

非马尔科夫耗散系统长时演化下的极限环振荡现象

游波 岑理相

Phenomena of limit cycle oscillations for non-Markovian dissipative systems undergoing long-time evolution

You Bo Cen Li-Xiang

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 210302 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.210302

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.210302>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I21>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

电感电流伪连续导电模式下 Buck 变换器的动力学建模与分析

Dynamical modeling and analysis of buck converter operating in pseudo-continuous conduction mode

物理学报.2015, 64(18): 180501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.180501>

基于有源广义忆阻的无感混沌电路研究

Inductorless chaotic circuit based on active generalized memristors

物理学报.2015, 64(17): 170503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.170503>

混沌信号的压缩感知去噪

Chaotic signal denoising in a compressed sensing perspective

物理学报.2015, 64(16): 160502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.160502>

基于数模混合的混沌映射实现

Chaotic map implementation based on digital-analog hybrid method

物理学报.2015, 64(16): 160501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.160501>

利用量子相干性判定开放二能级系统中非马尔可夫性

Non-Markovianity of open two-level system by means of quantum coherence

物理学报.2015, 64(14): 140302 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.140302>

# 非马尔科夫耗散系统长时演化下的 极限环振荡现象\*

游波 岑理相†

(四川大学物理科学与技术学院, 成都 610065)

(2015年5月25日收到; 2015年6月25日收到修改稿)

本文研究结构化环境中非马尔科夫耗散系统在长时演化下可能出现的极限环振荡现象. 对于欧姆型谱密度环境中的二能级系统, 由于体系只允许一个束缚态模, 给定初态系统在 Bloch 空间的长时演化将收敛于一个极限环. 研究揭示了极限环半径与环心位置同环境谱密度函数间的关系. 对于多带光子晶体环境中的二能级系统, 由于其可以存在多个束缚态, 研究展现了系统在长时演化下可能出现的收敛于环面或周期或准周期的振荡行为. 有关环面的特征量与环境谱密度间的量化关系同样得以刻画. 论文随后讨论了两比特系统关联量在局域非马尔科夫耗散环境中长时演化可能出现的特征行为.

**关键词:** 开放量子系统, 非马尔科夫耗散, 极限环, 束缚态

**PACS:** 03.65.Yz, 37.30.+i, 05.45.-a

**DOI:** 10.7498/aps.64.210302

## 1 引言

开放量子系统是统计物理领域长期以来一个基本研究课题. 受益于量子信息科学应用的诉求和推动, 近年来有关开放量子系统动力学演化的非马尔科夫效应<sup>[1]</sup>引起强烈关注和研究. 以最简单的二能级原子自发辐射模型为例, 非马尔科夫效应即辐射场对原子系统的回馈作用可以导致激发态布居衰减的减缓和振荡行为; 在强耦合情形, 原子甚至可以和辐射场形成束缚态从而在长时演化下保持部分量子相干性. 有关研究比如在光子晶体材料中束缚态的形成及自发辐射的抑制现象早前在量子光学中已有过许多研究<sup>[2-7]</sup>及实验检验<sup>[8-10]</sup>. 近些年相关研究则延伸到量子关联的耗散动力学行为以及非马尔科夫性的探讨上<sup>[11-14]</sup>. 如文献<sup>[11]</sup>提出纠缠态在局域耗散下其非马尔科夫效应可以导致纠缠俘获现象; 文献<sup>[14]</sup>则进一步揭示了这类纠缠保持现象与束缚态的形成相关.

耗散系统非马尔科夫效应研究的一个核心任务是描述系统动力学行为与库场性质特别是库场谱密度函数之间的联系. 缘于开放量子系统的复杂性, 通常的动力学研究很难直接展现两者间的量化关系. 在这一点上, 研究非马尔科夫系统长时动力学渐近行为是一个很好的突破口. 一般而言, 耗散系统在长时演化下会表现出稳定的渐近行为, 描述这些稳定的渐近行为与环境的谱密度函数之间的关系相对容易. 因此研究非马尔科夫系统长时渐近动力学以揭示库场性质对其影响是一个有益且可行的思路. 对于局域耗散下的二能级自发辐射模型, 文献<sup>[15]</sup>利用一类结构化环境中束缚态的唯一性刻画了渐近末态行为包括激发态布居数及量子关联同环境谱密度函数间存在的特殊的泛函关系. 在这篇论文中, 我们将针对二能级原子系统在结构化环境中长时动力学演化呈现的极限环振荡现象展开研究. 特别地, 我们的研究将展示, 在体系存在多个束缚态(或稳定模)解情形, 系统渐近动力学可能出现轨迹收敛到极限圆环面或周期或准周期

\* 国家自然科学基金(批准号: 10874254)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: [lixiangcen@scu.edu.cn](mailto:lixiangcen@scu.edu.cn)

的振荡行为.

