

六边形格子态斑图的数值模拟

白占国 刘富成 董丽芳

Numerical simulations of hexagonal grid state patterns

Bai Zhan-Guo Liu Fu-Cheng Dong Li-Fang

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 210505 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.210505

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.210505>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I21>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

电感电流伪连续导电模式下 Buck 变换器的动力学建模与分析

Dynamical modeling and analysis of buck converter operating in pseudo-continuous conduction mode

物理学报.2015, 64(18): 180501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.180501>

基于有源广义忆阻的无感混沌电路研究

Inductorless chaotic circuit based on active generalized memristors

物理学报.2015, 64(17): 170503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.170503>

混沌信号的压缩感知去噪

Chaotic signal denoising in a compressed sensing perspective

物理学报.2015, 64(16): 160502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.160502>

基于数模混合的混沌映射实现

Chaotic map implementation based on digital-analog hybrid method

物理学报.2015, 64(16): 160501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.160501>

基于对偶数理论的资料同化新方法

A new data assimilation method based on dual-number theory

物理学报.2015, 64(13): 130502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.130502>

## 六边形格子态斑图的数值模拟\*

白占国<sup>1)†</sup> 刘富成<sup>2)</sup> 董丽芳<sup>2)</sup>

1)(河北科技大学理学院, 石家庄 050018)

2)(河北大学物理科学与技术学院, 保定 071002)

(2015年5月31日收到; 2015年6月23日收到修改稿)

采用双层耦合的 Lengel-Epstein 模型, 通过改变两子系统图灵模的强度比, 获得了四种的六边形格子态和多种非格子态结构. 模拟结果表明: 反应扩散系统的格子态结构由三套子结构叠加而成, 是两图灵模的波数比和强度比共同作用的结果, 两模的强度比决定了三波共振的具体模式; 另外, 系统选择格子态斑图所需的两图灵模的强度比大于非格子态斑图的强度比; 逐步增加两图灵模强度比, 出现的斑图趋于从复杂到简单变化. 深入研究发现: 不同互质数对  $(a, b)$  对应的格子态斑图的稳定性不同, 其中  $(3, 2)$  对应的格子态结构最为稳定.

**关键词:** 反应扩散系统, Lengel-Epstein 方程, 格子态斑图, 图灵模

**PACS:** 05.45.-a, 05.65.+b, 82.40.Ck, 52.80.Tn

**DOI:** 10.7498/aps.64.210505

## 1 引言

近年来, 非线性系统中包含两个或多个有限个空间波矢的复杂斑图, 以其重要的基础研究价值和广泛的应用前景已成为各个领域的研究热点<sup>[1-5]</sup>, 特别是格子态斑图作为一类特殊的超点阵斑图备受关注<sup>[6-15]</sup>. 格子态斑图由两组具有相同临界波数的波矢相互旋转  $\theta$  角, 与线性稳定模共振作用而成<sup>[11]</sup>, 所有临界波矢恰好落在四边或六边格子的格点上, 故形象地称之为“格子态”斑图. 格子态斑图可以用一组互质的整数对  $(a, b)$  来标识, 互质数对取不同的值, 两组临界波矢相互旋转的角度, 以及临界波矢与基矢波数的比值都有不同的值, 从而决定了系统选择的格子态斑图在物理空间表现形式的多样性.

目前, 人们已经在实验系统获得了多种格子态斑图, 例如 Fineberg 等<sup>[11,12]</sup> 在 Faraday 系统中观察到不同值的超六边格子态斑图, Soria 和 Arecchi

等<sup>[13]</sup> 在非线性光学系统中观察到的超六边斑图也属于格子态斑图, 董丽芳等<sup>[14]</sup> 在介质阻挡放电 (DBD) 系统观察到四边形和六边形格子态斑图. Silber 等<sup>[15]</sup> 于 2000 年预言了格子态超四边形和超六边形斑图的存在, 并且在理论上分析了其形成的物理机理以及模与模之间的非线性共振条件, 但是未能从方程模型中得到格子态斑图. 本文采用双层耦合的 Lengel-Epstein 反应扩散方程模型, 通过调节两图灵模的波数和强度比获得多种六边形格子态斑图, 从理论上探索了格子态斑图的形成、稳定所必需满足的条件.

