

带碰撞双稳态压电俘能系统的俘能特性研究

蓝春波 秦卫阳

Vibration energy harvesting from a piezoelectric bistable system with two symmetric stops

Lan Chun-Bo Qin Wei-Yang

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 210501 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.210501

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.210501>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I21>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

二维耦合定向输运模型研究

[A two-dimensional coupled directed transport model](#)

物理学报.2015, 64(15): 150501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.150501>

科赫分形基底上受限固-固模型动力学  $\rho$  锯齿形  $\rho$  氮  $\rho$  笛芯

[Numerical investigations of dynamic behaviors of the restricted solid-on-solid model for Koch fractal substrates](#)

物理学报.2015, 64(13): 130501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.130501>

非各态历经噪声的产生及其应用

[Generation and application of non-ergodic noise](#)

物理学报.2014, 63(24): 240503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.240503>

带有分数阶阻尼的压电能量采集系统相干共振

[Coherence resonance of piezoelectric energy harvester with fractional damping](#)

物理学报.2014, 63(22): 220504 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.220504>

色关联的乘性和加性色噪声激励下分段非线性模型的随机共振

[Stochastic resonance in a piecewise nonlinear system driven by colored correlated additive and multiplicative colored noises](#)

物理学报.2014, 63(21): 210501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.210501>

# 带碰撞双稳态压电俘能系统的俘能特性研究\*

蓝春波 秦卫阳†

(西北工业大学工程力学系, 西安 710072)

(2015年5月6日收到; 2015年6月10日收到修改稿)

双稳态俘能系统的运动常常会陷入单个势能阱中, 导致俘能效率降低. 为了解决这个问题, 本文提出了一类带碰撞的磁斥力双稳态压电振动能量采集系统. 建立了该碰撞双稳态系统的机电耦合方程, 分析了碰撞对双稳态系统动力学特性的影响. 研究了确定性激励和低强度随机激励下碰撞对系统响应特性和俘能效率的影响. 结果表明: 简谐激励下, 碰撞能够使得原双稳态系统的单阱小幅周期运动转变为双阱间的大幅运动, 从而有效地提高输出功率. 得到了低强度随机激励下, 不同碰撞间隙对系统动力响应特性和输出功率的影响规律. 对一个给定的随机激励, 存在一个最优的碰撞间隙, 此时碰撞能够将原双稳态系统单阱内的随机运动转化为频繁的双阱跳跃, 出现大幅值运动, 从而大幅提高了系统的俘能效率.

**关键词:** 碰撞, 双稳态系统, 能量俘获, 随机振动**PACS:** 05.40.-a, 77.65.-j**DOI:** 10.7498/aps.64.210501

## 1 引言

振动能量广泛存在于人们的日常生活环境中, 从环境的振动中俘获能量一直都是非常有意义的研究热点<sup>[1]</sup>. 近年来, 由于压电材料具有结构简单、无电磁干扰、易于制作及实现微小化等优点, 基于压电效应的振动能量采集技术是目前最为高效的俘能方法之一<sup>[2]</sup>. 双稳态压电振动俘能系统是众多俘能系统中最为典型且有效的俘能技术<sup>[3]</sup>. Erturk等<sup>[4]</sup>对比了简谐激励下双稳态压电俘能器和线性压电俘能器的响应及俘能特性, 结果表明双稳态系统的双阱间的大幅振动所产生的电压比线性系统高出一倍. Cotton等<sup>[5]</sup>对随机激励下双稳态压电俘能系统的研究表明, 双稳态压电俘能系统的双阱间的大幅跳跃运动能够大幅提高随机振动能量的俘获效率. Litak等<sup>[6]</sup>在数值仿真随机激励下双稳态压电俘能系统的俘能效率时发现系统存

在由单阱运动跳跃至双阱运动的临界随机振动强度. 这一临界强度随后便在运用等效线性化法<sup>[7]</sup>求解系统压电振动耦合方程的过程中得到了验证. 在双稳态压电俘能系统的随机振动实验<sup>[8]</sup>中, 也观察到了该临界强度以及阱间跳跃现象. Zhao等<sup>[9]</sup>详细研究了随机激励下单稳态和双稳态压电俘能系统的俘能特性, 并总结得到, 当随机振动强度在某一个范围内, 双稳态的俘能效率优于单稳态系统. 以上研究的结果都表明, 双阱间的大幅运动是大幅提高输出功率的关键. 如果随机振动强度较小, 系统只会单阱内作小幅运动, 此时的输出功率很低. 为了解决这个难题, 文献<sup>[10]</sup>基于倒立梁的动态失稳特性, 利用基础激励改变系统的稳定性, 从而确保系统能够出现大幅周期运动, 然而这个方法只适用于参数激励系统. 一些学者对压电梁结构进行了改进, 设计了附加结构提高俘能效率. Zhou等<sup>[11]</sup>在双稳态系统的基础上附加了一个单自由度系统, 该系统在基础激励下可以将附加系统

\* 国家自然科学基金(批准号: 11172234)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: qinweiyang@yahoo.com.cn

的能量传递到原系统上, 从而提高输出功率. Liu 等<sup>[12]</sup>在研究一类双稳态压电俘能结构时发现, 当简谐激励幅值太大时, 双稳态系统的大幅振动响应所产生的电压有可能会破坏采集电路, 为了解决这个问题, 他们通过在基座上设置制动块, 实现对响应幅值的自动控制, 从而保护电路. 其研究结果表明附加结构不但能够控制响应幅值, 同时也能够使得双稳态系统在更宽的频带能发生双阱间的大幅运动. Scott 等<sup>[13]</sup>以压电悬臂梁为制动结构, 利用主结构的振动带动压电梁的弯曲变形, 将能量传递到压电梁进行俘能. 结果显示, 该系统的能量俘获效率达到了24%. Liu 等<sup>[14]</sup>研究了刚性制动器和弹性制动器对线性悬臂梁压电俘能系统的俘能效率的影响, 通过对系统的频率响应特性和扫频振动实验的研究发现, 制动器虽然限制了共振条件下系统的响应幅值, 但是它能够使得系统在更宽频带的激励作用下产生大幅响应, 从而提高了系统的有效俘能带宽. Fan 等<sup>[15]</sup>将磁斥力双稳态系统中固定在支座上的磁铁, 通过弹性梁变为可移动的磁铁, 形成相互耦合的可移动磁斥力俘能系统. 其研究结果表明, 改进后的系统虽然在原共振条件下的输出功率降低了, 但是它能够更宽的频带内产生大幅响应, 从而提高了有效俘能带宽.

对于双稳态系统而言, 它的两类运动状态: 单阱内运动和双阱间运动, 所对应的俘能效率差别是很大的. 利用碰撞可以将双稳态系统的单阱运动转化为双阱大幅运动. 目前, 缺乏关于带碰撞双稳态压电俘能系统的动力学分析及俘能机理研究, 尤其是随机激励下碰撞对双稳态系统俘能特性的影响

规律. 因此, 建立带碰撞双稳态压电俘能系统模型, 进行确定性激励和随机激励下系统动力学特性和俘能机理的研究, 对碰撞在双稳态系统上的应用和提高压电俘能效率是十分有必要的.

基于此, 本文建立了带碰撞双稳态压电俘能系统, 推导了其机电耦合方程, 分析了碰撞对系统势能和弹性恢复力的影响. 然后对比分析了含碰撞和无碰撞双稳态压电俘能系统在简谐激励下的动态响应特性及俘能效率, 研究了碰撞对系统运动状态的影响. 接着, 重点分析了随机激励下碰撞对系统响应特性及输出电压的影响, 得到了不同碰撞间隙对系统的影响规律. 结果表明, 碰撞能够将原系统的单阱运动变为双阱间的大幅跳跃运动, 并存在最优碰撞间隙, 使得系统在确定强度随机激励下的俘能效率最高.

