物理学报 Acta Physica Sinica
Chinese Physical Society
Institute of Physics, CAS

Levy噪声激励下的幂函数型单稳随机共振特性分析

张刚　胡韬　张天骐

Characteristic analysis of power function type monostable stochastic resonance with Levy noise

Zhang Gang　Hu Tao　Zhang Tian-Qi

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 64, 220502 (2015)　DOI: 10.7498/aps.64.220502
在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.220502
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I22

您可能感兴趣的其他文章
Articles you may be interested in

二维耦合定向输运模型研究
A two-dimensional coupled directed transport model
物理学报.2015, 64(15): 150501　http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.150501

科赫分形基底上受限固-固模型动□ρΠ甓刃形□氖□笛芯
Numerical investigations of dynamic behaviors of the restricted solid-on-solid model for Koch fractal substrates
物理学报.2015, 64(13): 130501　http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.130501

非各态历经噪声的产生及其应用
Generation and application of non-ergodic noise
物理学报.2014, 63(24): 240503　http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.240503

带有分数阶阻尼的压电能量采集系统相干共振
Coherence resonance of piezoelectric energy harvester with fractional damping
物理学报.2014, 63(22): 220504　http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.220504

色关联的乘性和加性色噪声激励下分段非线性模型的随机共振
Stochastic resonance in a piecewise nonlinear system driven by colored correlated additive and multiplicative colored noises
物理学报.2014, 63(21): 210501　http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.210501

# Levy噪声激励下的幂函数型单稳随机共振特性分析*

张刚[1)2)] 胡韬[1)†] 张天骐[1)2)]

1) (重庆邮电大学通信学院, 重庆 400065)

2) (信号与信息处理重庆市重点实验室, 重庆 400065)

( 2015 年 7 月 6 日收到; 2015 年 8 月 1 日收到修改稿 )

将 Levy 噪声与幂函数型单稳随机共振系统相结合, 为确保实验数据的可靠性, 以平均信噪比增益为衡量指标, 针对 Levy 噪声激励下的随机共振现象进行了研究. 详细介绍了单稳系统势函数形式及 Levy 噪声的产生原理, 深入探究了不同特征指数 $\alpha$ 和不同对称参数 $\beta$ 取值条件下, 单稳系统参数 $a$ 和 $b$、Levy 噪声强度放大系数 $D$ 对幂函数型单稳系统共振输出的作用规律. 研究结果表明, 在任意 Levy 噪声分布条件下, 通过对系统参数 $a$ 和 $b$ 的适当调整均能诱导随机共振, 完成微弱信号检测, 且有多个随机共振区间与之对应, 同时这些区间不随 $\alpha$ 或 $\beta$ 的改变而改变; 此外, 在研究噪声诱导的随机共振时也发现了同样的规律, 通过调节噪声强度放大系数 $D$ 也能产生随机共振, 且随机共振区间也不随 $\alpha$ 或 $\beta$ 的改变而改变; 最后, 在研究系统参数 $a$ 和 $b$ 之间的相互作用关系时发现, 一个系统参数的随机共振取值区间会随着另一个系统参数的改变而改变. 所获得的研究结果有效解决了 Levy 噪声激励下幂函数型单稳随机共振系统的系统参数、噪声强度放大系数的选择问题, 为其应用于工程实践提供了可靠的理论依据.

**关键词**: Levy 噪声, 幂函数型单稳系统, 随机共振, 平均信噪比增益

**PACS:** 05.40.–a, 05.45.–a, 05.40.Ca, 05.40.Fb **DOI:** 10.7498/aps.64.220502

## 1 引 言

随着非线性学科的诞生, 对于微弱信号的检测不再局限于传统检测方法. 随机共振[1,2]以其反常规的信号检测机理独树一帜, 是一种利用噪声能量增强信号能量的独特检测方法. 近年来, 国内外学者研究的重点主要集中在噪声和参数诱导的随机共振[3−6].

对于随机共振法进行微弱信号检测的研究, 最初主要研究方向是如何通过对噪声强度的调整来实现随机共振. 文献[7, 8]在研究双稳随机共振系统模型时发现, 适当调整噪声强度可以实现微弱周期信号检测; 文献[9—11]对色噪声驱动下调幅波的单模激光随机共振现象及双稳随机共振现象进行了深入的研究, 有效地解决了随机共振系统在较为理想的高斯白噪声及色噪声驱动下的微弱信号检测问题. 随着非线性学科的进一步发展, 文献[12,13]提出了 $\alpha$ 稳定噪声驱动的双稳随机共振系统模型, 将随机共振的研究进一步升华, 由于 $\alpha$ 稳定噪声的脉冲和拖尾特性更加符合工程实践, 使得随机共振法检测微弱信号的硬件实现成为可能. 随着人们对随机共振研究的进一步深入, 文献[14—16]在研究中发现了参数诱导随机共振现象, 深入探究了利用参数诱导实现一阶、二阶双稳以及级联双稳等多种系统模型下的随机共振现象,