## 2 模型

在反应扩散系统中用于研究图灵斑图的主要有 Lengyel-Epstein 模型、Brusselator 模型和 Schnackenberg 模型等<sup>[16-22]</sup>, 其中 Lengyel-Epstein 模型和 Brusselator 模型应用最广. 文中采用双层线性耦合的 Lengel-Epstein 反应扩散方

\* 国家自然科学基金(批准号: 11175054)、河北省自然科学基金(批准号: A2014208171)和河北科技大学科研基金(批准号: QD201225, SW09)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: [baizg2006163@163.com](mailto:baizg2006163@163.com)

程, 模拟了不同互质数对格子态斑图. 在无量纲的情况下反应扩散系统双层耦合的偏微分方程具有相同的形式, 如下所示:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = f(u_i, v_i) + \alpha(u_j - u_i) + D_{u_i} \nabla^2 u_i, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = g(u_i, v_i) + \beta(v_j - v_i) + D_{v_i} \nabla^2 v_i, \quad (1b)$$

其中  $i$  和  $j$  表示模型中系统1( $u_1, v_1$ ) 和系统2( $u_2, v_2$ ),  $u$  和  $v$  分别为活化子和禁阻子的浓度,  $D_u$  和  $D_v$  分别为  $u$  和  $v$  变量的扩散系数,  $\alpha$  和  $\beta$  分别为两个子系统的活化子和禁阻子之间的线性耦合强度; 方程  $f(u, v)$  和  $g(u, v)$  为每个子系统的局部动力学方程, 在反应扩散系统的不同模型中具体表达式不同, Lengyel-Epstein 模型中形式如下:

$$f(u, v) = a - u - 4 \frac{uv}{1 + u^2}, \quad (2a)$$

$$g(u, v) = b \left( u - \frac{uv}{1 + u^2} \right). \quad (2b)$$

方程的动力学行为由控制参数  $a$  和  $b$  所决定, 在本文中我们固定  $a = 15$  和  $b = 9$ , 两个子系统具有相同的均匀定态解  $(u_0, v_0) = \left( \frac{a}{5}, 1 + \frac{a^2}{25} \right)$ . 选取合适的参数使两个子系统均处于图灵空间, 激发出两个图灵模  $k_1$  和  $k_2$ , 图1是两子系统的色散关系: 具有较大扩散系数的失稳模  $k_1$  (长波模) 具有较小的波数, 而具有较小扩散系数的基模  $k_2$  (短波模) 具有较大的波数, 两图灵模的强度分别为  $h_1$  和  $h_2$ , 进而讨论两子系统图灵模的非线性相互作用引起的超点阵复杂斑图.

数值模拟采用欧拉向前差分的方法进行积分, 在一个含有  $N \times N$  ( $256 \times 256$ ) 个格子的二维平面

上进行, 时间和空间积分步长分别为  $\Delta t = 0.01$ ,  $\Delta h = 0.5$  个时间和空间单位, 初始条件均为均匀定态上加一个很小的随机扰动, 边界条件选用周期性边界条件, 为确保其稳定性所有结果的积分时间均超过 10000 个时间单位.

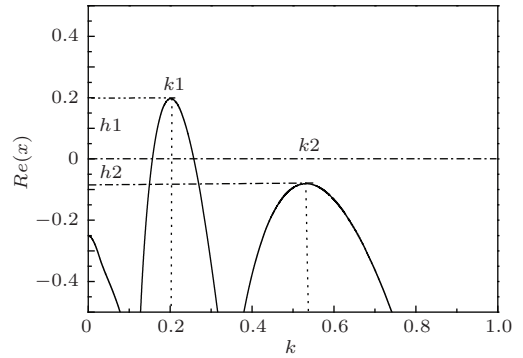


图1 两子系统图灵模的色散关系

Fig. 1. The dispersion relation curve of Turing mode in two subsystems.

### 3 模拟结果与讨论

#### 3.1 Lengyel-Epstein 方程模拟结果

如果系统参数  $a$  与  $b$  为固定值, 则两个子系统激发的图灵模的强度  $h$  主要由扩散系数  $D_u$  和  $D_v$  所决定 (如图2所示). 从图中可以看出, 图灵模的强度  $h$  随活化子扩散系数  $D_u$  的增大而缓慢减小, 却随禁阻子扩散系数  $D_v$  的增大而增大, 且当  $D_u$  的值较小时图灵模的强度  $h$  增加幅度更快. 通过调节两个扩散系数的值, 两子系统可得到具有不同强度比的图灵模, 二者相互作用可得到多种格子态和非格子态复杂斑图.