## 2 二能级系统的束缚态与动力学极限环

二能级原子自发辐射模型通常由下面的旋波近似哈密顿量描述:

$$H = \omega_0 \sigma_+ \sigma_- + \sum_j \left[ \omega_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j + (g_j \hat{b}_j \sigma_+ + g_j^* \hat{b}_j^\dagger \sigma_-) \right]. \quad (1)$$

式中  $\omega_0$  为二能级原子的能级差,  $\sigma_\pm$  为原子能级的升降算子.  $\hat{b}_j$  ( $\hat{b}_j^\dagger$ ) 为  $\omega_j$  辐射场模式的湮灭(产生)算子. 若初始时刻原子处于激发态, 辐射场处在真空态, 即体系总波函数为  $|\psi(0)\rangle = |1\rangle \otimes |\{0_j\}\rangle$ . 由于激发数守恒,  $t$  时刻总体系波函数为

$$|\psi(t)\rangle = c(t)|1, \{0_j\}\rangle + \sum_j c_j(t)|0, \{1_j\}\rangle,$$

其中  $c(t)$  满足微分-积分方程<sup>[1]</sup>

$$\frac{dc(t)}{dt} + i\omega_0 c(t) = - \int_0^t dt_1 f(t-t_1) c(t_1). \quad (2)$$

上式中积分核  $f(t-t_1) = \int d\omega J(\omega) e^{-i\omega(t-t_1)}$ ,  $J(\omega) = \sum_k |g_k|^2 \delta(\omega - \omega_k)$  即是辐射场的谱密度函数. 更一般地, 如果初始时刻原子处在一般混合态  $\rho_A(0)$ , 辐射场为真空态, 那么  $t$  时刻二能级原子的约化密度矩阵可以求得为

$$\rho_A(t) = \sum_{k=1}^2 \Omega_k(t) \rho_A(0) \Omega_k^\dagger(t), \quad (3)$$

其中 Kraus 算符

$$\Omega_1(t) = |0\rangle\langle 0| + c(t)/c(0) |1\rangle\langle 1|,$$

$$\Omega_2(t) = \sqrt{1 - |c(t)/c(0)|^2} |0\rangle\langle 1|.$$

现在我们具体取定环境谱密度函数  $J(\omega)$ , 比如取常用的指数截断欧姆型谱

$$J_o(\omega) = \eta \omega_c^{1-s} \omega^s e^{-\omega/\omega_c}, \quad (4)$$

其中  $\eta$  反映耦合大小,  $\omega_c$  为辐射场的截断频率,  $s$  通常被称为欧姆性: 即当  $0 < s < 1$ , 上式称为次欧姆谱,  $s = 1$  称为欧姆谱,  $s > 1$  则称为超欧姆谱. 根据上述方程(2)式和(3)式, 系统在 Bloch 空间中的演化轨迹可以数值画出. 在强耦合即  $\eta$  较大情形, 由于非马尔科夫效应, 系统末态可以处在不完全退

相干的状态上. 这直接表现为在 Bloch 空间中表征系统状态的矢量  $\mathbf{r}(t)$  经过长时间演化后其轨迹收敛于平行  $xy$  平面的极限环. 图 1 中我们给出了系统在给定欧姆谱参数下的演化轨迹, 其原子初态设为  $|\psi_A(0)\rangle = \cos(\pi/12)|1\rangle + i \sin(\pi/12)|0\rangle$ , 图像清晰展示了长时演化下原子系统呈现的极限环振荡现象.