* 国家自然科学基金 (批准号: 61071196, 61102131)、教育部新世纪优秀人才支持计划 (批准号: NCET-10-0927)、重庆市杰出青年基金 (批准号: CSTC2011jjjq40002) 和重庆市自然科学基金 (批准号: CSTC2010BB2398, CSTC2010BB2409, CSTC2010BB2411) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: 524680394@qq.com

© 2015 中国物理学会 Chinese Physical Society http://wulixb.iphy.ac.cn

为参数诱导随机共振微弱信号检测的参数选择提供了可靠的依据. 文献[17—19]提出了基于人工鱼群算法、粒子群算法及蚁群算法等多种自适应算法，实现了自适应参数调节随机共振, 并用于机械轴承故障信号检测. 季袁冬等[20]又对幂函数型单势阱随机共振的广义随机共振进行了较为深入的研究, 对更为普遍的单势阱随机共振现象有了初步的认识.

上述的研究方法分别从噪声诱导和参数调节入手研究了随机共振微弱信号检测. 但是大部分的研究工作都是在高斯噪声条件下进行的, 这种理想化的噪声并不能模拟工程实践的实际噪声. 然而, 对于稳定噪声驱动的随机共振现象只研究了双稳系统模型, 幂函数型单稳随机共振现象的研究只停留在白噪声驱动的条件下. 此外, 对于双稳态系统模型, 通过调节系统参数可以改变系统随机共振输出性能, 从双稳系统的势垒高度 $\Delta U = a^2/(4b)$ 可以看出, 增大 $b$ 可以降低势垒高度以提高系统响应速度, 所以在参数诱导随机共振的研究中发现最优系统参数通常是 $b \gg a$. 由此可知, 只要无限增大 $b$ 势垒高度将趋近于0, 并且输入待测信号幅值如果满足 $A \geqslant \sqrt{4a^3/(27b)}$, 双稳系统就会演化为单稳系统. 在对单稳系统的研究过程中发现, 单稳系统在降低双稳系统复杂度的同时还能有效减小双稳系统在处理信号时引起的系统输出信号波形畸变. 由此可见, 在一定程度上, 单稳系统在检测微弱信号时性能优于双稳系统, 且对于Levy稳定噪声驱动的幂函数型单势阱随机共振至今尚未有人研究. 为了更加准确地理解其随机共振特性, 本文在稳定噪声及单势阱系统的研究基础上, 对Levy噪声激励的幂函数型单势阱随机共振特征进行了深入的探讨, 将Levy 噪声引入幂函数型单势阱随机共振系统, 构建了更为接近实际工程应用的随机共振微弱信号检测模型. 分别研究了Levy噪声不同特征指数 $\alpha(0 < \alpha \leqslant 2)$ 及不同对称参数 $\beta(-1 \leqslant \beta \leqslant 1)$ 条件下, 单势阱系统参数 $a$, $b$ 和噪声强度放大系数 $D$ 对系统输出结果的影响, 从而为随机共振应用于工程实践奠定了可靠的基础.

## 2 幂函数型单稳系统模型

一阶非线性郎之万(Langevin)方程[21]是随机共振研究中应用最为广泛的系统模型, 与双稳系统模型相同, 由微弱信号和Levy噪声驱动的幂函数型单稳随机共振系统也具有如下表达式:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x} = s(t) + D\xi(t), \tag{1}$$

其中, $U(x)$ 为幂函数型单势阱系统势函数, $s(t)$ 为输入待测微弱信号, $\xi(t)$ 为输入Levy噪声, $D$ 为噪声强度放大系数.

### 2.1 幂函数型单势阱

取经典简谐势阱系统[22], 其势函数 $U(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$, 将其推广为更为普遍的幂函数型单势阱 $U(x) = \frac{a}{b}|x|^b$, 其势函数如图1所示. 在对幂函数型单势阱随机共振系统的研究中发现, 当系统参数 $0 < b < 2$ 时, 将出现广义随机共振, 即随着 $b$ 的变化, 系统输出发生非单调变化. 由于广义随机共振过于复杂, 本文只研究 $b \geqslant 2$ 情况下Levy噪声驱动的幂函数型单势阱随机共振系统. 为了数值统计方便并且避免广义随机共振的发生, 本文所研究的改进后的单稳系统的势函数一律具有以下幂函数形式:

$$U(x) = \frac{a}{b+2}|x|^{b+2}, \tag{2}$$

其中, $a$, $b$ 分别为大于零的可调系统参数. 由复合函数求导法则可得

$$\begin{aligned} U'(x) &= \left(\frac{a}{b+2}|x|^{b+2}\right)' \\ &= a|x|^{b+1}\left(|x|\right)' \\ &= ax|x|^b. \end{aligned} \tag{3}$$

其中, 值得注意的是当 $x = 0$ 时, $(|x|)'$ 不存在导数, 因此, 引入弱导数定义进行求解[23], 即 $(|0|)' = 0$.