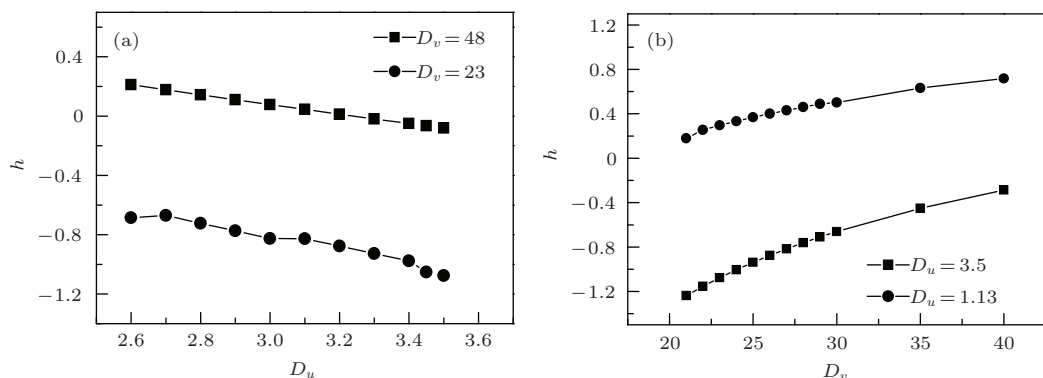


图2 图灵模的强度随方程扩散系数的变化曲线 (a) 图灵模的强度  $h$  与扩散系数  $D_u$  的关系; (b) 图灵模的强度  $h$  与扩散系数  $D_v$  的关系

Fig. 2. The variation curves of Turing mode intensity with changing diffusion coefficients of equation: (a) Turing mode intensity  $h$  with changing diffusion coefficient  $D_u$  (fixed  $D_v$ ); (b) Turing mode intensity  $h$  with changing diffusion coefficient  $D_v$  (fixed  $D_u$ ).

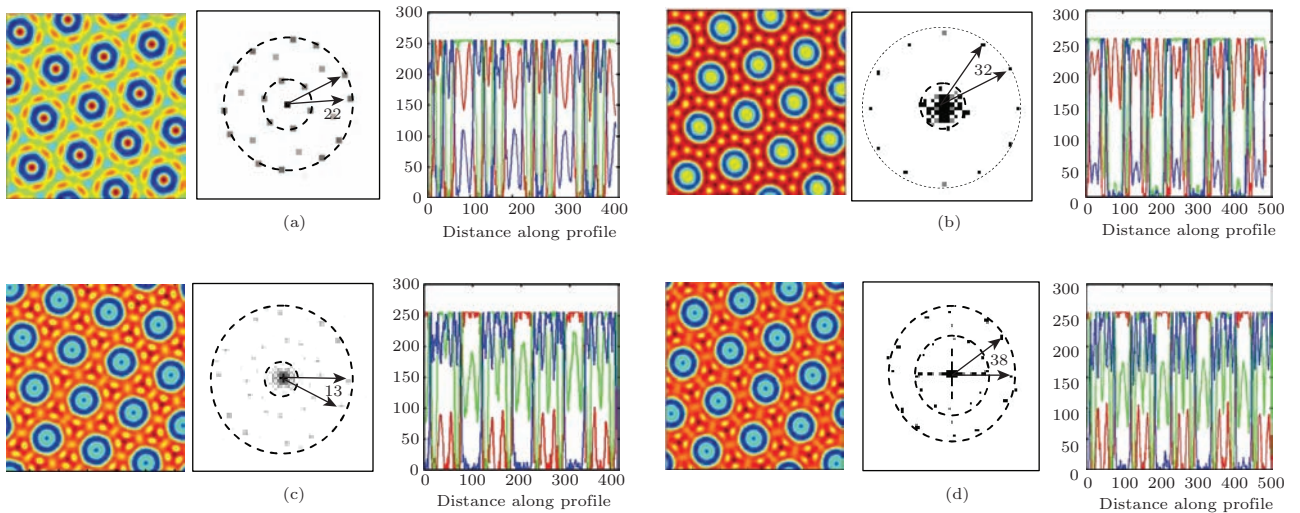


图3 (a, b) 分别为 (3, 2), (4, 3), (5, 3) 和 (5, 4) 的格子态斑图、傅里叶频谱图和二维空间波形图 (a) 六边形格子态  $D_{u1} = 3.5$ ,  $D_{v1} = 48$ ,  $D_{u2} = 21.5$ ,  $D_{v2} = 390$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 0.1$ ; (b) 大点-环-小点格子态  $D_{u1} = 1.56$ ,  $D_{v1} = 32$ ,  $D_{u2} = 20$ ,  $D_{v2} = 550$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.5$ ; (c) 复杂超六边形格子态  $D_{u1}=1.28$ ,  $D_{v1} = 23$ ,  $D_{u2} = 19$ ,  $D_{v2} = 550$ ,  $\alpha = 0.45$ ,  $\beta = 0.5$ ; (d) 复杂超六边形格子态  $D_{u1} = 1.09$ ,  $D_{v1}=21.8$ ,  $D_{u2} = 19$ ,  $D_{v2} = 550$ ,  $\alpha = 0.45$ ,  $\beta = 0.45$