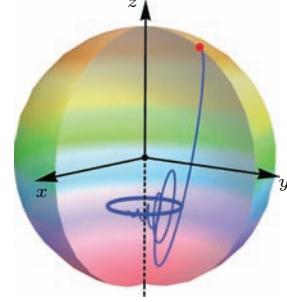


图 1 (网刊彩色) 系统约化密度矩阵在 Bloch 空间的演化轨迹 (初态取  $\mathbf{r}(0) = (0, 1/2, \sqrt{3}/2)$ ; 环境谱密度函数由方程(4)给出, 其参数取  $\eta = 0.08$ ,  $s = 5.5$ ,  $\omega_c = 0.3\omega_0$ )  
Fig. 1. (color online) Trajectory of time evolution of the reduced density matrix of the system in Bloch space. The initial state is specified by  $\mathbf{r}(0) = (0, 1/2, \sqrt{3}/2)$ ; the spectral density of the reservoir is given by Eq. (4) with parameters  $\eta = 0.08$ ,  $s = 5.5$ , and  $\omega_c = 0.3\omega_0$ .

容易理解, 这里极限环的半径与水平位置依赖于初始密度矩阵以及库场谱密度函数. 要具体刻画其量化关系, 需要考虑系统的束缚态本征解. 假设系统哈密顿量在激发数为 1 的子空间存在本征解  $|\Phi_{BS}\rangle = d|1, \{0_j\}\rangle + \sum_j d_j |0, \{1_j\}\rangle$ , 对应的久期方程经整理可得<sup>[7]</sup>

$$\omega_0 - \int_{\mathcal{T}} d\omega \frac{J(\omega)}{\omega - E} = E, \quad (5)$$

其中  $\mathcal{T}$  为谱密度函数  $J(\omega)$  的分布区域. 一旦从上式中求得本征能量  $E$ , 即可进一步计算  $|\Phi_{BS}\rangle$  的各项系数:

$$d = \left[ 1 + \int_{\mathcal{T}} d\omega \frac{J(\omega)}{(\omega - E)^2} \right]^{-1/2},$$

$$d_j = \frac{g_j d}{E - \omega_j}. \quad (6)$$

上式中我们已设定系数  $d$  为正实数. 如果系统的久期方程(5)只有唯一一个束缚态解, 则(5), (6)两式直接可以理解为  $d$  作为  $J(\omega)$  的隐泛函:  $d = d[J(\omega)]$ ; 再者, 系统初态除了束缚态成份, 其余正交分量经演化都将耗散至基态, 从而可以建立

起系统渐近稳态与定态模(束缚态)之间的联系<sup>[15]</sup>. 确切地讲, 在时间趋于无穷 ( $t \rightarrow t_\infty$ ) 极限下, 有

$$c(t_\infty) = c(0)d^2 e^{-iEt_\infty}. \quad (7)$$

将此结果代入方程(3)式, 即可看出系统渐近演化的末态在 Bloch 空间收敛于一平行于赤道面的极限环, 该极限环的半径  $R^\infty$  及环心所在位置  $r_z^\infty$  与谱密度函数  $J(\omega)$  可建立如下关系:

$$\begin{aligned} \frac{R^\infty}{R(0)} &= d^2[J(\omega)], \\ \frac{1+r_z^\infty}{1+r_z(0)} &= d^4[J(\omega)], \end{aligned} \quad (8)$$

其中  $\mathbf{r}(0)$  为初始时刻系统在 Bloch 空间的态矢量,  $R(0) \equiv \sqrt{r_x^2(0) + r_y^2(0)}$ . 对于图1 描述的情形, 有  $d^2 \approx 0.58$ ; 再由初态  $\mathbf{r}(0) = (0, 1/2, \sqrt{3}/2)$ , 可以得到极限环的半径  $R^\infty \approx 0.29$  及位置  $r_z^\infty \approx -0.38$ .

### 3 多带光子晶体环境中系统的极限环面振荡

前面部分描述了二能级原子在欧姆型谱密度库场中演化可能呈现的极限环振荡现象, 其特点是欧姆型谱密度库场中的二能级系统仅允许一个束缚态本征模. 一个值得进一步探讨的很有趣的问题是, 如果体系存在两个甚至更多的束缚态情形, 系统的渐近动力学是否会否出现收敛到环面的(准)周期振荡行为. 基于这一想法, 下面我们具体考察多带光子晶体环境中的二能级原子, 这类体系允许存在两个甚至更多束缚态. 我们的研究揭示, 这类体系的渐近动力学可以呈现收敛到极限环面或周期或准周期的振荡行为.