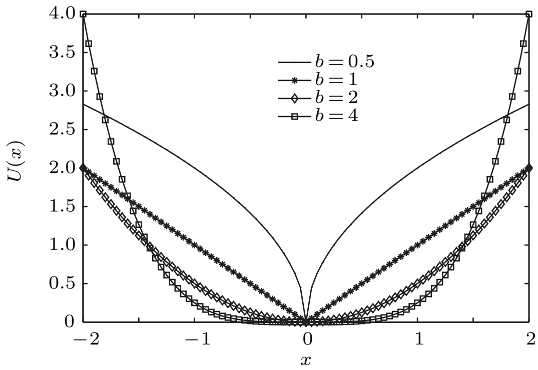


图1 幂函数型单稳系统势函数 ($a = 1$)

Fig. 1. The potential function of power function type monostable system ($a = 1$).

不同系统参数条件下$U(x)$及其导数$U'(x)$如图2(a)和图2(b)所示. 从图2可以看出, $b$越大, 势阱坡度就越陡. 将(3)式代入(1)式后幂函数型单稳随机共振系统Langevin方程可写成如下形式:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-ax|x|^{b}+s(t)+D\xi(t). \tag{4}$$

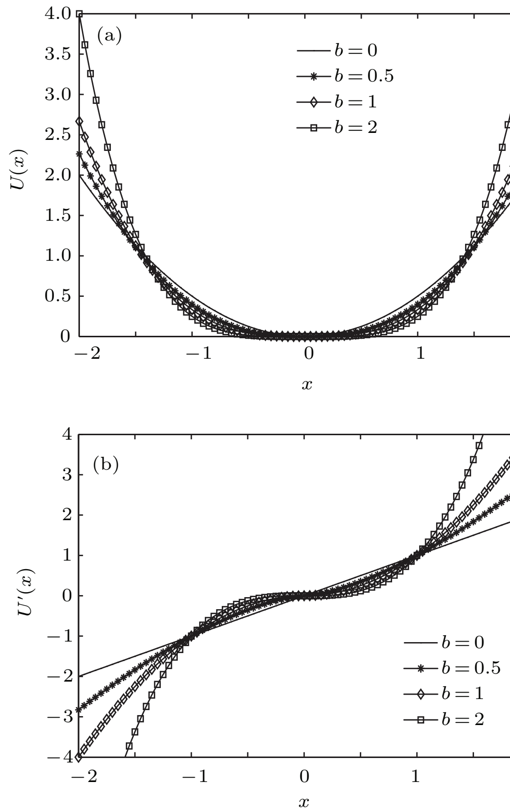


图2 改进后单稳系统势函数及其导数($a=1$)

Fig. 2. The potential function and its derivative of improved monostable system ($a=1$).

### 2.2 Levy噪声特征函数及产生方法

Levy噪声又叫$\alpha$稳定噪声[24,25], 是芬兰数学家Lindburg-Levy在研究广义中心极限定理时提出. 由于Levy噪声的分布函数和概率密度函数都不具有显式表达式, 通常用特征函数来表达Levy噪声的分布情况, 其特征函数表达式如下:

$$\varphi(t)=\begin{cases}\exp\left[-\sigma|t|\left(1+\mathrm{i}\beta\frac{2}{\pi}\,\mathrm{sign}(t)\log|t|\right)+\mathrm{i}\mu t\right], \\ \quad\alpha=1, \\ \exp\left[-\sigma^{\alpha}|t|^{\alpha}\left(1-\mathrm{i}\beta\,\mathrm{sign}(t)\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right)+\mathrm{i}\mu t\right], \\ \quad\alpha\neq 1,\end{cases} \tag{5}$$

其中, $\alpha\in(0,2]$为特征指数, $\alpha$越小, 噪声的脉冲和拖尾特性越明显, 并且当$\alpha=1$时为柯西分布, $\alpha=2$时为高斯分布; $\beta\in[-1,1]$为对称参数, 决定噪声分布的对称性, 即当$\beta=0$时分布是对称的; $\sigma\in[0,+\infty)$为分散系数, 表示Levy分布的范围及离散程度; $\mu\in(-\infty,+\infty)$为位置参数, 用于确定分布中心. 记Levy分布为$S_{\alpha}(\sigma,\beta,\mu)$, 本文统一采用Chambers-Mallows-Stuck (CMS)算法[26,27]得到Levy分布的随机变量$X$. 当$\alpha\neq 1$时,

$$X=D_{\alpha,\beta,\sigma}\frac{\sin\left(\alpha\left(V+C_{\alpha,\beta}\right)\right)}{\left(\cos V\right)^{1/\alpha}}\times\left[\frac{\cos(V-\alpha(V+C_{\alpha,\beta}))}{W}\right]^{(1-\alpha)\alpha}+\mu, \tag{6}$$