Fig. 3. Four grid state patterns with 2D Fourier spectrum and waveform diagram, whose coprime number pair are (3, 2), (4, 3), (5, 3) and (5, 4) respectively. The parameters: (a) hexagon grid state:  $D_{u1} = 3.5$ ,  $D_{v1} = 48$ ,  $D_{u2} = 21.5$ ,  $D_{v2} = 390$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 0.1$ ; (b) bigdot-holl-smalldot:  $D_{u1} = 1.56$ ,  $D_{v1} = 32$ ,  $D_{u2} = 20$ ,  $D_{v2} = 550$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.5$ ; (c) complex superhexagon:  $D_{u1}=1.28$ ,  $D_{v1} = 23$ ,  $D_{u2} = 19$ ,  $D_{v2} = 550$ ,  $\alpha = 0.45$ ,  $\beta = 0.5$ ; (d) complex superhexagon:  $D_{u1} = 1.09$ ,  $D_{v1}=21.8$ ,  $D_{u2} = 19$ ,  $D_{v2} = 550$ ,  $\alpha = 0.45$ ,  $\beta = 0.45$ .

在确定的波数比的条件下, 通过仔细调节系统参数, 得到了具有合适强度比的图灵模, 二者相互作用在短波模子系统中出现了互质数对  $(a, b)$  分别取 (3, 2), (4, 3), (5, 3) 和 (5, 4) 四组值时的六边形格子态斑图 (如图 3 所示), 同时给出了其相应傅里叶空间频谱和二维空间波形图. 从图中可以看出构成格子态超点阵斑图的基元各不相同, 但任何一个单元与周围均匀分布的六个相同单元都可构成六边形的形状, 且每一基元包括内外两层结构, 内层为一复杂中心斑图, 外层有简单子斑图环绕, 因此图 3 中所列均为六边形格子态结构. 模拟图形中以互质数对 (3, 2) 格子态斑图的基元较为特殊, 每一基元外层都是独立的一套子结构, 而其余格子态斑图的基元外层子结构均与周围六个基元共用. 分析其傅里叶频谱可以很清楚地看出格子态斑图的基矢与临界波矢的三波共振关系及两相邻临界波矢旋转角度, 四种均为完美的格子态斑图. 频谱中的十二个临界波矢均可看成由两组六边形波矢组成, 并相互转过  $\theta$  角, 转过的角度  $\theta$  与互质数对  $(a, b)$  的关系式为<sup>[16]</sup>

$$\cos \theta = \frac{a^2 + 2ab - 2b^2}{2(a^2 - ab + b^2)},$$

而临界波数与基矢波数的比值与  $(a, b)$  存在下面的函数关系:  $k_c/k = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$ . 由于四种格子态斑图结构比较复杂, 均由多套子结构叠加而成, 因此利用二维空间波形图对其进一步分析. 从波形结构图中可以看出, 不同的格子态斑图子结构各不相同, 每套子结构均有次谐振分岔现象, 如同化学上的原子壳层结构又有了支壳层亚结构, 对应不同互质数对的格子态斑图子结构的次级分岔程度不同, 这可能是图灵模强度比不同的结果. 互质数对规定的波矢比值越大, 子结构的分岔越复杂, 我们在这里称之为量子化特征. 仔细观察图 3 (c) 和 (d) 这两种格子态斑图非常相似, 只是强度和相位有些差异, 波形结构图的分岔类型非常相似, 只是在分岔程度上有所不同, 这可能是因为这两种格子态斑图的基矢与临界波矢比值非常接近, 致使模的相互作用选择了相同的式样.

保持四种互质数对规定的波数不变, 通过调节扩散系数改变两个图灵模的强度比, 得到了四种非格子态超点阵斑图 (如图 4 所示). 从模拟图中可以看出构成六边形的基元出现明显变化: 图 4 (a) 在互质数对 (3, 2) 格子态斑图基元的外层增加了一套



短线构成的六边形框架, 形成类似蜂窝六边形斑图形状; 互质数对 (4, 3) 格子态基元外层的点两两相连形成六条短线构成图 4(b) 基元的外层, 形成类似蝴蝶结的形状; 互质数对 (5, 3) 格子态基元外层则演变成图 4(c) 基元的外层晕状结构; 互质数对 (5, 4) 格子态基元演化成图 4(d) 中的白眼斑图单元. 傅里叶频谱图中所有临界波矢也不再是由两组

相互转过  $\theta$  角的六边形波矢组成. 比较格子态斑图与非格子态斑图图灵模的强度比发现: 在相同的波数比条件下, 出现格子态斑图的图灵模强度比大于非格子态超点阵斑图的图灵模强度比. 二者的强度比均随波数比的增大而增大. 上述结果表明, 两个图灵模的强度比在斑图的选择和形成中起着非常重要的作用.