有关光子晶体环境中原子自发辐射模型的建立和研究可以参考文献[2—6]. 考虑两带结构对原子自发辐射的影响, 介质的谱密度函数具有如下形式<sup>[5,7]</sup>:

$$J_p(\omega) = \frac{\eta_p(\omega_1\omega_2)^{\frac{3}{4}}}{\pi} \left[ \frac{\Theta(\omega_1 - \omega)}{\sqrt{\omega_1 - \omega}} + \frac{\Theta(\omega - \omega_2)}{\sqrt{\omega - \omega_2}} \right], \quad (9)$$

其中  $\Theta$  为阶跃函数. 上式描述了辐射场频谱分布在两个区域即  $(0, \omega_1)$  和  $(\omega_2, \infty)$  内. 此时系统允许两个束缚态解. 类似的, 考虑系统哈密顿量(1)式的本征解, 其久期方程包含了两段积分

$$E = \omega_0 - \int_0^{\omega_1} \frac{J(\omega)d\omega}{\omega - E} - \int_{\omega_2}^{\infty} \frac{J(\omega)d\omega}{\omega - E}$$

$$\equiv Y(E). \quad (10)$$

直接观察可以发现, 上式两积分项在区域  $(-\infty, 0)$  和  $(\omega_1, \omega_2)$  内都是  $E$  的单调递减函数, 故方程最多可以有两个根: 一个取负值  $E_1 < 0$ ; 另一个位于带隙  $\omega_1 < E_2 < \omega_2$ . 根的具体取值需要通过图解法求出. 图2(a) 演示了给定谱密度参数下由图解法求根过程. 当  $\eta_p = 0.3$  时, 两根数值约为  $E_1 \approx -0.04\omega_0$ ,  $E_2 \approx 1.15\omega_0$ ;  $\eta_p = 0.5$  时则有  $E_1 \approx -0.21\omega_0$ ,  $E_2 \approx 1.17\omega_0$ . 相应地, 得到根数值后, 即可代入哈密顿量本征方程求系统束缚态表达式  $|\Phi_{BS}^{(k)}\rangle = d^{(k)}|1, \{0_j\}\rangle + \sum_j d_j^{(k)}|0, \{1_j\}\rangle$  ( $k = 1, 2$ ), 其中

$$d^{(k)} = \left[ 1 + \int_0^{\omega_1} \frac{J(\omega)d\omega}{(\omega - E_k)^2} + \int_{\omega_2}^{\infty} \frac{J(\omega)d\omega}{(\omega - E_k)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (11)$$

确定了系统的束缚态解后, 我们可以进一步刻画系统的长时演化行为. 记  $U(t_\infty) = e^{-iHt_\infty}$  为长时极限下系统的时间演化算子. 如果原子初态在激发态上, 则经长时演化后原子在激发态上的成份可以推导如下:

$$\begin{aligned} c(t_\infty) &= \langle 1, \{0_j\} | U(t_\infty) | 1, \{0_j\} \rangle \\ &= \langle 1, \{0_j\} | U(t_\infty) \left[ \sum_{k=1}^2 d^{(k)} |\Phi_{BS}^{(k)}\rangle + \bar{d} |\Phi_D\rangle \right] \\ &= [d^{(1)}]^2 e^{-iE_1 t_\infty} + [d^{(2)}]^2 e^{-iE_2 t_\infty}. \end{aligned} \quad (12)$$

上面第二个等式中我们将初态  $|1, \{0_j\}\rangle$  在两束缚态模上展开, 其中  $|\Phi_D\rangle$  与  $\bar{d} = \sqrt{1 - [d^{(1)}]^2 - [d^{(2)}]^2}$  代表了初态投影到与束缚态正交的子空间上的分量与系数. 由于  $|\Phi_D\rangle$  经长时间演化后将衰减到基态, 故而可得上述第三等式. 由以上结果可知,  $c(t_\infty)$  的取值被限制在两个半径为  $|[d^{(1)}]^2 \pm [d^{(2)}]^2|$  的同心圆之间. 图2(b) 刻画了  $c(t_\infty)$  在复平面上的轨迹示意图. 谱密度参数取  $\eta_p = 0.3$ ,  $\omega_1 = 0.9\omega_0$ ,  $\omega_2 = 2\omega_0$ , 两束缚态系数数值求得为  $[d^{(1)}]^2 \approx 0.18$ ,  $[d^{(2)}]^2 \approx 0.32$ . 因而  $c(t_\infty)$  演化轨迹分布在复平面上半径约为 0.14 与 0.50 的两同心圆之间. 如果两根之比  $E_1/E_2$  为有理数, 轨迹将构成封闭图形, 即形成周期振荡; 相反, 如果  $E_1/E_2$  为无理数, 演化轨迹将渐近填满同心圆之间所有区域, 可视为准周期振荡行为.