## 2 基本模型及动力学特性

### 2.1 动力学模型

图1是基于磁斥力双稳态压电能量采集系统改进的带碰撞双稳态压电振动俘能系统. 它主要由磁斥力双稳态振子、对称的碰撞弹簧结构、压电片及外载电路组成. 其中磁斥力双稳态振子的基本原理是通过在弹性悬臂梁的轴向施加相斥磁极间的斥力, 使得弹性梁发生失稳, 原稳定位置失去稳定性, 产生两个对称的新平衡位置, 实现双稳态的. 碰撞是通过在基座上设计两个对称的碰撞弹簧结构实现的. 该碰撞弹簧结构主要由弹簧和挡板组成. 实际中可以通过调整弹簧的刚度, 实现对碰撞

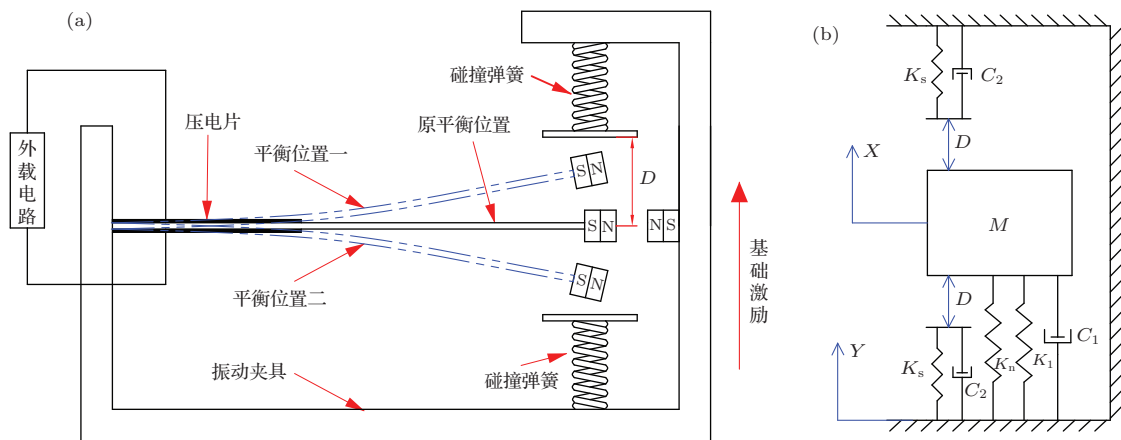


图1 带对称碰撞磁斥力双稳态压电俘能系统 (a) 实际模型; (b) 动力学模型

Fig. 1. The bistable piezoelectric vibration energy harvester with symmetric stops: (a) The research model; (b) the dynamic model.

刚度的调节;挡板的设置是为了确保双稳态梁与弹簧之间发生的碰撞为平面碰撞. 同时在设计挡板时, 挡板的质量应该尽可能得小, 并且弹簧挡板系统的固有频率应远离压电俘能系统的有效工作频段. 此外, 弹簧挡板都必须为无磁性材料. 挡板与悬臂梁水平位置之间的距离称为碰撞间隙. 在基础激励作用下, 当双稳态振子的振幅小于碰撞间隙  $D$  时, 系统刚度和阻尼保持不变; 当振幅大于碰撞间隙  $D$  时, 振子便会与挡板发生碰撞, 振子会受到弹簧给予的弹性碰撞力, 此时系统的刚度和阻尼都会发生改变. 这类振子与弹簧的碰撞可以简化为单自由度系统<sup>[12-14]</sup>. 带碰撞双稳态压电俘能系统的动力学模型可以表示为图 2. 运用拉格朗日方程和基尔霍夫定律, 可得系统的机电耦合方程

$$\begin{aligned}
 & M\ddot{X} + C_1\dot{X} + (K_n + K_1)X \\
 & + G(X, \dot{X}) - \kappa_v V = M\ddot{Y}, \\
 & C_p\dot{V} + V/R + \kappa_c\dot{X} = 0, \\
 & K_n = -k_1 + k_0X^2; \quad K_1 = k_2, \\
 & G(X, \dot{X}) = \begin{cases} C_2\dot{X} + K_s(X - D), & X > D, \\ 0, & |X| < D, \\ C_2\dot{X} + K_s(X + D), & X < -D, \end{cases} \quad (1)
 \end{aligned}$$

其中,  $M$  为质量,  $C_1$  为弹性梁的阻尼比,  $V$  为输出电压,  $C_p$  为压电片的电容,  $R$  为负载阻抗,  $\kappa_v$  和  $\kappa_c$  为压电片参数<sup>[16]</sup>,  $K_n$  为由磁斥力产生的非线性刚度,  $K_1$  为弹性梁的线性刚度,  $C_2$  为碰撞时的附加阻尼,  $K_s$  为碰撞刚度,  $D$  为梁与挡板之间的碰撞间隙,  $Y$  为基础激励,  $X$  为双稳态梁自由端的位移,  $G(X, \dot{X})$  为碰撞力. “ $\dot{\phantom{x}}$ ”和“ $\ddot{\phantom{x}}$ ”分别是对时间的一阶和二阶导数.

其中, 磁斥力所产生的等效非线性刚度可以表示为  $K_n = k_1 + k_0X^2$ ; 弹性梁的线性等效刚度  $K_1 = k_2$ , 则系统的等效刚度为  $\tilde{K} = K_1 + K_n = -k_1 + k_2 + k_0X^2$ , 其中  $k_0 > 0$ . 可以通过改变磁铁间距, 使得  $k_2 - k_1 < 0$ , 控制该结构成为双稳态系统.

假设基础激励为简谐运动

$$Y = A \sin(\omega_0 t),$$

其中,  $A$  为激励幅值,  $t$  为时间,  $\omega_0$  为激励频率.

引入无量纲变换:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{X}{A}, \quad y = \frac{Y}{A} = \sin(\omega_0 t), \quad v = \frac{V}{e}, \\
 e &= \frac{Mg}{\kappa_v}, \quad d = \frac{D}{A}; \quad \omega_1^2 = \frac{k_1 - k_2}{M}, \quad \tau = \omega_1 t, \\
 \Omega &= \frac{\omega_0}{\omega_1}, \quad \gamma = \frac{Mg}{k_2 A}, \quad \lambda = \frac{1}{RC_p \omega_1}, \\
 \theta &= \frac{\kappa_v A}{C_p e}, \quad 2\xi_1 \omega_1 = \frac{C_1}{M}, \quad 2\xi_2 \omega_1 = \frac{C_2}{M}, \\
 b &= \frac{k_0}{M} A^2, \quad \omega_2^2 = \frac{K_s}{M}, \quad k = \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}, \quad f = -\Omega^2.
 \end{aligned}$$

系统机电耦合方程的无量纲形式为

$$\begin{aligned}
 & \ddot{x} + 2\xi_1 \dot{x} - x + bx^3 + g(x, \dot{x}) - \gamma v = f \sin(\Omega \tau), \\
 & \dot{v} + \lambda v + \theta \dot{x} = 0, \\
 & g(x, \dot{x}) = \begin{cases} 2\xi_2 \dot{x} + k(x - d), & x > d, \\ 0, & |x| < d, \\ 2\xi_2 \dot{x} + k(x + d), & x < -d, \end{cases} \quad (2)
 \end{aligned}$$

其中,  $k = K_s/(k_1 - k_2)$  为无量纲碰撞刚度比,  $K_s$  为碰撞弹簧的刚度,  $k_1 - k_2$  为屈曲梁刚度的一次项. 刚度比  $k$  与碰撞弹簧刚度  $K_s$  成正比, 与屈曲梁刚度成反比. 当屈曲梁刚度不变时, 碰撞弹簧刚度的大小直接决定碰撞刚度的大小. 另一方面, 对于磁斥力双稳态系统而言, 随着磁斥力增强, 梁会发生屈曲. 在这个过程中,  $k_1 - k_2$  有可能取值很小, 此时即使碰撞弹簧的刚度  $K_s$  很小, 刚度比  $k$  依然有可能很大, 但是此时的碰撞依然为弹性碰撞. 刚度比对于俘能特性的影响在 4.2 节进行了研究.