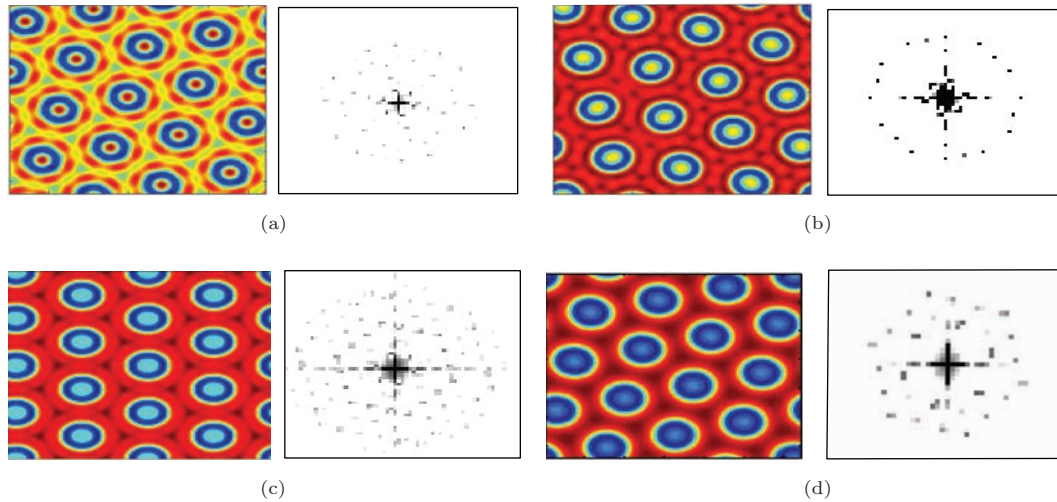


图 4 非格子态超点阵图 (a) 类格子态  $D_{u1} = 3.2, D_{v1} = 48, D_{u2} = 21.5, D_{v2} = 390, \alpha = 0.2, \beta = 0.2$ ; (b) 蝴蝶结斑图  $D_{u1} = 1.6, D_{v1} = 32, D_{u2} = 21, D_{v2} = 550, \alpha = 0.5, \beta = 0.5$ ; (c) 点-晕六边形  $D_{u1}=1.13, D_{v1} = 22, D_{u2} = 19, D_{v2} = 550, \alpha = 0.5, \beta = 0.5$ ; (d) 白眼六边形  $D_{u1} = 1.5, D_{v1}=15.8, D_{u2} = 19, D_{v2} = 550, \alpha = 0.5, \beta = 0.5$

Fig. 4. The non-grid patterns with 2D Fourier spectrum. The parameters: (a) likely grid state:  $D_{u1} = 3.2, D_{v1} = 48, D_{u2} = 21.5, D_{v2} = 390, \alpha = 0.2, \beta = 0.2$ ; (b) butterfly-node pattern:  $D_{u1} = 1.6, D_{v1} = 32, D_{u2} = 21, D_{v2} = 550, \alpha = 0.5, \beta = 0.5$ ; (c) dot-halo hexagon:  $D_{u1}=1.13, D_{v1} = 22, D_{u2} = 19, D_{v2} = 550, \alpha = 0.5, \beta = 0.5$ ; (d) white-eye hexagon:  $D_{u1} = 1.5, D_{v1}=15.8, D_{u2} = 19, D_{v2} = 550, \alpha = 0.5, \beta = 0.5$ .

为进一步深入研究两图灵模的强度比在系统斑图选择、形成中的重要作用, 在四种确定的波数比下, 系统地观察了图灵模的强度比对斑图选择的影响(如图 5 所示). 结果表明: 两图灵模波数比相同, 但只要二者的强度比不同, 系统选择的图灵斑图式样就不相同, 而且随强度比的增大, 出现的斑图趋于从复杂到简单变化. 互质数对为 (3, 2), (4, 3), (5, 3) 和 (5, 4) 四种格子态斑图出现的图灵模强度比范围分别为  $(-0.4079 \sim -0.264)$ ,  $(-0.3559 \sim -0.3296)$ ,  $(-0.1907 \sim -0.1622)$  和  $(-0.2077 \sim -0.1684)$ , 说明格子态斑图对两图灵模的强度比依赖较为敏感, 且出现的范围较小. 其原因可能是图灵模的波数比和强度比共同作用的结果: 由互质数对  $(a, b)$  规定的波数比选择了两组临界波矢的旋转角度及其与基

矢的比例关系, 使得所有临界波矢有可能落在基矢格子的格点上; 两图灵模的强度比决定了三波共振的具体模式, 只有某一合适的强度比才能使系统选择“格子态”斑图.

