, 而随着 p 的继续增大, 它们的影响力局域区分度又明显降低, 如图7(b)所示. 这些现象依旧能从连接紧密性上得到很好的解释, 如图7(c)和图7(d)所示, $\Delta d(k)$ 和 $\Delta T(k)$ 的变化趋势依然比较一致. 上述结论表明, 在含噪声的超分形网络中, 更容易将两个度值相邻的小度节点的影响力区分开来, 但很难区分两个度值相邻的大度节点的影响力. 而在低维分形网络上, 加入网络噪声之后很容易区分任意两个相邻度值的节点影响力.

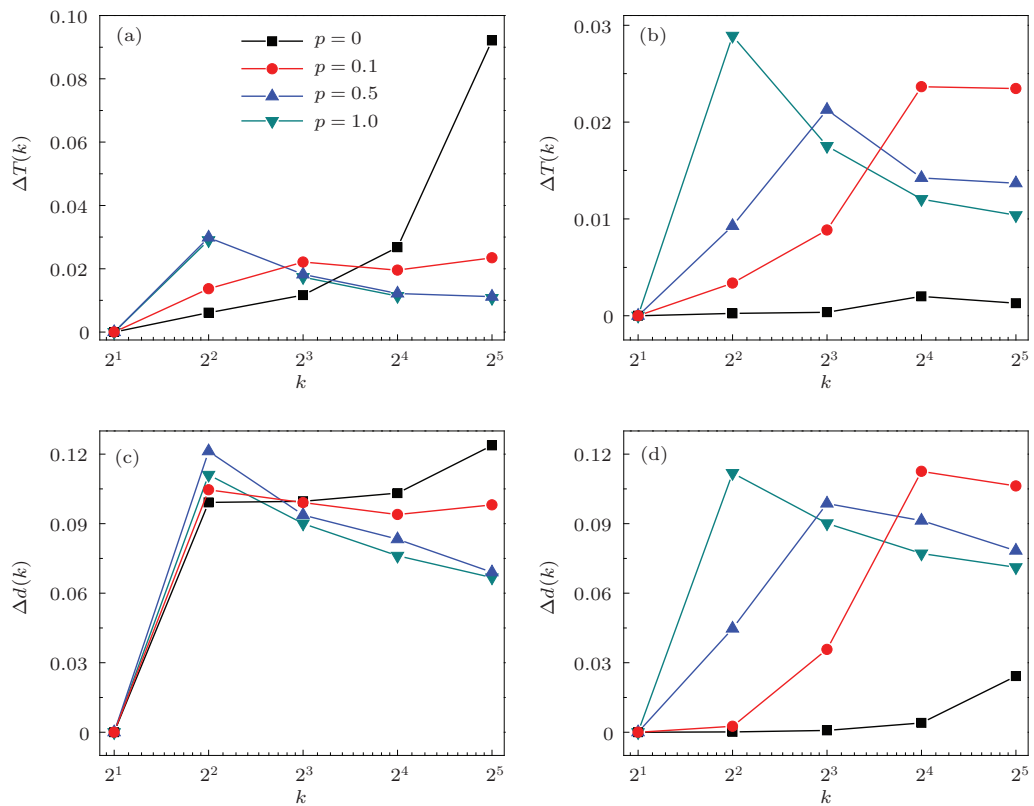


图7 (网刊彩色) 随机化对局域区分度的影响 (a), (b) 度 k 节点影响力的局域区分度; (c), (d) 度 k 节点连接紧密性的局域区分度; 其中 (a) 和 (c) 对应 (1,5) 网络, (b) 和 (d) 对应 (3,3) 网络

Fig. 7. (color online) Effects of randomized process on the local discriminability: (a), (b) The local discriminability of node influence for nodes with degree k ; (c), (d) the local discriminability of connection closeness for nodes with degree k . The networks (1,5) (a) and (c) and (3,3) (b) and (d) are considered, respectively.