## 2.2 动力学特性

首先, 分析该系统的势能和弹性恢复力, 观察碰撞对系统静态特性的影响规律. 系统的势能函数  $U(x)$  和弹性恢复力  $F(x)$  可以表示为

$$U(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4 + \frac{k}{2}(x - d)^2, & x > d, \\ -\frac{1}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4, & |x| < d, \\ -\frac{1}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4 + \frac{k}{2}(x + d)^2, & x < -d, \end{cases} \quad (3)$$

$$F(x) = \begin{cases} -x + bx^3 + k(x - d), & x > d, \\ -x + bx^3, & |x| < d, \\ -x + bx^3 + k(x + d), & x < -d. \end{cases} \quad (4)$$



令  $b = 2, k = 1000, d$  分别为 0.9 和 1.2, 仿真计算系统的势能和恢复力. 由图 2 可知, 原双稳态系统存在两个稳定的平衡点 ( $x = \pm\sqrt{2}/2$ ) 和一个不稳定的平衡点 ( $x = 0$ ). 当碰撞间隙  $d > \sqrt{2}/2$  时, 碰撞并不会影响系统的平衡点和不平衡点位置. 当  $|x| \leq d$ , 系统的双稳态系统并未发生改变, 此时系统并没有发生碰撞; 当  $x > d$  时, 系统势能会由于碰撞的发生而急剧增加. 图 3 为碰撞对系统弹性恢复力的影响规律. 由图可知, 当  $|x| \leq d$  时, 系统的弹性力并未发生改变, 而当  $|x| > d$  时, 系统的弹性恢复力急剧增加, 由此可知, 碰撞会约束系统的响应幅值, 改变系统的运动状态.

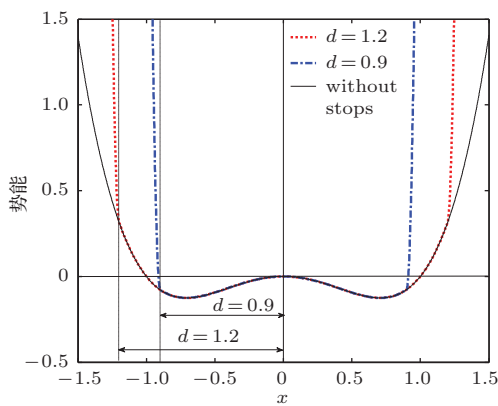


图 2 系统势能特性

Fig. 2. The system's potential energy.

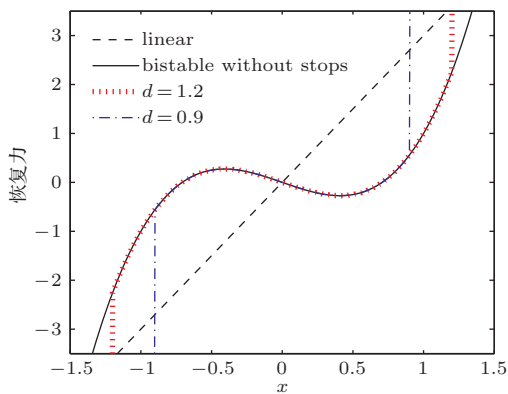


图 3 弹性恢复力

Fig. 3. The elastic restoring force.

双稳态系统的主要运动状态包括, 单阱中的周期运动, 双阱间的混沌运动以及双阱之间的大幅周期运动. 这些运动状态的俘能效率有着明显的差距, 其中双阱间的大幅周期运动状态是最理想的, 俘能效率最高的状态. 而当系统的运动局限于单一势能阱中时, 系统的振幅很小, 压电片产生的变

形也小, 此时系统的俘能效率很低. 由于双稳态系统是强非线性系统, 它的运动状态通常会受到激励和初始条件的影响. 在同一激励下, 不同的初值所对应的稳态响应是不同的. 因此在同一外激励条件下, 通过改变系统的初始条件或者运动状态, 可以将单势能阱内的周期运动转化为双势能阱间的大幅周期运动状态, 从而提高俘能效率. 在双稳态系统内加入碰撞的好处在于, 每当双稳态振子与弹簧发生碰撞时, 系统的运动状态都会发生明显的变化. 当振子离开弹簧时, 系统在新的运动初值条件下有可能从原有的单阱内的周期运动转化为双阱间的混沌运动或者大幅周期运动, 此时系统的俘能效率将得到大幅增加. 因此可以通过设置合理的碰撞, 使得系统出现双阱间的大幅运动, 提高系统的效率.

### 3 简谐激励下系统的俘能特性

为了分析碰撞对双稳态系统的响应和俘能特性的影响, 假设基础激励为简谐运动. 比较分析原双稳态系统和带碰撞双稳态系统的动态响应特性, 得到碰撞对原双稳态系统运动特性的影响. 定义俘能系统的平均输出功率为

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \frac{u^2}{R} dt \\
 &= \frac{1}{n dt} \sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{R} dt \\
 &= \frac{1}{nR} \sum_{i=1}^n u_i^2 = \frac{U_{rms}^2}{R}, \quad (5)
 \end{aligned}$$

其中,  $P$  为输出功率,  $u$  和  $u_i$  为输出电压与其离散点值,  $T_2$  和  $T_1$  为时刻,  $R$  为电阻,  $dt$  为计算步长,  $n$  为  $T_1 - T_2$  时段内的步长数,

$$U_{rms} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i^2}.$$

系统的输出功率  $P$  与  $U_{rms}$  平方成正比.

令系统参数为  $f = 1.0, \Omega = 0.8, \xi_1 = 0.1, \xi_2 = 0.2, k = 200, d = 2, b = 0.4$ , 分别计算原系统和带碰撞系统的动态响应和输出电压. 图 4 (a) 和 (b) 分别为位移时域图和电压时域图. 从图 4 (a) 中可以发现, 在该激励作用下, 原双稳态系统在单阱内作小幅周期运动, 而当存在碰撞时 ( $d = 2$ ), 系统能够在两个势能阱之间随机跳跃, 出现混沌运动.

比较两者的输出电压幅值(图4(b)),可以发现,原系统的最大电压幅值为0.5,带碰撞系统的最大输出电压为1.6.比较系统在1000—1500 s内的 $U_{rms}$ ,可以发现,原系统仅为0.257,而带碰撞系统则达到了0.553.进一步分析系统的相图(图5),可以发现,振子与弹簧之间的碰撞改变原双稳态系统的运动状态,使得原先单阱内稳定的周期运动变为双阱间的混沌状态.虽然由于碰撞的存在,系统的运动主要被局限于 $|x| < 2$ 内,当 $|x| > 2$ 时,系统的振幅会迅速衰减;但是,碰撞的出现,使得系统能够在两个稳定的平衡点之间频繁地跳动,运动幅值的增加会使压电片此时的输出电压增大,俘能效率也更高.