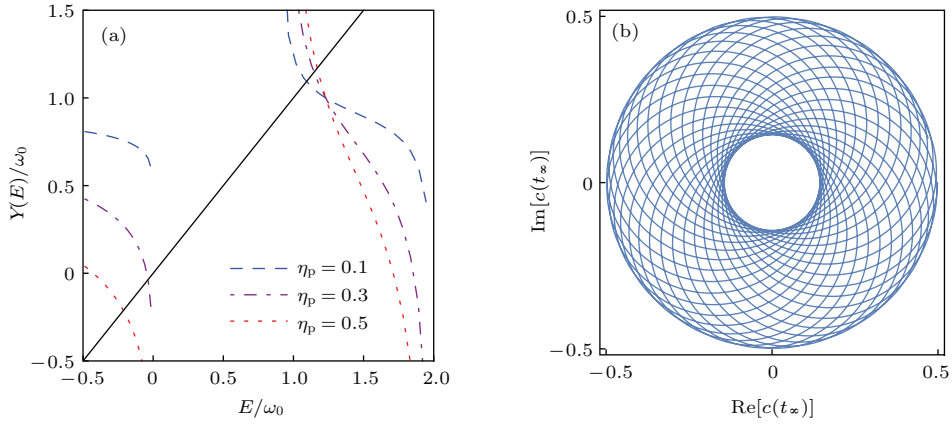


图2 (网刊彩色) (a) 图解法求解方程(10), 其中  $\omega_1 = 0.9\omega_0$ ,  $\omega_2 = 2\omega_0$ ; (b) 长时极限下激发态概率幅  $c(t_\infty)$  在复平面上演化轨迹, 其中  $\eta_p = 0.3$ ,  $\omega_1 = 0.9\omega_0$ ,  $\omega_2 = 2\omega_0$ .  
 Fig. 2. (color online) (a) Graphic method to Eq. (10), in which  $\omega_1 = 0.9\omega_0$ ,  $\omega_2 = 2\omega_0$ ; (b) Trajectory of the excited-state amplitude  $c(t_\infty)$  on the complex plane under long-time evolution, where  $\eta_p = 0.3$ ,  $\omega_1 = 0.9\omega_0$ ,  $\omega_2 = 2\omega_0$ .

系统在 Bloch 空间的演化轨迹可以作相应讨论. 当初始 Bloch 矢量的  $x$  或  $y$  分量不为零时, 其随时间演化将渐近收敛于一环面. 据上述(12)式及方程(3)式, 易求得长时极限下二能级系统约化密度矩阵在 Bloch 空间中的轨迹满足以下分量方程:

$$\begin{aligned} r_x^\infty &= r_x(0)\text{Re}[c(t_\infty)] - r_y(0)\text{Im}[c(t_\infty)], \\ r_y^\infty &= r_x(0)\text{Im}[c(t_\infty)] + r_y(0)\text{Re}[c(t_\infty)], \\ r_z^\infty &= [1 + r_z(0)]|c(t_\infty)|^2 - 1. \end{aligned} \quad (13)$$

从空间几何上看, 演化轨迹被限制在以  $z$  轴为对称轴的抛物面环面区域内. 该抛物面方程由初态 Bloch 矢量决定:

$$\frac{(r_x^\infty)^2 + (r_y^\infty)^2}{r_x^2(0) + r_y^2(0)} = \frac{r_z^\infty + 1}{r_z(0) + 1};$$

而系统演化轨迹所在环面的上、下沿则由方程(13)中第三式决定, 即

$$\begin{aligned} &([d^{(1)}]^2 - [d^{(2)}]^2)^2 \\ &\leq \frac{1 + r_z^\infty}{1 + r_z(0)} \leq \left( \sum_{k=1}^2 [d^{(k)}]^2 \right)^2. \end{aligned} \quad (14)$$