此外, 通过逐步增大初始条件中随机微扰的强度, 考察了格子态斑图是否出现以及稳定性. 结果表明: 互质数对 (3, 2) 的格子态斑图最稳定, 当  $\Delta u/u_0 \geq 0.5$  时, 斑图发生失稳, 很快变成简单不规则斑图; 其他三种格子态斑图远不如第一种格子态斑图稳定, 当  $\Delta u/u_0 \geq 0.1$  就发生失稳. 分析其原因可能是超点阵斑图的选择机理不仅服从三波共振原理, 还受对称性原理约束. 随两模的波数比增大, 系统选择的斑图对称性降低, 稳定性也随之减弱. 因为互质数对 (3, 2) 规定的波数比最小为  $\sqrt{7}$ , 波数相差越小的图灵模的满足的共振关系越稳定.

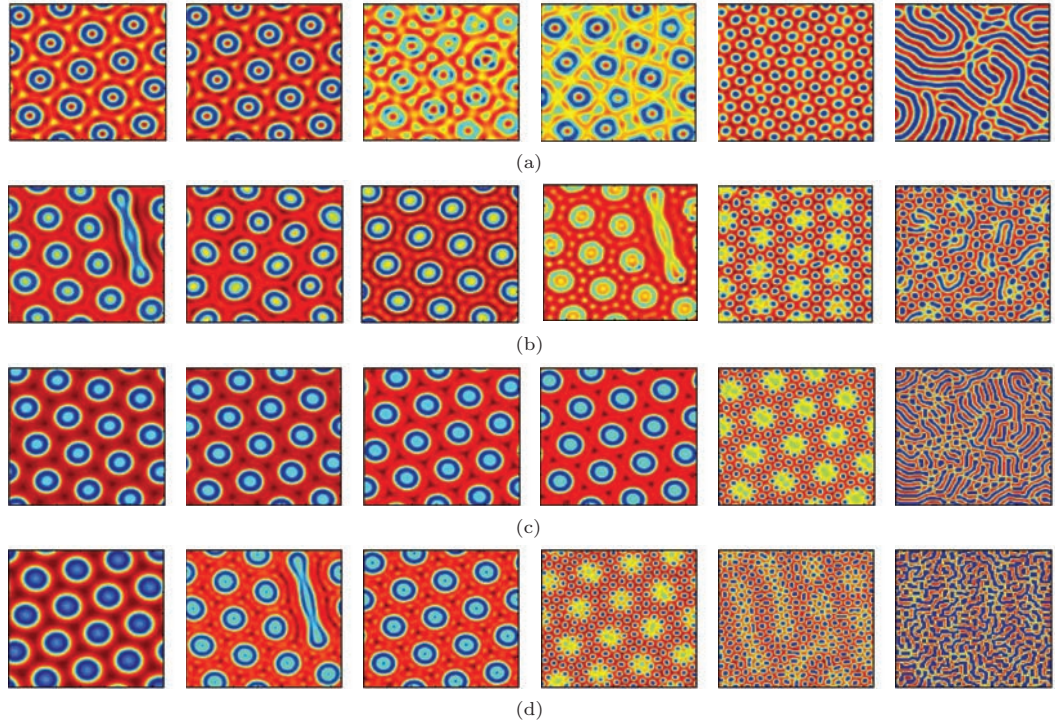


图5 波数比分别为  $\sqrt{7}$ ,  $\sqrt{13}$ ,  $\sqrt{19}$  和  $\sqrt{21}$  各种不同强度比时的斑图 (a) 组斑图的  $h_2/h_1$  值分别为:  $-1.3908, -1.0923, -0.6921, 0.2586, -0.1152, 2.0014$ ; (b) 组斑图的  $h_2/h_1$  值分别为:  $-1.4746, -0.8150, -0.3559, -0.2452, -0.0725, 2.5316$ ; (c) 组斑图的  $h_2/h_1$  值分别为:  $-1.1386, -0.8299, -0.6324, -0.4433, -0.0349, 0.2836$ ; (d) 组斑图的  $h_2/h_1$  值分别为:  $-2.6707, -0.2587, -0.2160, -0.1373, 0.3845, 1.7819$ .

Fig. 5. Various patterns with four different wave number ratios  $\sqrt{7}$ ,  $\sqrt{13}$ ,  $\sqrt{19}$ , and  $\sqrt{21}$  and different intensity ratios: (a)  $\sqrt{7}$  and  $h_2/h_1$ :  $-1.3908, -1.0923, -0.6921, 0.2586, -0.1152, 2.0014$ ; (b)  $\sqrt{13}$  and  $h_2/h_1$ :  $-1.4746, -0.8150, -0.3559, -0.2452, -0.0725, 2.5316$ ; (c)  $\sqrt{19}$  and  $h_2/h_1$ :  $-1.1386, -0.8299, -0.6324, -0.4433, -0.0349, 0.2836$ ; (d)  $\sqrt{21}$  and  $h_2/h_1$ :  $-2.6707, -0.2587, -0.2160, -0.1373, 0.3845, 1.7819$ .