其中, $V$服从区间为$(-\pi/2,\pi/2)$的均匀分布; $W$服从均值为1的指数分布; $C_{\alpha,\beta}$和$D_{\alpha,\beta,\sigma}$为常数, 并有如下定义:

$$C_{\alpha,\beta}=\frac{\arctan\left(\beta\tan\left(\pi\alpha/2\right)\right)}{\alpha}, \tag{7}$$

$$D_{\alpha,\beta,\sigma}=\sigma\left[\cos\left(\arctan\left(\beta\tan\left(\pi\alpha/2\right)\right)\right)\right]^{-1/\alpha}. \tag{8}$$

当$\alpha=1$时,

$$X=\frac{2\sigma}{\pi}\left[\left(\frac{\pi}{2}+\beta V\right)\tan V-\beta\ln\left(\frac{(\pi/2)\,W\cos V}{\pi/2+\beta V}\right)\right]+\mu. \tag{9}$$

利用(6)和(9)式产生不同的$\alpha$特征指数对应的Levy噪声如图3. 由图3可以看出: 特征指数$\alpha$越小, 噪声幅值越大且尖峰脉冲特征越明显; 随着特征指数$\alpha$不断增大, Levy噪声最终在$\alpha=2$时退化高斯白噪声.

### 2.3 幂函数型单势阱随机共振系统数值解析方法

为了模拟方程(4)中布朗粒子运动轨迹, 本文采用CMS算法与四阶Runge-Kutta算法相结合对其进行求解, 具体算法如下:

$$k_1=h[-ax(n)abs(x(n))^{b}+s(n)],$$

$$k_2=h\left[-a\left(x(n)+\frac{k_1}{2}\right)abs\left(x(n)+\frac{k_1}{2}\right)^{b}+s(n)\right],$$

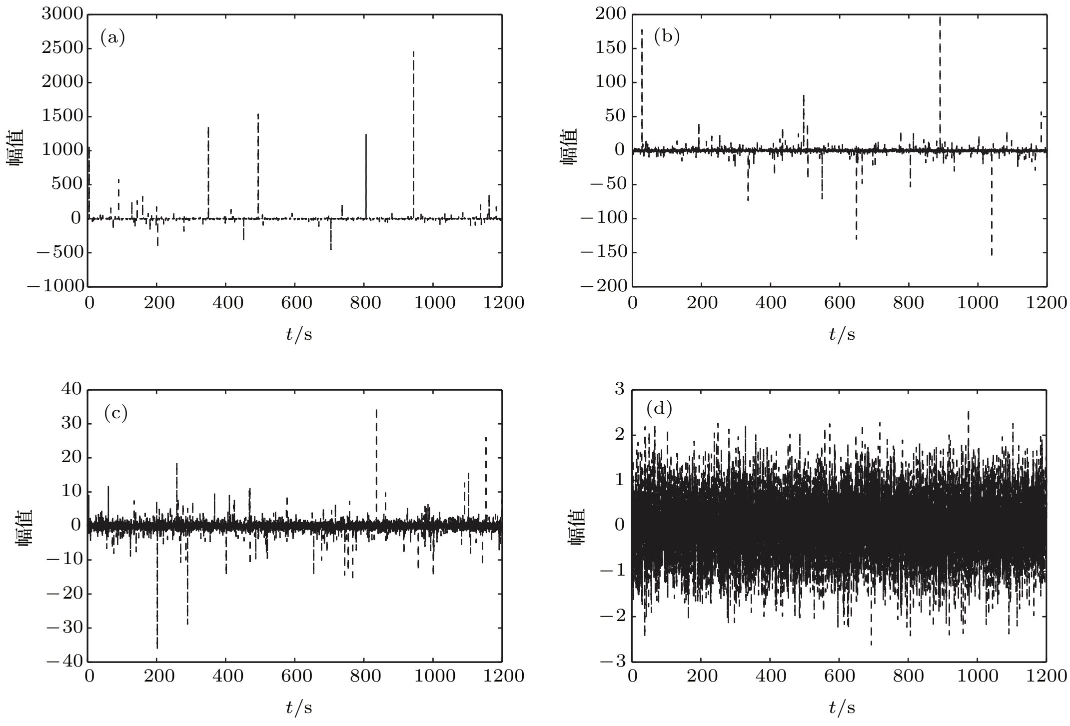


图3 不同特征指数 $\alpha$ 对应的 Levy 噪声 ($\beta=0, \sigma=1, \mu=0$) (a) $\alpha=1$; (b) $\alpha=1.3$; (c) $\alpha=1.6$; (d) $\alpha=2$

Fig. 3. The Levy noise under different characteristic index $\alpha$ values ($\beta=0, \sigma=1, \mu=0$): (a) $\alpha=1$; (b) $\alpha=1.3$; (c) $\alpha=1.6$; (d) $\alpha=2$.

$$k_3 = h\Big[-a\Big(x(n)+\frac{k_2}{2}\Big)abs\Big(x(n)+\frac{k_2}{2}\Big)^b + s(n+1)\Big],$$

$$k_4 = h\big[-a(x(n)+k_3)abs(x(n)+k_3)^b + s(n+1)\big],$$

$$x(n+1) = x(n)+\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4) + h^{\frac{1}{\alpha}}\xi(n), \tag{10}$$

其中, $s(n)$ 和 $x(n)$ 分别表示输入信号和输出信号第 $n$ 次采样值, $\xi(n)$ 表示 Levy 噪声第 $n$ 次采样值, $h$ 为采样间隔. 同时, 由于特征指数 $\alpha$ 越小, 噪声幅值越大, 经过长时间的粒子跳跃路径很快会趋于无穷大, 所以需要对输出的数值采样信号 $x(n)$ 进行截断[28,29], 即当 $|x(n)|>10$, 取 $x(n)=\mathrm{sign}\,(x(n))\times 10$.