当 $f = 4, d = 3$ ,其余参数保持不变,计算系统的动态响应及电压输出.从系统的动态位移(图6)可以看出,在该激励下,原系统在双阱之间随机跳跃,出现混沌运动;而碰撞系统则在双阱之间作大

幅周期运动.从输出电压上看(图7),原系统的输出电压变化幅值较大,其最大输出电压为1.92,而碰撞系统的输出电压则是稳定的简谐信号,其幅值为1.7,再比较两者在1000—1500 s内的 $U_{rms}$ 值,原系统为0.883,碰撞系统则是1.023.很显然,此时碰撞双稳态系统的俘能效率明显高于原双稳态系统.对比两种运动状态的相图(图8),我们可以发现,原系统在双阱之间的混沌运动所产生的最大位移要高于碰撞系统,碰撞系统的最大输出电压也小于原系统.然而,从俘能效率上看,虽然碰撞系统的运动被局限碰撞间隙内了,但是双阱之间稳定的大幅周期运动的俘能效率要明显高于原系统双阱之间的混沌运动.正是由于碰撞的存在,使得原系统的双阱混沌运动转变为了双阱大幅周期运动,因此,通过设置合理的碰撞使得系统出现更高俘能效率的运动状态,是提高双稳态压电振动能量采集系统俘能效率的一种有效的方法.

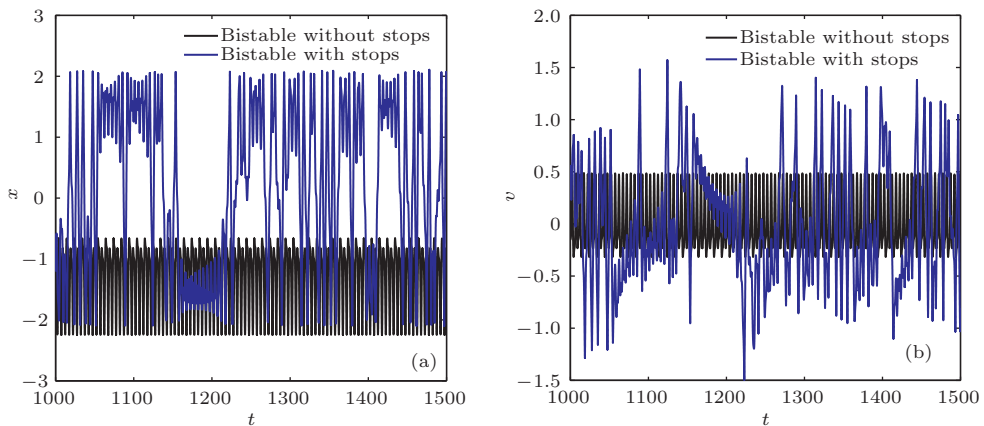


图4 (网刊彩色) 单频激励下系统动态响应 (a) 动态位移; (b) 动态电压

Fig. 4. (color online) The system's dynamic responses when excited by harmonic forces: (a) Dynamic displacements; (b) dynamic output voltages.

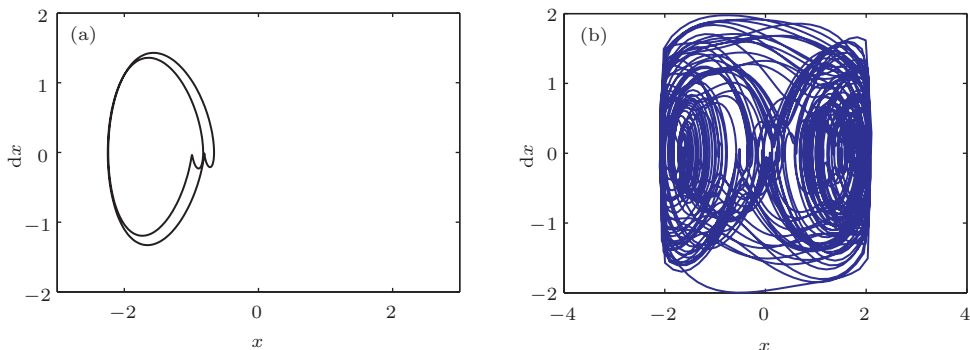


图5 系统响应相图 (a) 原双稳态系统; (b) 带碰撞双稳态系统

Fig. 5. The system's phase maps when excited by harmonic forces: (a) The bi-stable system without stops; (b) the bi-stable system with stops.

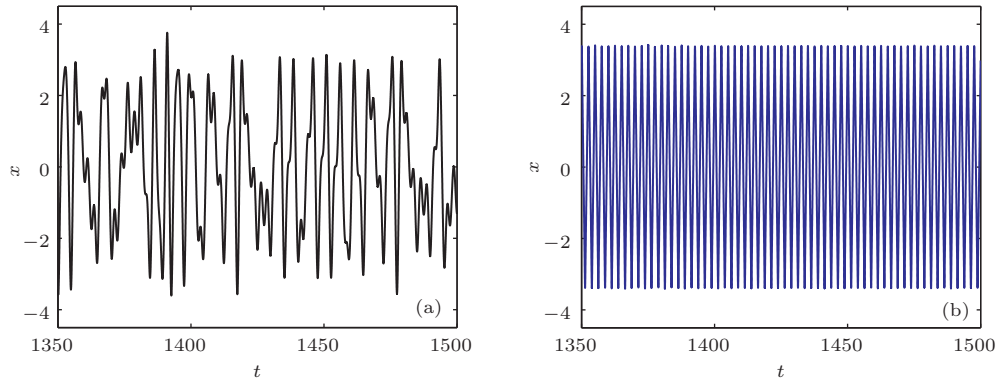


图6 单频激励下系统动态位移 (a) 原双稳态系统; (b) 带碰撞双稳态系统

Fig. 6. The system's dynamic displacement when excited by harmonic forces: (a) The bi-stable system without stops; (b) the bi-stable system with stops.

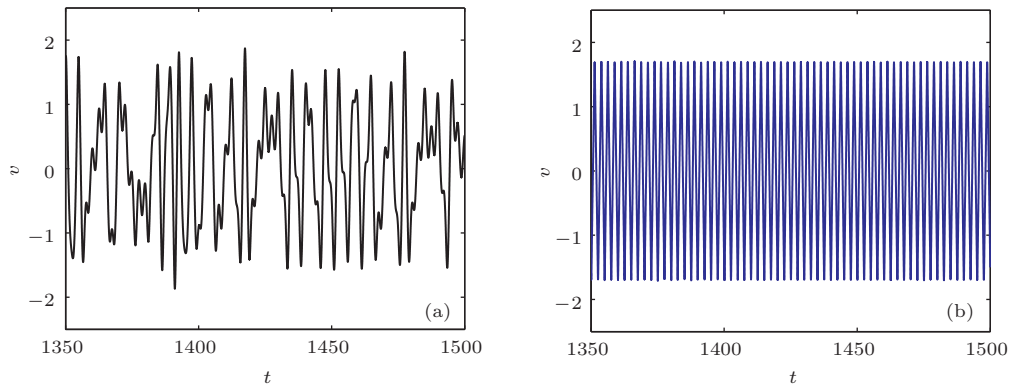


图7 单频激励下系统动态电压 (a) 原双稳态系统; (b) 带碰撞双稳态系统

Fig. 7. The system's dynamic voltage when excited by harmonic forces: (a) The bi-stable system without stops; (b) the bi-stable system with stops.