### 3.2 六边形格子态斑图的模式验证

为进一步理解格子态斑图形成的物理机理, 分析互质数对  $(a, b)$  分别取  $(3, 2)$  和  $(4, 3)$  两种六边形格子态的临界波矢与基矢的波数比及旋转角度, 构造此两种格子态结构并与  $DBD$  系统的格子态结构进行比较. 首先令基模波矢  $k = 0.2$ , 临界模波矢分别为  $q_i = k * \sqrt{7}$  (或  $\sqrt{13}$ ), 两组临界波矢的旋转角  $\theta = 22^\circ$  或  $32^\circ$ . 在选定的参数条件下可得到基模和临界模的表达式如下所示:

$$I_1(x, y) = 4 \times (\cos(k_{1x} \times x + k_{1y} \times y) + \cos(k_{2x} \times x + k_{2y} \times y) + \cos(k_{3x} \times x + k_{3y} \times y))/9; \quad (3a)$$

$$I_2(x, y) = 4 \times (\cos(q_{11x} \times x + q_{11y} \times y) + \cos(q_{12x} \times x + q_{12y} \times y) + \cos(q_{13x} \times x + q_{13y} \times y))/9; \quad (3b)$$

$$I_3(x, y) = 4 \times (\cos(q_{21x} \times x + q_{21y} \times y)$$

$$+ \cos(q_{22x} \times x + q_{22y} \times y) + \cos(q_{23x} \times x + q_{23y} \times y))/9; \quad (3c)$$

则总强度  $I = I_1(x, y) + I_2(x, y) + I_3(x, y)$  即为格子态斑图表达式.

图6给出了互质数对为  $(3, 2)$  和  $(4, 3)$  的格子态斑图以及董丽芳研究小组<sup>[19]</sup>在  $DBD$  实验系统中获得的六边形格子态斑图. 可以看出: 依据模式分析构造的格子态斑图与模拟结果相似, 每一基元与周围六个相同基元均可构成六边形的形状; 互质数对为  $(3, 2)$  的格子态斑图每一基元的外层都是独立的六个点状单元, 而互质数对为  $(4, 3)$  的格子态斑图基元的外层有十二个点状单元, 且与周围六个基元共用. 通过对比发现模拟与构造的互质数对  $(4, 3)$  格子态斑图与实验获得的六边形格子态斑图三者具有很好的相似性; 互质数对  $(a, b)$  取值不同, 对应的格子态斑图在物理空间的具体表现式样也不相同, 并且随临界模波矢与基模波矢比值的增大, 图形的式样也越复杂.

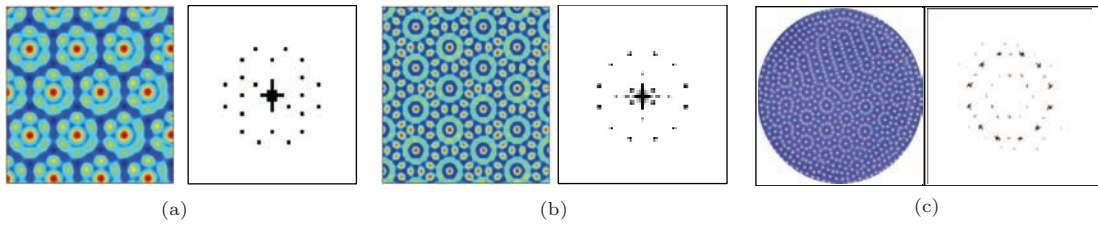


图6 六边形格子态斑图 (a)为互质数对(3, 2)的格子态斑图; (b)为互质数对(4, 3)的格子态斑图; (c)为DBD实验系统获得的六边形格子态斑图

Fig. 6. The hexagon grid patterns with 2D Fourier spectrum: (a) for coprime number pair (3, 2); (b) for coprime number pair (4, 3); (c) for DBD experiment system.

## 4 结 论

基于双层耦合的L-E反应扩散模型系统地研究了六边形格子态斑图的选择、形成机理,并对格子态结构进行了模式分析与验证.研究发现,格子态斑图由三套子结构叠加而成,每套子结构具有量子化特征;两图灵模之间合适的波数比和强度比是形成格子态斑图的重要条件.对于同一波数比,当图灵模的强度比不同时,决定了两模之间的非线性相互作用不同,从而导致系统选择的斑图样式的变化;格子态斑图对两图灵模的强度比大于非格子态复杂斑图的强度比,且只出现在特别狭窄的范围;不同互质数对 $(a, b)$ 对应的格子态斑图的稳定性不同,模拟结果和构造图形与介质阻挡放电的实验结果具有很好的一致性.本结果对于深入理解格子态斑图的形成机理、丰富非线性超点阵斑图理论具有一定的积极作用.