4 结 论

基于复杂网络的疾病传播分析是研究真实流行病传播的常用方法. 本文基于一种分形结构模型——花簇模型(u, v), 研究了花簇分形网络上的 SI 疾病传播过程. 首先, 我们考察网络的分形维数

对疾病传播范围和感染时间的影响. 发现在低维花簇分形网络中, 不同传播源对应的传播范围的演化趋势几乎一致; 而在高维花簇分形网络中, 相比小度传播源, 大度传播源更有利于疾病传播. 我们提出了节点影响力的区分度指标, 并发现当分形维数很小时, 不同度节点的连接紧密性基本一致, 以致于很难区分不同传播源在传播影响力上的差异性.

而当分形维数趋于无穷大时, 节点的连接紧密性随着节点度的增大而减小, 导致不同度的节点影响力之间有明显差异, 从而很容易识别传播过程中的关键节点. 进一步, 我们通过改变 u 值, 分析节点影响力区分度随分形维数的变化. 结果再次表明, 在低维花簇分形网络上, 很难区分不同节点的影响力, 而分形网络的维数越大, 越容易区分不同节点的影响力.

另外, 我们对花簇分形网络进行一定的随机化, 以此来考虑网络噪声对节点影响力区分度的影响. 结果发现, 在分形维数很小的网络中, 加入网络噪声之后节点连接紧密性随着节点度呈明显变化, 从全局角度上能够很容易区分不同度节点的影响力, 特别是能够突出中心节点的超级传播源角色. 而在分形维数无穷大的超分形网络中, 网络噪声的存在使得中间度节点与其他节点之间的连接变得更加紧密, 但使得中心节点不能再与其他节点紧密相连, 导致从全局角度更容易区分中间度节点的影响力, 但很难识别中心节点的影响力. 从局域角度上来看, 在低维分形网络上, 加入网络噪声之后很容易区分任意两个相邻度值的节点影响力. 而在含噪声的超分形网络中, 从局域角度更容易区分小度节点的影响力, 但很难区分大度节点的影响力.

综上所述, 在花簇分形网络中, 节点之间的连接紧密性对疾病传播具有直接的影响, 这一研究结果增进了花簇分形网络结构如何作用于传播影响力的理解. 然而, 除了特殊的节点度分布和节点距离之外, 在网络簇系数、度关联性等结构特性上, 花簇分形网络和其他随机网络之间也存在很大差异. 这些特有的结构特性在疾病传播动力学中的作用还有待进一步讨论. 此外, 在分析网络分形维数随重连操作的变化时, 我们发现分形维数的解析值与基于盒子算法^[3]的拟合分形维数具有一定的差异性, 原分形网络在经过重连操作之后不再具有严格的分形维数. 基于盒子算法得到的分形维数本身就存在一定的统计问题, 因此, 基于更一般的分形网络模型和真实分形网络结构研究分形维数与节点影响力的相关性尚存在一定的困难, 如何研究这些分形网络上的疾病传播问题也是我们下一步关注的重点.