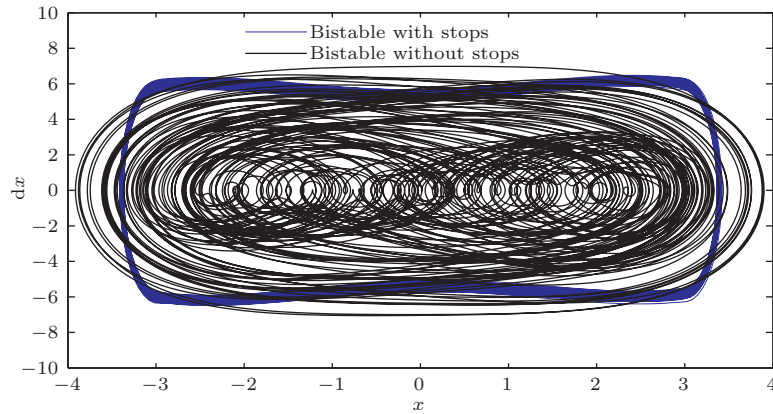


图8 (网刊彩色) 系统响应相图

Fig. 8. (color online) The system's phase maps.

## 4 随机激励下碰撞系统的运动与俘能特性

### 4.1 碰撞及间隙对于俘能特性的影响

碰撞对双稳态系统在改变确定性激励下系统

运动轨迹的同时,也会影响其在随机激励下的俘能特性. 对于双稳态压电俘能系统而言,双稳态系统的优势在于双阱间的大幅运动能够输出更高的电压,提高俘能效率;与此同时,它也存在一个问题,就是当随机振动强度较弱时,双稳态系统无法越过势能垒,系统的响应将被局限于单一势能阱中,此

时系统的俘能效率是很低的 [8]. 在上一节中, 仿真计算结果表明了碰撞能够使得原系统的单阱运动变为双阱运动, 双阱混沌运动变为双阱大幅周期运动, 从而提高俘能效率. 因此, 研究随机激励下, 碰撞对双稳态系统的俘能特性的影响是很有必要的.

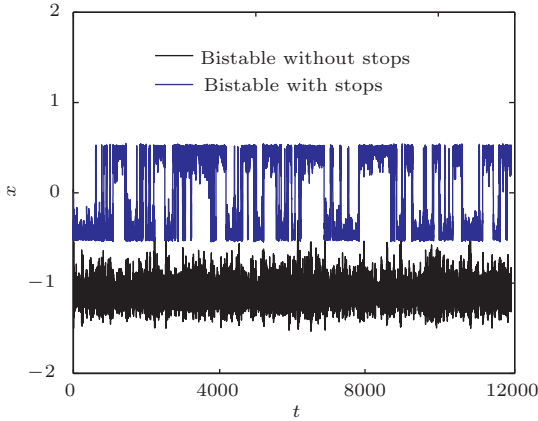


图9 (网刊彩色) 随机激励下, 系统动态位移 ( $\delta_f = 1.5$ )  
 Fig. 9. (color online) The dynamic displacement when excited by random forces ( $\delta_f = 1.5$ ).

随机激励下双稳态系统的动力学问题是较为典型的非线性随机振动问题. 为了研究系统的动力学及俘能特性, 采用 Euler-Maruyama 法仿真了系统在白噪声激励下的动态响应及输出电压, 得到了碰撞对于双稳态系统俘能特性的影响. 系统参数为  $\xi_1 = 0.05$ ,  $\xi_2 = 0.025$ ,  $b = 0.8$ ,  $k = 200$ ,  $d = 0.5$ ,  $\gamma = 0.05$ ,  $\lambda = 0.05$ ,  $\theta = 0.5$ , 随机激励强度  $\delta_f = 1.5$ , 图 9(a) 为无碰撞双稳态系统的动态响应, 从中可知, 此时由于随机振动强度较弱, 系统无法越过势能垒, 其响应只在其中一个平衡点附近随机运动, 响应幅值的标准差  $\delta_x = 0.1431$ . 从带碰撞双稳态系统的动态位移响应可以看出 (图 9(a)), 由于碰撞的作用, 系统能够穿越势能垒, 从一个势能阱跳跃到另一个势能阱间, 出现双阱间的大幅运动, 此时响应幅值的标准差为  $\delta'_x = 0.4286$ : 比无碰撞双稳态系统高出了 199.5%. 观察比较两者的输出电压 (图 10) 可知, 碰撞引起的双阱间的大幅运动所产生的电压标准差  $\delta'_v = 0.0904$ , 原双稳态系统单阱内的随机运动所产生的电压标准差只有  $\delta_v = 0.0717$ , 比前者少了 20.69%. 仔细观察可以看出, 虽然碰撞后系统只能在间隙之间运动, 但是碰撞能够使得双稳态系统在较弱的随机激励强度下, 出现双阱运动. 从输出功率上看, 无碰撞为  $P = 51.47 \mu\text{W}$ , 有碰撞为  $P = 81.71 \mu\text{W}$ . 由碰撞

引起的双阱跳跃运动能够提高俘能效率. 因此适当的碰撞能够使得双稳态系统在低强度下也能够出现大幅双阱运动, 从而大幅提高俘能效率.

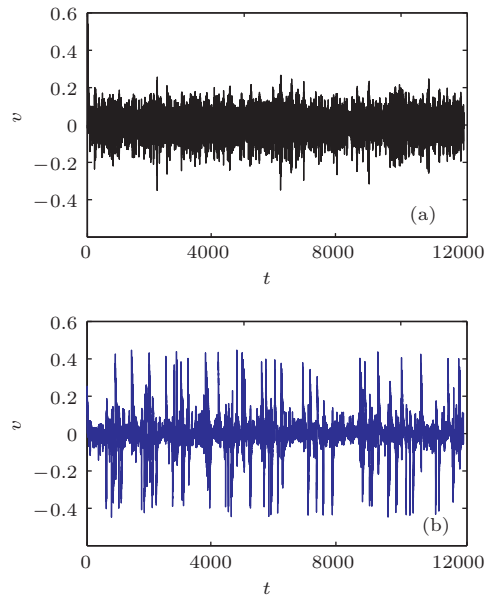


图 10 随机激励下, 系统输出电压 (a) 无碰撞双稳态系统; (b) 带碰撞双稳态系统  
 Fig. 10. The dynamic voltage when excited by random forces ( $\delta_f = 1.5$ ): (a) The bi-stable system without stops; (b) the bi-stable system with stops.

为了进一步研究碰撞对双稳态系统俘能效率的影响, 需要分析不同碰撞间隙下系统的俘能效率的变化. 系统参数为  $\xi_1 = 0.05$ ,  $\xi_2 = 0.025$ ,  $b = 0.8$ ,  $k = 200$ ,  $\gamma = 0.05$ ,  $\lambda = 0.05$ ,  $\theta = 0.5$ , 随机激励强度  $\delta_f = 1.7$ , 碰撞间隙的变化范围为  $d = 0-2$ .