### 2.4 系统性能衡量指标

在众多衡量系统性能的指标当中系统输出信噪比 $SNR_{\text{out}}$ 的应用最为广泛, 本文采用更能反映随机共振系统对输入信噪比 $SNR_{\text{in}}$ 改善作用的信噪比增益 $SNRI$[30] 作为衡量指标, 且 $SNRI$ 定义为

$$SNRI = \frac{S_{\text{out}}(f_0)/\xi_{\text{out}}(f_0)}{S_{\text{in}}(f_0)/\xi_{\text{in}}(f_0)}. \tag{11}$$

只有当信噪比增益 $SNRI$ 大于1时, 才能表明随机共振系统对输入待测微弱信号有明显的改善作用, 并且信噪比增益 $SNRI$ 越大表明系统的性能越好. (11) 式中, $S_{\text{in}}(f_0)$ 和 $S_{\text{out}}(f_0)$ 表示随机共振系统输入和输出信号的功率; $\xi_{\text{in}}(f_0)$ 和 $\xi_{\text{out}}(f_0)$ 表示随机共振系统输入和输出 Levy 噪声的功率. 为提高数据的可靠性, 本文所有仿真实验均采用 50 次平均信噪比增益 $M$-$SNRI$ 来衡量幂函数型单势阱随机共振系统改善的性能, 其定义如下:

$$M\text{-}SNRI = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} SNRI_i, \tag{12}$$

其中, $n$ 表示仿真实验次数, $SNRI_i$ 表示第 $i$ 次仿真实验系统信噪比增益.

## 3 Levy 噪声驱动下的幂函数型单稳系统中的随机共振现象

为便于后续数值仿真分析, 本文通过平均信噪比增益 $M$-$SNRI$ 为衡量指标的自适应算法寻找出最优系统参数对. 自适应算法具体实施步骤如下:

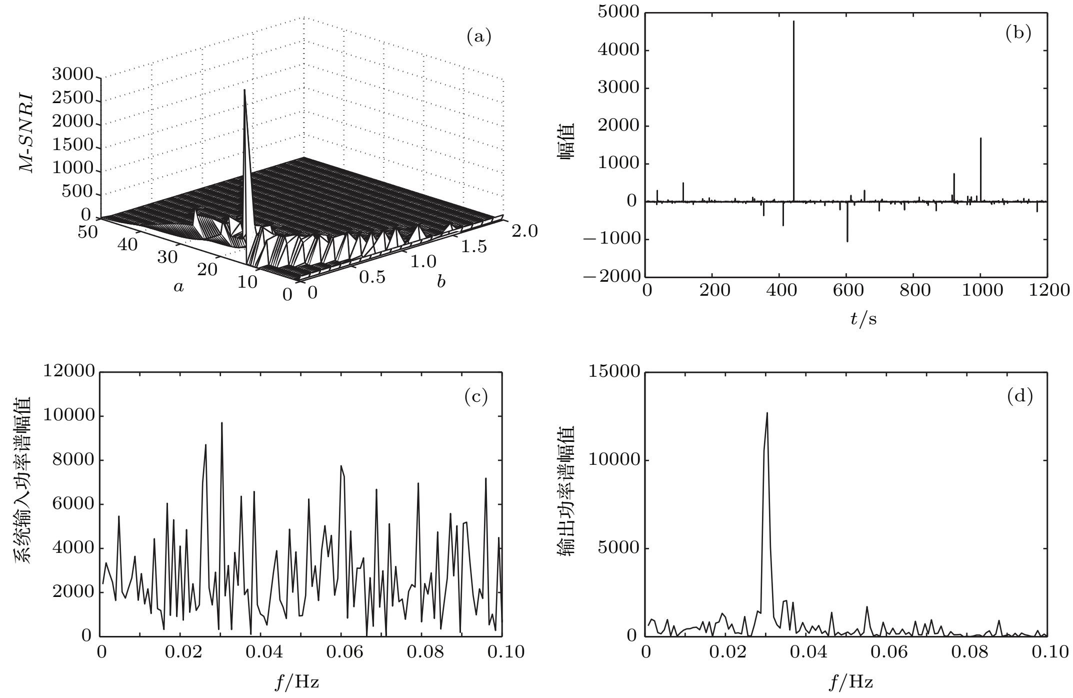


图4 (a) 自适应随机共振仿真结果图; (b) 输入信号时域图; (c) 输入信号功率谱图; (d) 输出信号功率谱图

Fig. 4. (a) Simulation results of adaptive stochastic resonance; (b) the time domain diagram of input signal; (c) the power spectrum diagram of input signal; (d) the power spectrum diagram of output signal.