由于  $d^{(1,2)}$  与环境谱密度函数的量化关系可以通过方程(10), (11)两式直接计算, 上式因而建立起了系统渐近行为同库场性质间的联系. 以图(2)中给的谱密度参数为例, 方程(14)不等式左、右两端取值分别约为0.02与0.25. 如设初态取  $|\psi_A(0)\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ , 即  $\mathbf{r}(0) = (1, 0, 0)$ , 则演化轨迹将渐近收敛于下半球抛物面环面区域  $-0.98 \leq r_z^\infty \leq -0.75$  内作(准)周期振荡.

对三带以上光子晶体环境, 如果体系存在三个或更多束缚态模, 系统在 Bloch 空间的演化轨迹仍将收敛于上述抛物面. 此时上述轨迹方程(13)式仍然成立, 但由于  $c(t_\infty)$  的多频特征, 演化轨迹在抛物面将呈现复杂的多频振荡行为.

#### 4 耗散下关联的渐近动力学行为

近年来量子关联的耗散动力学行为得到较多关注. 其中一个重要主题是讨论非马尔科夫效应导致的关联量比如纠缠的非单调衰减行为. 后者可以视为耗散过程非马尔科夫性的标志. 本文的主题是系统的长时演化行为: 如果体系经历长时演化后完全衰减至基态, 其对应末态将不含任何关联因而是平庸的; 如果体系如前文所述存在束缚态而呈现不完全衰减, 其末态关联行为亦不平庸. 下面我们简单讨论一下关联量可能出现的渐近行为特征.

考虑初始处在纠缠态  $\rho_{AB}(0)$  的两个二能级系统, 其中一个子系统 A 在局域库场中经历前述耗散过程. 复合系统的演化由以下方程描述:

$$\rho_{AB}(t) = \sum_{k=1}^2 [\Omega_k(t) \otimes I_2] \rho_{AB}(0) [\Omega_k^\dagger(t) \otimes I_2], \quad (15)$$

其中 Kraus 算符与(3)式中一致. 首先需要明确, 虽然系统的密度矩阵与  $c(t)$  相关, 但其关联量如纠缠、量子失协及交互信息等只依赖于  $c(t)$  的模<sup>[16]</sup>. 所以对于一个束缚态模的情形, 依据方程(7)式  $|c(t_\infty)| = d^2$  将与时间无关, 即复合系统 AB

的关联将趋于一稳定值. 这一情形末态关联与环境谱密度可以通过前文所述泛函关系建立联系, 这在文献 [15, 16] 中已做过讨论.

如果子体系 A 与其局域环境可以存在两个束缚态模, 由 (12) 式可得

$$|c(t_\infty)|^2 = \sum_{k=1}^2 [d^{(k)}]^4 + 2[d^{(1)}d^{(2)}]^2 \times \cos(\Delta E t_\infty), \quad (16)$$

即  $|c(t_\infty)|$  以  $\Delta E = |E_1 - E_2|$  为频率做周期振荡. 这表明, 不管系统密度矩阵的渐近演化呈现周期行为 ( $E_1/E_2$  为有理数) 抑或准周期行为 ( $E_1/E_2$  为无理数), 关联的渐近行为总是呈现周期振荡. 值得进一步指出, 如果存在三个以上束缚态模情形, 关联的渐近行为将出现多频振荡; 取决于频率差值, 对应的多频振荡行为可以呈现周期或准周期特征.

## 5 结 论

本文利用二能级原子自发辐射模型讨论了结构化环境中非马尔科夫耗散过程渐近动力学可能出现的极限环振荡现象. 极限环通常描述非线性动力学系统经长时演化后出现的特征行为 [17]. 这类现象在以往研究中只能通过数值模拟来呈现. 本文揭示的非马尔科夫系统长时行为构成这类现象的一个罕见特例: 它可以近乎严格解析求解. 此外, 以往有关非马尔科夫耗散动力学的研究常采用路径积分或者格林函数方法, 本文所做的非马尔科

夫系统渐近动力学的计算仅使用了量子力学基本方法.