图 11 为系统输出电压标准差随碰撞间隙的变化规律, 从图中可以发现一个规律: 在碰撞间隙变小的过程中, 系统的输出电压标准差存在四个基本状态: 当  $d > 1.4$  时, 碰撞对系统输出电压标准差的影响很小; 当  $1.4 > d > 1.1$  时, 碰撞会使得系统的俘能效率降低; 当  $1.1 > d > 0.46$  时, 随着碰撞间隙的减小, 系统俘能效率会逐渐增加; 当  $d < 0.46$  时, 系统俘能效率会随着碰撞间隙的减小而降低; 在这些过程中, 存在一个最佳的碰撞间距使得系统的俘能效率达到最佳状态, 此时系统的俘能效率明显高于无碰撞双稳态系统. 为了比较分析系统在各个阶段的动力特性及俘能规律, 分别在每个阶段取一个间隙值, 它们分别是  $d_4 = 0.3$ ,  $d_3 = 0.6$ ,  $d_2 = 1.2$ ,  $d_1 = 1.8$ . 从图 12(a) 中可知, 当  $d = 1.8$  时, 由于系统在该激励下的最大位移幅值不超过 1.5, 因此此时系统并没有与弹簧发生碰撞. 所以在第一阶段,



由于在此激励下系统并未发生明显的碰撞, 系统在这一阶段的输出功率标准差是稳定的. 当  $d = 1.2$  时, 由响应时域图(图 12(b)) 可知, 系统已经与弹簧发生了碰撞, 只是碰撞并没有使得系统双阱间的跳跃运动大幅地增加, 双阱间的跳跃也总比无碰撞时多了一次. 另一方面, 由于碰撞抑制了系统在单阱内的运动幅值, 因此此时系统的俘能效率会降低. 当  $d = 0.6$  时, 系统的响应(图 12(c)) 表明, 碰撞使得系统大幅提高了在双阱之间的运动次数, 并且保持了较大的运动幅值, 所以此时的俘能效率会明显增强, 其输出电压标准差也高于前两种状态. 当  $d = 0.3$  时(图 12(d)), 系统已经能够在双阱之间更为频繁地运动了, 然而其输出电压标准差却低于当  $d = 0.6$  时的电压标准差. 这是因为虽然缩短碰撞间隙能够加强系统在双阱之间的运动, 但是碰撞也会约束系统的运动范围, 缩小运动幅值, 从而降低压电片的输出电压. 再观察输出电压时域图(图 13), 很明显当  $d = 1.8$  时, 虽然双阱跳跃产生的电压很高, 但是跳跃次数极少所以输出电压标准差不高; 当  $d = 1.2$  时, 一方面跳跃的次数增幅很小, 另一方面幅值又降低了, 此时输出电压标准差较之前更小了; 当  $d = 0.6$  时, 虽然较之前电压幅值有所降低, 但是系统频繁跳跃运动产生了大量的大幅电压, 这使得此时系统的输出电压标准差明显增大了; 而当  $d = 0.3$  时, 系统虽然出现了更为频繁的跳

跃运动, 但是由于幅值受到的约束太强, 以至于跳跃所产生的电压与原系统单阱内的输出电压基本相同, 因此此时系统的俘能效率并不高. 从图 10 中还可以发现, 存在一个最佳的碰撞间隙使得系统的俘能效率达到最大值, 在该碰撞间隙下, 系统即能使得系统在双阱之间频繁地跃迁运动, 又能够保持较大的振幅, 从而实现俘能效率的最优化.

再分析不同强度随机激励下, 碰撞间隙对输出电压标准差的影响规律, 如图 14 所示. 从图中可知, 虽然激励的强度不同, 但是随着碰撞间隙的改变, 系统都存在同样的变化规律, 都存在四种状态, 并且都存在最佳的碰撞间隙. 同时, 不同强度下,

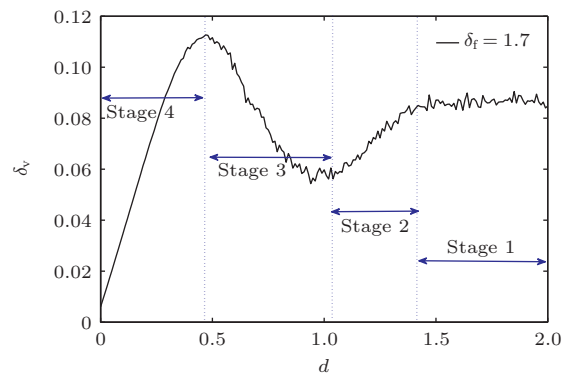


图 11 同一强度随机激励下, 系统输出电压标准差随碰撞间隙的变化规律

Fig. 11. The relation between the collision gap ( $d$ ) and the standard deviation ( $\sigma_v$ ) when excited by stochastic forces with the same intensity ( $\delta_f = 1.7$ ).

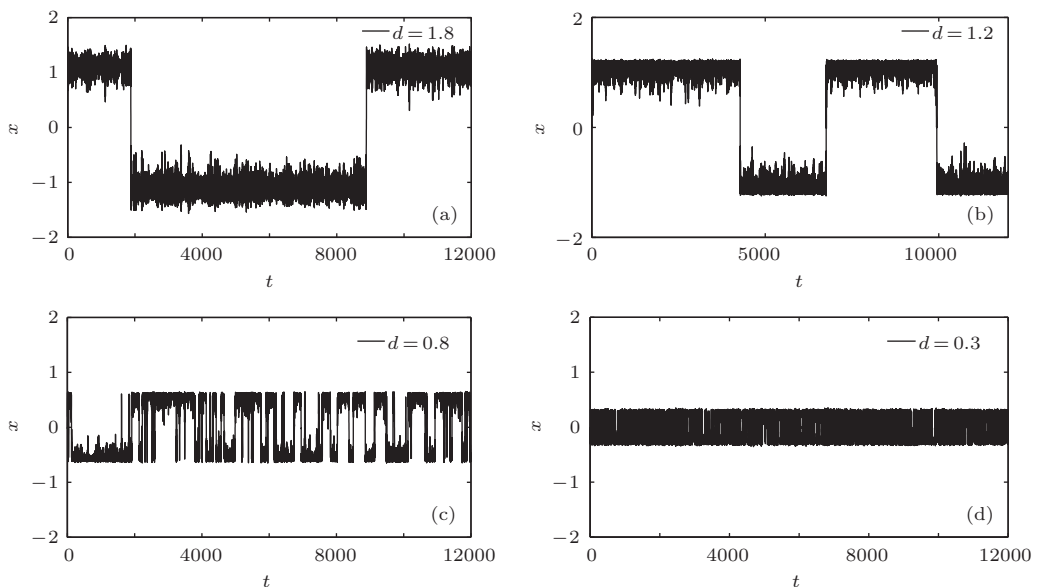


图 12 不同碰撞间隙下, 系统响应的时域图 ( $\delta_f = 1.7$ )

Fig. 12. The system's dynamic displacements with different collision gaps ( $\delta_f = 1.7$ ).

系统的最佳碰撞间隙是不同的, 每种状态所对应的间隙范围也是有差异的. 值得注意的是, 在这三种随机振动强度下, 当  $d < 0.3$  时, 系统的输出电压标准差是相同的. 这表明在这三种随机振动强度下,

系统在碰撞间隙之间的运动强度达到了极大值, 此时对于更高强度的随机能量, 其所能输出的电压也是有限的, 因此碰撞间隙过小并不利于提高俘能效率.