1) 初始化待测微弱信号及Levy噪声各个参数, 设置单势阱系统参数初始值$a = b = 0$, $a$的步长和搜索范围分别为0.1, $(0, 50]$, $b$的步长和搜索范围分别为0.01, $(0, 2]$;

2) 将待测微弱信号输出幂函数型单稳随机共振系统, 设置初始信噪比增益$OM\text{-}SNRI = 0$, $a = a + 0.1$, $b = b + 0.01$;

3) 计算系统输出$M\text{-}SNRI$并记录, 如果$M\text{-}SNRI > OM\text{-}SNRI$, 则令$OM\text{-}SNRI = M\text{-}SNRI$并返回步骤2, 反之$M\text{-}SNRI$为最佳输出平均信噪比增益;

4) 记录最佳$M\text{-}SNRI$对应的单势阱系统参数$a$, $b$, 并代入系统求解.

取如下微弱周期信号

$$s(t) = A\cos(2\pi f t), \tag{13}$$

其中, 信号幅值$A = 0.8$, 信号频率$f = 0.03$ Hz; Levy噪声参数分别为$\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\sigma = 1$, $\mu = 0$, $D = 0.3$; 以$M\text{-}SNRI$为系统性能衡量指标, 采用自适应定步长搜索的方法找出系统最佳参数对为$a = 12.6$, $b = 0.04$; 采样频率$f_s = 5$ Hz; 步长$h = 0.2$; 对$N = 10000$点数据进行计算, 实验结果如图4所示. 图4 (a) 是基于$M\text{-}SNRI$算法的自适应随机共振三维仿真图; 图4 (b) 是混有Levy 噪声的输入信号时域图, 由于噪声具有强脉冲和拖尾特征, 信号已经完全被淹没; 图4 (c) 是输入含噪微弱信号功率谱图, 同样不能提取有用信息; 将混有Levy噪声的微弱信号输入幂函数型单稳随机共振系统, 输出功率谱如图4 (d). 由图4 (d) 可以看出, 在$f = 0.03$ Hz处出现了谱峰值特征. 因此, 通过改变系统参数, 能够使得幂函数型单稳系统产生随机共振, 实现了Levy 噪声环境中微弱周期信号的检测.

接下来将详细研究不同Levy噪声分布环境下, 即不同特征指数$\alpha$, 对称参数$\beta$, 系统参数$a$, $b$以及噪声强度$D$与幂函数型单稳随机共振系统输出效应的作用规律.

### 3.1 不同特征指数$\alpha$作用下的随机共振

待测微弱周期信号及采样频率不变, 取Levy噪声特征指数$\alpha$分别为0.7, 1和1.3, $\beta = 0$, $\sigma = 1$, $\mu = 0$, $D = 0.3$. 根据自适应最优参数对结果确定固定参数.

#### 3.1.1 $M\text{-}SNRI$在不同特征指数$\alpha$条件下随幂函数型单势阱参数$a$的变化

固定参数$b = 0.04$进行仿真实验, 得到$M\text{-}SNRI$随参数$a$的变化如图5所示. 参数诱导随机

共振的实质取决于系统响应时间(即响应速度), 而不是势函数的双势阱形态. 因此, 在单稳系统中粒子不需要越过势垒完成跃迁, 而是在响应时间内能否穿过零点. 从图5(a)可以看出, 当$a$取值相对较小时, 由于系统响应时间较短, 粒子不能在有效时间内完成零点的穿越, 因此系统输出性能下降; 当$a$的值大概在区间$[12, 47]$内时, 随着系统响应时间的增大, 粒子完成零点穿越, 即产生随机共振. 在此区间内随着$a$的增加$M\text{-}SNRI$出现多个极大值点, 但是整体呈现先增大后减小的趋势, 并且当$a = 12.6$时, 系统达到最佳响应时间, $M\text{-}SNRI$也达到最大值; 随着$a$的进一步增加, 系统响应时间过长, 系统、噪声及输入信号的最佳匹配关系逐渐被打破, 系统性能大幅下降且不能再实现随机共振. 此外还发现, 当$\alpha$取值不同时, $M\text{-}SNRI$较好的区间大致相同, 且当$\alpha = 1$时, 系统的$M\text{-}SNRI$最大. 由图5(b)和图5(c)可知: 当$\alpha < 1$时, $\alpha$越小, $M\text{-}SNRI$越小; 当$\alpha > 1$时, $\alpha$越大, $M\text{-}SNRI$越小.