## 参考文献

- [1] Cross M C, Hohenberg P C 1993 *Rev. Mod. Phys.* **65** 851
- [2] Kytta K, Kaski K, Barrio R A 2007 *Physica A* **385** 105
- [3] Nie Q Y, Ren C S, Wang D Z, Li S Z, Zhang J L 2007 *Appl. Phys. Lett.* **90** 221504
- [4] Sharpe J P, Ramazza P L, Sungar N, Saunders K 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 094101
- [5] Bois J S, Jülicher F, Grill S W 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 028103
- [6] Rogers J L, Pesch W, Brausch O, Schatz M F 2005 *Phys. Rev. E* **71** 066214
- [7] Dong L F, Li S F, Liu F, Liu F C, Liu S H, Fan W L 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 362 (in Chinese) [董丽芳, 李树锋, 刘峰, 刘富成, 刘书华, 范伟丽 2006 物理学报 **55** 362]
- [8] Besson T, Edwards W S, Tuckerman L S 1996 *Phys. Rev. E* **54** 507
- [9] Pesch M, Ackemann T, Lange W 2003 *Phys. Rev. E* **68** 016209
- [10] Westhoff E G, Herrero R, Ackemann T, Lange W 2003 *Phys. Rev. E* **67** 025203
- [11] Epstein T, Fineberg J 2006 *Phys. Rev. E* **73** 055302
- [12] Arbell H, Fineberg J 2002 *Phys. Rev. E* **65** 036224
- [13] Pampaloni E, Residori S, Soria S, Arecchi F T 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 1042
- [14] Dong L F, Li S F, Fan W L, Pan Y Y 2009 *Phys. Plasmas* **16** 122308
- [15] Judd S L, Silber M 2000 *Physica D* **136** 45
- [16] Míguez D G, Dolnik M, Epstein I R, Muñozuri A P 2011 *Phys. Rev. E* **84** 046210
- [17] Rogers J L, Schatz M F, Brausch O, Pesch W 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 4281
- [18] Liu H Y, Yang C Y, Tang G N 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 010505 (in Chinese) [刘海英, 杨翠云, 唐国宁 2013 物理学报 **62** 010505]
- [19] Wang W M, Liu H Y, Cai Y L, Li Z Q 2011 *Chin. Phys. B* **20** 074702
- [20] Mikhailova A S, Showalter K 2006 *Physics Reports* **425** 79
- [21] Yuan X J, Shao X, Liao H M, Ouyang Q 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 024702
- [22] Shang W L, Wang D Z 2007 *Chin. Phys. Lett.* **24** 1992



# Numerical simulations of hexagonal grid state patterns\*

Bai Zhan-Guo<sup>1)†</sup> Liu Fu-Cheng<sup>2)</sup> Dong Li-Fang<sup>2)</sup>

1) (College of Sciences, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang 050018, China)

2) (College of Physics Science and Technology, Hebei University, Baoding 071002, China)

( Received 31 May 2015; revised manuscript received 23 June 2015 )

## Abstract

The four hexagonal grid state patterns and a variety of non-grid states are obtained by changing the values of intensity ratio between two Turing modes in the two-layer coupled Lengel-Epstein model system. Results of numerical investigation show that those grid states in reaction diffusion are interleaving structures of three sets of different sublattices, which result from the interaction of both the wave number ratio and intensity ratio between Turing modes in the two subsystems; and the specific expressions of three-wave resonance in physical space are governed by the mode intensity ratio. Furthermore, the value of intensity ratio between the two Turing modes in the grid state patterns is greater than that of non-grid state structures, and the type of pattern selected by the system changes from complex to simple pattern with the increase of mode intensity ratio. Finally, it is found that these four hexagonal grid states correspond to different number pair  $(a, b)$  having different stability, and the grid state with the number pair  $(3, 2)$  is the most stable structure.

**Keywords:** reaction diffusion systems, Lengel-Epstein model, grid state patterns, Turing modes

**PACS:** 05.45.-a, 05.65.+b, 82.40.Ck, 52.80.Tn

**DOI:** 10.7498/aps.64.210505

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11175054), the Natural Science Foundation of Hebei Province, China (Grant No. A2014208171), and the Foundations of Hebei University of Science and Technology, China (Grant No. QD201225, SW09).

† Corresponding author. E-mail: [baizg2006163@163.com](mailto:baizg2006163@163.com)