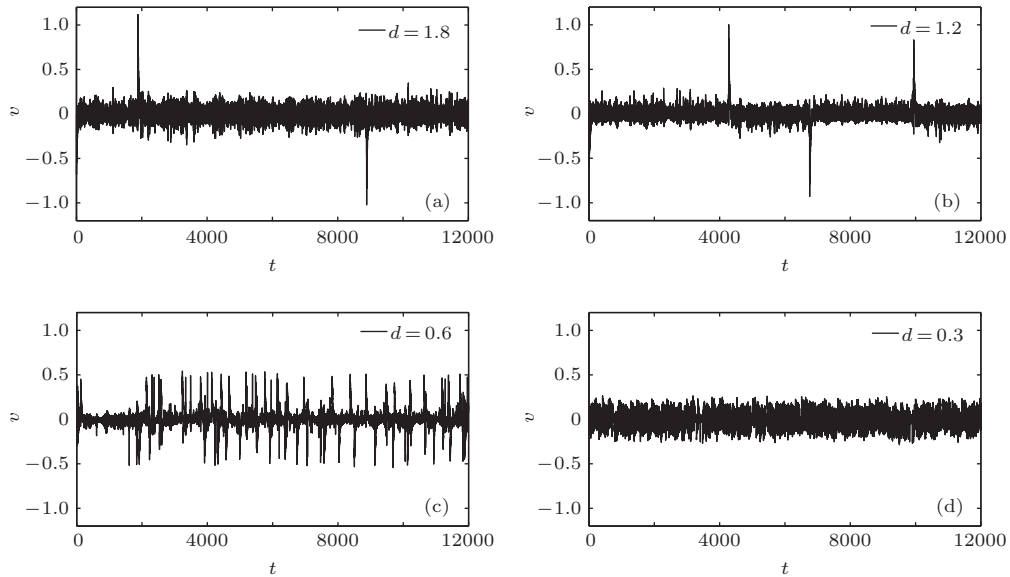


图 13 不同碰撞间隙下, 系统输出电压的时域图 ( $\delta_f = 1.7$ )

Fig. 13. The system's dynamic output voltage with different collision gaps ( $\delta_f = 1.7$ ).

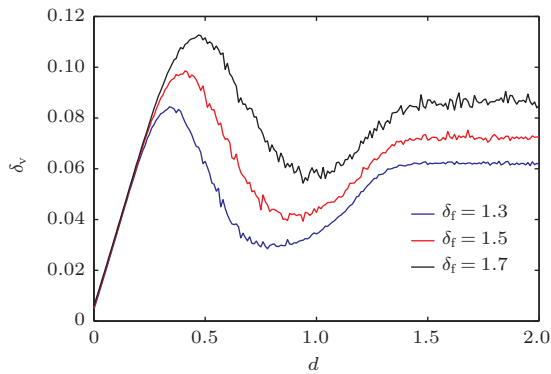


图 14 (网刊彩色) 不同强度随机激励下, 系统输出电压标准差随碰撞间隙的变化规律

Fig. 14. (color online) The relationship between the collision gap ( $d$ ) and the standard deviation ( $\delta_v$ ) when excited by stochastic forces with the different intensities.

#### 4.2 碰撞刚度对于俘能特性的影响

对于弹性碰撞而言, 直接影响系统俘能效率的因素除了上述的碰撞间隙外, 碰撞刚度也是关键因素. 现分析系统俘能效率随碰撞刚度的变化规律. 令系统参数为  $\xi_1 = 0.05$ ,  $\xi_2 = 0.025$ ,  $b = 0.8$ ,  $d = 0.7$ ,  $\gamma = 0.05$ ,  $\lambda = 0.05$ ,  $\theta = 0.5$ , 随机激励强度  $\delta_f = 1.7$ , 碰撞刚度比的变化范围为  $k = 10-1000$ .

这里, 由于原双稳态系统的各项参数固定, 因此刚度比的变化实际上是通过改变碰撞弹簧刚度实现的, 所以这里实质上是分析碰撞弹簧刚度对系统俘能效率的影响. 图 15 为系统输出电压标准差随碰撞刚度变化的规律. 可以看出, 当  $k = 10-120$  时, 系统输出电压标准差会随着刚度比  $k$  的增加而迅速提高; 当  $k > 120$  时, 输出电压标准差的增幅开始减缓, 并最终趋于平稳. 分别选取  $k = 0, 20, 200$  和  $1000$ , 进行了计算, 分析其对应的响应特点. 图 16 (a) 是当  $k = 0$  时, 即碰撞刚度为零时, 系统的响应时域图. 从图中可以看出, 在没有碰撞的影响下, 系统的运动局限于单个势能阱中. 当  $k = 20$  时, 从系统的时域响应图 (图 16 (b)) 中可以看出, 系统在碰撞的作用下出现了双阱之间的大幅跳跃运动, 对应的输出电压标准差也增大到  $\delta_v = 0.0713$  V. 而当  $k = 200$  时 (图 16 (c)), 系统在双阱之间的跳跃更加频繁,  $\delta_v$  也随之增加到  $\delta_v = 0.084$  V; 进一步增强碰撞刚度到  $k = 1000$  (图 16 (d)), 系统的阱间跳跃次数与  $k = 200$  时基本一致, 此时  $\delta_v = 0.0857$  V. 因此, 碰撞刚度对系统俘能特性的作用可以总结为: 当初始碰撞刚度较小时, 通过提高碰撞刚度可以明显增加系统的双阱跳跃, 提高系统的俘能效

率;而碰撞刚度增大到一定值后,由碰撞所引起的双阱跳跃运动次数会趋于稳定,也就是说,当碰撞刚度很大时,通过增加碰撞刚度并不能提高俘能效率.

在实际应用过程中,需要通过合理设计碰撞间隙和碰撞刚度,使得系统在保持较大振幅的同时,出现更频繁的双阱跳跃运动,以此提高俘能效率.而针对不同的随机振动强度,则可以通过调节碰撞间隙实现俘能效率的最大化.通过对碰撞装置优化,可以解决双稳态单阱运动时俘能效率低的问题,同时碰撞还会使得系统在更宽的强度范围内都能够实现高效俘能.

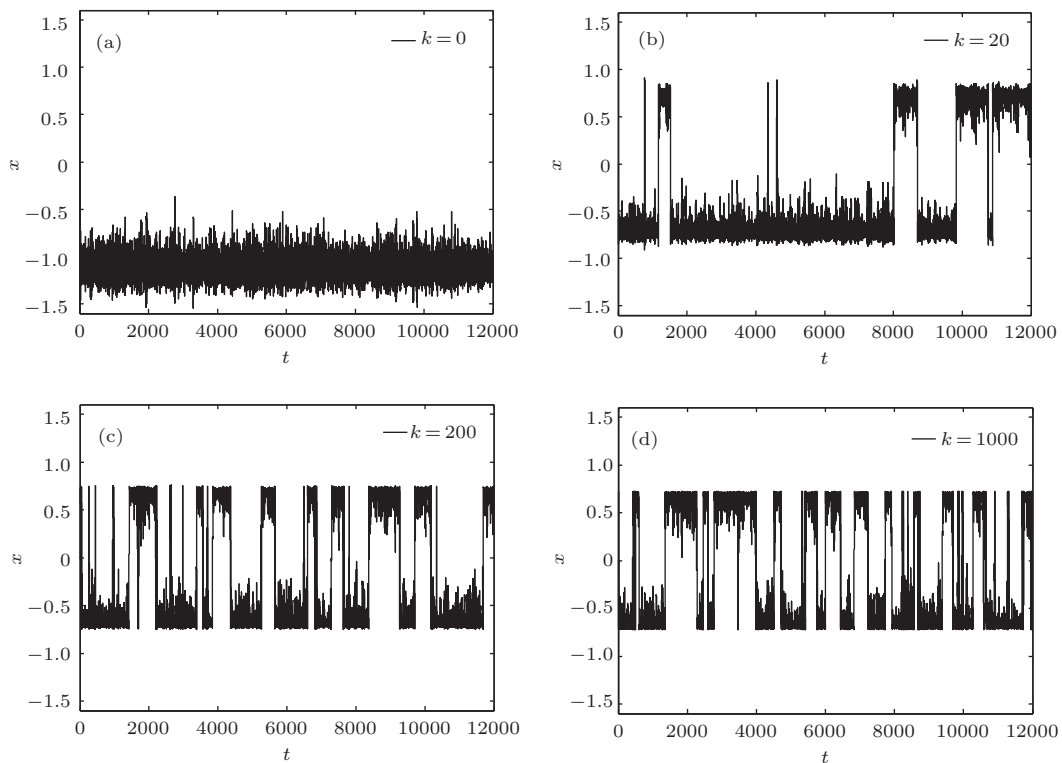


图 16 不同碰撞刚度下,系统位移响应时域图 ( $\delta_f = 1.7$ )

Fig. 16. The system's dynamic displacement with different collision stiffness ( $\delta_f = 1.7$ ).