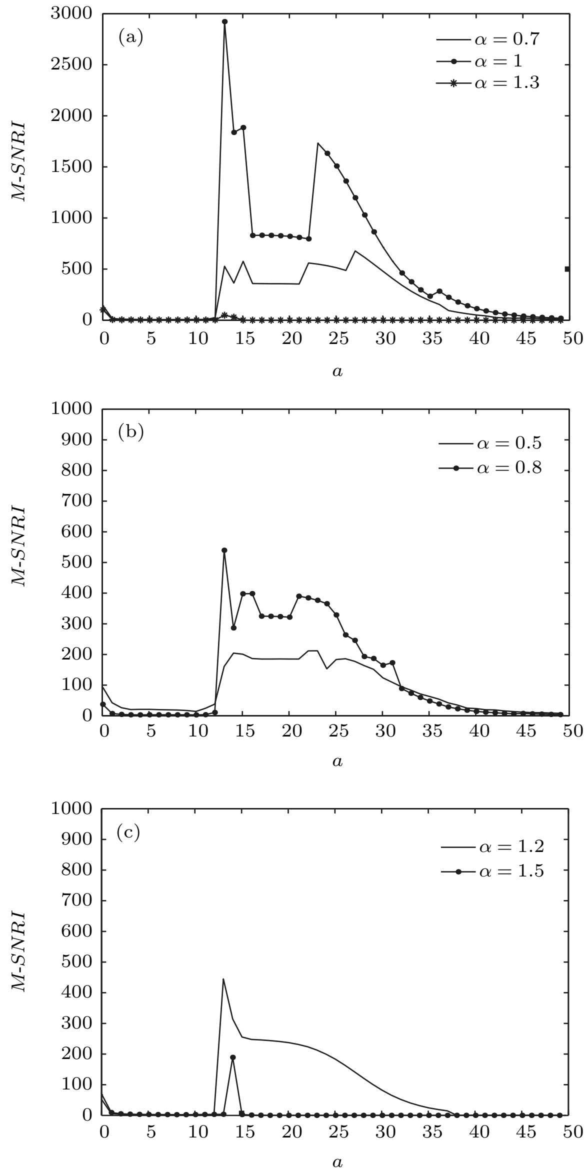


图5 (a)不同$\alpha$取值时$M\text{-}SNRI$随$a$的变化; (b)当$\alpha < 1$时$M\text{-}SNRI$随$a$的变化; (c)当$\alpha > 1$时$M\text{-}SNRI$随$a$的变化

Fig. 5. (a) The $M\text{-}SNRI$ changing with $a$ under different $\alpha$ values; (b) the $M\text{-}SNRI$ changing with $a$ when $\alpha<1$; (c) the $M\text{-}SNRI$ changing with $a$ when $\alpha > 1$.

### 3.1.2 $M\text{-}SNRI$在不同特征指数$\alpha$条件下随幂函数型单势阱参数$b$的变化

固定参数$a = 12.6$进行仿真实验, 得到$M\text{-}SNRI$随参数$b$的变化如图6所示. 从图6(a)可以看出, 随着参数$b$的不断增大, $M\text{-}SNRI$表现出先增大后减小, 最后趋于零. 为了更好地观测数据结果, 从图6(a)的放大图6(b)中可以看出, 当$b = 0.04$时, $M\text{-}SNRI$达到最佳值, 且随机共振区间大致为$b \in (0, 0.38]$. 从以上分析可以得出单稳系统势函数非线性项阶数$b$的改变对系统输出性能的影响远大于系统参数$a$的改变.

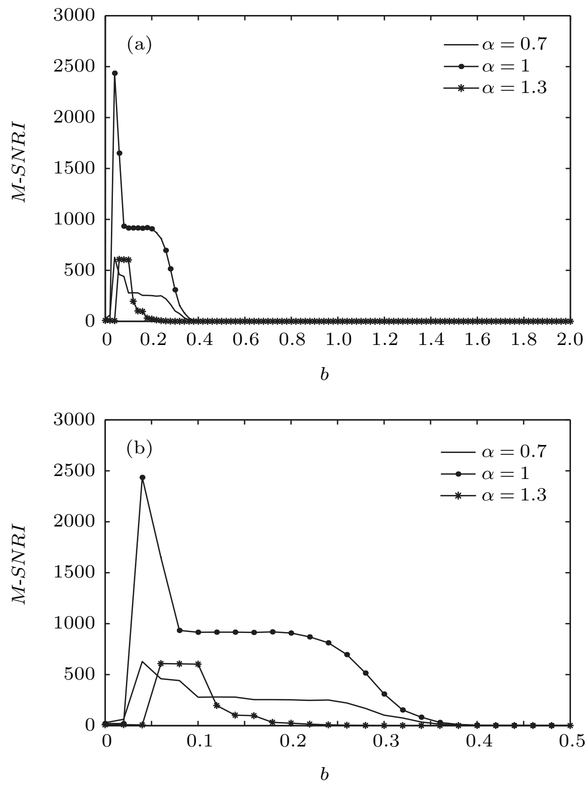


图6 (a)不同$\alpha$取值时$M\text{-}SNRI$随$b$的变化; (b)不同$\alpha$取值时$M\text{-}SNRI$随$b$变化的局部放大图

Fig. 6. (a) The $M\text{-}SNRI$ changing with $b$ under different $\alpha$ values; (b) magnification of the $M\text{-}SNRI$ changing with $b$ under different $\alpha$ values.