参考文献

[1] Song C, Havlin S, Makse H A 2005 *Nature* **433** 392

- [2] Song C, Havlin S, Makse H A 2006 *Nat. Phys.* **2** 275
- [3] Song C, Gallos L K, Havlin S, Makse H A 2007 *J. Stat. Mech.* P03006
- [4] Kim J S, Goh K I, Kahng B, Kim D 2007 *Chaos* **17** 026116
- [5] Kitsak M, Havlin S, Paul G, Riccaboni M, Pammolli F, Stanley H E 2007 *Phys. Rev. E* **75** 056115
- [6] Zhang Z Z, Zhou S G, Zou T 2007 *Eur. Phys. J. B* **56** 259
- [7] Hinczewski M 2007 *Phys. Rev. E* **75** 061104
- [8] Zhang Z Z, Xie W L, Zhou S G, Gao S Y, Guan J H 2009 *Europhys. Lett.* **88** 10001
- [9] Zhang Z Z, Zhou S G, Zou T, Chen G S 2008 *J. Stat. Mech.* P09008
- [10] Rozenfeld H D, Havlin S, ben-Avraham D 2007 *New J. Phys.* **9** 175
- [11] Lee H K, Shim P S, Noh J D 2013 *Phys. Rev. E* **87** 062812
- [12] Liu J G, Ren Z M, Guo Q, Wang B H 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 178901 (in Chinese) [刘建国, 任卓明, 郭强, 汪秉宏 2013 物理学报 **62** 178901]
- [13] Gong K, Tang M, Hui P M, Zhang H F, Do Y, Lai Y C 2013 *PLoS ONE* **8** e83489
- [14] Li R Q, Tang M, Hui B M 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 168903 (in Chinese) [李睿琪, 唐明, 许伯铭 2013 物理学报 **62** 168903]
- [15] Pastor-Satorras R, Vespignani A 2002 *Phys. Rev. E* **65** 036104
- [16] Kitsak M, Gallos L K, Havlin S, Liljeros F, Muchnik L, Stanley H E, Makse H A 2010 *Nat. Phys.* **6** 888
- [17] Chung N N, Chew L Y, Zhou J, Lai C H 2012 *Europhys. Lett.* **98** 58004
- [18] Chen D B, Lü L Y, Shang M S, Zhang Y C, Zhou T 2012 *Physica A* **391** 1777
- [19] Bauer F, Lizier J T 2012 *Europhys. Lett.* **99** 68007
- [20] Costa L da F, Rodrigues F A, Traverso G, Boas P R V 2007 *Adv. Phys.* **56** 167
- [21] Pu J, Chen X W, Wei D J, Liu Q, Deng Y 2014 *Europhys. Lett.* **107** 10010
- [22] Anderson R M, May R M 1992 *Infectious Disease of Humans* (Oxford: Oxford University Press) pp1-768
- [23] Castellano C, Pastor-Satorras R 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 038701
- [24] Shu P P, Tang M, Gong K, Liu Y 2012 *Chaos* **22** 043124
- [25] Barthélemy M, Barrat A, Pastor-Satorras R, Vespignani A 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 178701
- [26] Yang H, Tang M, Zhang H F 2012 *New J. Phys.* **14** 123017
- [27] Wang W, Tang M, Zhang H F, Gao H, Do Y, Liu Z H 2014 *Phys. Rev. E* **90** 042803
- [28] Lü L Y, Zhang Y C, Yeung C H, Zhou T 2011 *PLoS ONE* **6** e21202
- [29] Guimerá R, Sales-Pardo M 2009 *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **106** 22073
- [30] Legrain P, Wojcik J, Gauthier J M 2001 *Trends in Genetics* **17** 346
- [31] Marsden P V 1990 *Annual Review of Sociology* **16** 435
- [32] Newman M E J 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 208701

Discriminability of node influence in flower fractal scale-free networks*

Shu Pan-Pan Wang Wei Tang Ming[†] Shang Ming-Sheng

(Web Sciences Center, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China)

(Received 10 February 2015; revised manuscript received 28 June 2015)

Abstract

Extensive studies have shown that the fractal scaling exists widely in real complex systems, and the fractal structure significantly affects the spreading dynamics on the networks. Although node influence in spreading dynamics of complex networks has attracted more and more attention, systematical studies about the node influence of fractal networks are still lacking. Based on the flower model, node influences of the fractal scale-free structures are studied in this paper. Firstly, the node influences of different fractal dimensions are compared. The results indicate that when the fractal dimension is very low, the discriminability of node influences almost does not vary with node degree, thus it is difficult to distinguish the influences of different nodes. With the increase of fractal dimension, it is easy to recognize the super-spreader from both the global and local viewpoints. In addition, the network noise is introduced by randomly rewiring the links of the original fractal networks, and the effect of network noise on the discriminability of node influence is analyzed. The results show that in fractal network with low dimension, it becomes easier to distinguish the influences of different nodes after adding network noises. In the fractal networks of infinite dimensions, the existence of network noises makes it possible to recognize the influences of medium nodes. However it is difficult to recognize the influences of central nodes from either the global or local perspective.

Keywords: fractal structure, epidemic spreading, influence, discriminability

PACS: 89.75.Hc, 87.19.X-, 87.23.Ge

DOI: [10.7498/aps.64.208901](https://doi.org/10.7498/aps.64.208901)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11105025, 11575041) and the Program of Outstanding Ph. D. Candidate in Academic Research by Electronic Science and Technology of China (Grand No. YXBSZC20131033).

[†] Corresponding author. E-mail: tangminghuang521@hotmail.com