### 5 结 论

本文提出了碰撞双稳态压电俘能系统,建立了机电耦合方程,分析了碰撞对双稳态系统的势能和恢复力的影响.分析了单频激励下碰撞对系统运动特性及俘能效率的影响,研究了随机激励下不同碰撞间隙对系统运动状态的影响规律,以及其对俘能效率的影响规律.主要结论如下.

1) 简谐激励下,合理的碰撞能够使得双稳态

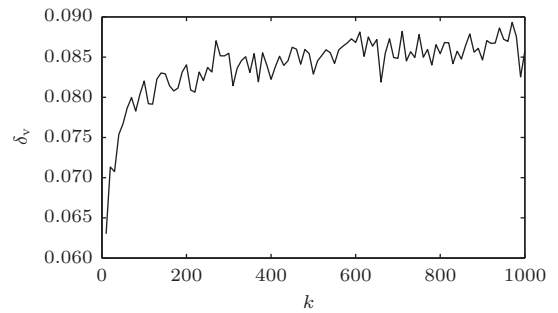


图 15 不同碰撞刚度下,系统输出电压标准差的变化 ( $\delta_f = 1.7$ )

Fig. 15. The relation between the collision stiffness ( $k$ ) and the standard deviation ( $\delta_v$ ) when excited by stochastic forces at  $\delta_f = 1.7$ .

系统由单阱周期运动变为双阱大幅运动,由双阱混沌运动变为双阱大幅周期运动,从而大幅提高俘能效率.

2) 低强度随机激励下,双稳态系统的运动会局限于单势能阱中;通过适当间隙的碰撞,系统响应出现双阱间的频繁跳跃,可以大幅度提高俘能效率.

3) 给定随机振动强度,不同碰撞间隙对系统俘能效率的影响是不同.对于一个随机振动强度,可以找到最优的碰撞间距,此时系统即能够出现频繁

的双阱跳跃, 而且够保持较大的振动幅值, 因此系统的输出功率很高.

4) 碰撞间隙由大变小, 根据俘能效率的变化可以分为四个阶段: 当大间隙时, 由于系统在低强度随机激励下的振幅小于碰撞间隙, 此时并未发生碰撞; 随着间隙的减小, 系统只在局部与弹簧发生碰撞, 此时碰撞引起的双阱跳跃运动很少, 而且由于碰撞的存在, 系统振幅下降, 在这个阶段系统的俘能效率会下降; 随着间隙的继续减小, 随着碰撞引起的双阱跳跃运动的愈发频繁, 此时系统的俘能效率会持续上升直至到达峰值; 当间隙继续减小时, 虽然系统在双阱之间的碰撞很频繁, 但是由于振幅的持续降低, 此时俘能效率又会降低.

### 参考文献

- [1] Zuo L, Tang X D 2013 *J. Intel Mat Syst Str.* **24** 1405
- [2] Li H D, Tian C, Daniel Deng Z, 2014 *Appl. Phys. Rev.* **1** 041301
- [3] Harne R L, Wang K W 2013 *Smart Mater. Struct.* **22** 023001
- [4] Erturk A, Hoffmann J, Inman D J 2009 *Appl. Phys. Lett.* **94** 254102
- [5] Cottone F, Vocca H, Gammaitoni L 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 080601
- [6] Litak G, Friswell M I, Adhikari S 2010 *Appl. Phys. Lett.* **96** 214103
- [7] Ali S F, Adhikari S, Friswell M I, Narayanan S 2011 *J. Appl. Phys.* **109** 074904
- [8] Lan C B, Qin W Y, Li H T 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 080503 (in Chinese) [蓝春波, 秦卫阳, 李海涛 2015 物理学报 **64** 080503]
- [9] Zhao S, Erturk A 2013 *Appl. Phys. Lett.* **106** 103902
- [10] Lan C B, Qin W Y 2014 *Appl. Phys. Lett.* **105** 113901
- [11] Zhou S X, Cao J Y, Inman D J, Liu S S, Wang W, Lin J 2015 *Appl. Phys. Lett.* **105** 093901
- [12] Liu W Q, Formosa F, Badel A, Wu Y P, Agbossou A 2014 *Sens. Actuators. A* **216** 106
- [13] Moss S, Barry A, Powlesland I, Galea S, Carman G P 2010 *Appl. Phys. Lett.* **97** 234101
- [14] Liu H C, Lee C K, Kobayashi T, Tay C J, Quan C G 2012 *Smart Mater. Struct.* **21** 035005
- [15] Fan K Q, Xu C H, Wang W D, Fang Y 2014 *Chin. Phys. B* **23** 084501
- [16] Chen Z S, Yang Y M 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 074301 (in Chinese) [陈仲生, 杨拥民 2011 物理学报 **60** 074301]



# Vibration energy harvesting from a piezoelectric bistable system with two symmetric stops<sup>\*</sup>

Lan Chun-Bo Qin Wei-Yang<sup>†</sup>

(Department of Engineering Mechanics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

( Received 6 May 2015; revised manuscript received 10 June 2015 )

## Abstract

Random vibration energy is widely existing in the environment. To efficiently harvest it, many researchers have designed lots of harvesters up till now. A lot of research works have found that when a harvester with bistable piezoelectric energy is excited by stochastic forces, if the intensity of them is low, the system's motion will be trapped in a single potential well. This will result in a low output voltage. In order to overcome the difficult of it and improve the harvesting efficiency, we develop an impact facility with two stops and incorporate it to a bi-stable energy harvester. This design can improve the harvesting efficiency greatly. First the electromechanical coupling equations are derived based on the Euler-Bernoulli beam theory and Kirchhoff's law. Then, we analyze the symmetric stops' effect on the potential function and the elastic restoring force of the system. Results show that both the potential energy and the magnitude of restoring force will be enhanced when collision takes place. Furthermore, we investigate the impact's effect on the system's dynamic responses and efficiency at harmonic excitation. Results reveal that a well designed impact can transform an intrawell motion into an interwell, and then increase the output voltage. And the chaotic motion can be changed into the large amplitude periodic one. Then, the harvester's dynamic responses under random excitations at a low intensity are obtained by using Euler-Maruyama method. Results indicate that the collision gaps can greatly influence the efficiency of the energy harvester. Collisions between the beam and the stops can force the system to oscillate between two potential wells more frequently. According to the relationship between the gap and the standard deviation of output voltage, we know that there exists an optimal collision gap for a definite intensity of stochastic excitation. The bistable energy harvester with this optimal gap will oscillate between the two wells frequently, and output a large voltage. Moreover, the collision stiffness can influence the system's performance as well. With the increase of collision stiffness, the system will exhibit a more frequently jumping between the two potential wells, but the stiffness has a limitation, exceeding which it cannot increase the frequency of jumping and improve the output power any more. So by properly designing the collision gap and stiffness, the system can most frequently jump between the two wells with a large amplitude of displacement, hence can attain the highest harvesting efficiency.

**Keywords:** impact, bistable system, energy harvesting, random vibration

**PACS:** 05.40.-a, 77.65.-j

**DOI:** 10.7498/aps.64.210501

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11172234).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [qinweiyang@yahoo.com.cn](mailto:qinweiyang@yahoo.com.cn)