## 参考文献

- [1] Breuer H P, Petruccione F 2002 *The Theory of Open Quantum Systems* (London: Oxford University Press) pp460–498
- [2] John S, Wang J 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 2418
- [3] John S, Wang J 1991 *Phys. Rev. B* **43** 12772
- [4] John S, Quang T 1994 *Phys. Rev. A* **50** 1764
- [5] Kofman A G, Kurizki G, Sherman B 1994 *J. Mod. Opt.* **41** 353
- [6] Kofman A G, Kurizki G 1996 *Phys. Rev. A* **54** R3750
- [7] Chen S, Xie S Y, Yang Y P, Chen H 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 853 (in Chinese) [陈三, 谢双媛, 羊亚平, 陈鸿 2003 物理学报 **52** 853]
- [8] Lodahl P, Driel A F van, Nikolaev I S, Imman A, Overgaag K, Vanmaekelbergh D, Vos W L 2004 *Nature* **430** 654
- [9] Xu X, Yamada T, Ueda R, Otomo A 2008 *Opt. Lett.* **33** 1768
- [10] Hoeppe U, Wolff C, Küchenmeister J, Niegemann J, Drescher M, Benner H, Busch K 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 043603
- [11] Bellomo B, Franco R Lo, Maniscalco S, Compagno G 2008 *Phys. Rev. A* **78** 060302
- [12] Breuer H P, Laine E M, Piilo J 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 210401
- [13] Rivas Á, Huelga S F, Plenio M B 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 050403
- [14] Tong Q J, An J H, Luo H G, Oh C H 2010 *Phys. Rev. A* **81** 052330
- [15] Zhang P, You B, Cen L X 2013 *Opt. Lett.* **38** 3650
- [16] Zhang P, You B, Cen L X 2014 *Chin. Sci. Bull.* **59** 3841
- [17] Perko L 2001 *Differential Equations and Dynamical Systems* (New York: Springer-Verlag) pp315–540

# Phenomena of limit cycle oscillations for non-Markovian dissipative systems undergoing long-time evolution\*

You Bo Cen Li-Xiang<sup>†</sup>

(Department of Physics, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

( Received 25 May 2015; revised manuscript received 25 June 2015 )

## Abstract

Understanding the non-Markovian dynamics of dissipative processes induced by memory effects of the environment is a fundamental subject of open quantum systems. Because of the complexity of open quantum systems, e.g., the multiple energy scales involving that of the system, the environment, and their mutual coupling, it is generally a challenging task to characterize the relationship among the parameters of the system dynamics and the reservoir spectra. For the two-level spontaneous emission model within structured environments, it was shown in a recent literature (*Opt. Lett.* **38**, 3650) that a functional relation could be established between the asymptotically non-decaying population and the spectral density of the reservoir as the system undergoes a long-time evolution. It hence renders a distinct perspective to look into the character of long-lived quantum coherence in the corresponding non-Markovian process. This article is devoted to further investigate the phenomena of limit cycle oscillations possibly occurring in such non-Markovian dissipative systems in a long-time evolution. For a two-level system subjected to an environment with Ohmic class spectra, due to the presence of a unique bound-state mode of the system, the evolution trajectory of the given initial states will converge to a limit cycle in the Bloch space. The dependence of the radius and the location of the limit cycle on the spectral density function of the reservoir are manifested by virtue of the described functional relation. For the model subjected to a photonic crystal environment with multiple bands, our studies reveal that, owing to the presence of two or more bound states, the evolution trajectory of the system will converge to a toric curve of a paraboloid in the Bloch space and the phenomena of periodic or quasi-periodic oscillations could exhibit. While the equation of the parabolic curve is fully determined by the initial values of the state vector in the Bloch space, our results reveal that the scope of the evolution trajectory inside the toric curve is related to the spectral density of the reservoir and their quantified relation is distinctly characterized. Finally, the asymptotic dynamics of the correlations of a two-qubit system is discussed when it is subjected locally to the non-Markovian dissipative process.

**Keywords:** open quantum system, non-Markovian dissipation, limit cycle, bound state

**PACS:** 03.65.Yz, 37.30.+i, 05.45.-a

**DOI:** 10.7498/aps.64.210302

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10874254).

† Corresponding author. E-mail: [lixiangcen@scu.edu.cn](mailto:lixiangcen@scu.edu.cn)