#### 3.1.3　$M$-$SNRI$在不同特征指数$\alpha$条件下随Levy噪声强度放大系数$D$的变化

固定参数$a = 12.6$, $b = 0.04$进行仿真实验, 得到$M$-$SNRI$随噪声强度放大系数$D$的变化如图7所示. 从图7可以看出, 不同特征指数$\alpha$取值下$M$-$SNRI$都有最大值出现, 区别在于当$\alpha > 1$时$M$-$SNRI$随噪声强度放大系数$D$的变化较为平缓, 反之当$\alpha \leqslant 1$时$M$-$SNRI$在$D$较小的区间内变化很快, 随后表现为更加平稳减小的趋势, 但整体都表现出先增大后逐渐减小的趋势. 由此说明存在最佳噪声强度使得系统表现出较好的随机共振输出.

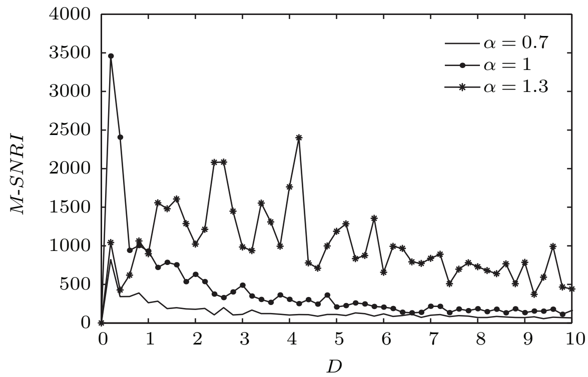


图7　不同$\alpha$取值时$M$-$SNRI$随噪声强度放大系数$D$的变化

Fig. 7. The $M$-$SNRI$ changing with the intensity amplification factor $D$ under different $\alpha$ values.

### 3.2　不同对称参数$\beta$作用下的随机共振

待测微弱周期信号及采样频率仍保持不变, 取Levy噪声对称参数$\beta$分别为$-1$, 0和1, $\alpha = 1$, $\sigma = 1$, $\mu = 0$, $D = 0.3$; 系统参数$a = 12.6$, $b = 0.04$.

#### 3.2.1　$M$-$SNRI$在不同对称参数$\beta$条件下随幂函数型单势阱参数$a$的变化

固定参数$b = 0.04$进行仿真实验, 得到$M$-$SNRI$随参数$a$的变化如图8所示. 从图8可以看出, 与不同特征指数$\alpha$条件下$M$-$SNRI$随系统参数$a$变化规律相同, 呈现出随着参数$a$出现先增大后减小的趋势, 并且有多个峰值出现. 进一步观察不同对称参数$\beta$条件下的仿真曲线图可以发现, 当$\beta$取值不同时产生随机共振的取值区间基本保持不变. 此外, 通过纵向观察可以发现, 对于同一产生随机共振的取值区间, $\beta = 0$时的$M$-$SNRI$要明显高于$\beta \neq 0$时的$M$-$SNRI$.

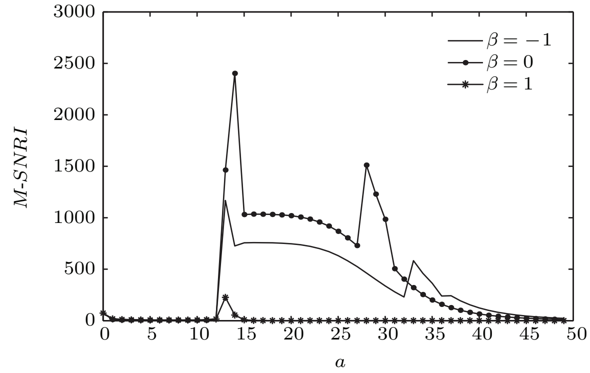


图8　不同$\beta$取值时$M$-$SNRI$随$a$的变化

Fig. 8. The $M$-$SNRI$ changing with $a$ under different $\beta$ values.

#### 3.2.2　$M$-$SNRI$在不同对称参数$\beta$条件下随幂函数型单势阱参数$b$的变化

固定参数$a = 12.6$进行仿真实验, 得到$M$-$SNRI$随参数$b$的变化如图9所示. 通过对图9(a)及其局部放大图9(b)观察, 可知在不同对称参数$\beta$下条件下$M$-$SNRI$随参数$b$的变化规律也与不同特征指数$\alpha$条件下$M$-$SNRI$随参数$b$的变化规律相同, 并且产生的随机共振区间也大致相同. 纵向观察, 仍然可以发现对于同一随机共振区间, $\beta = 0$时的系统改善性能要明显高于$\beta \neq 0$时.

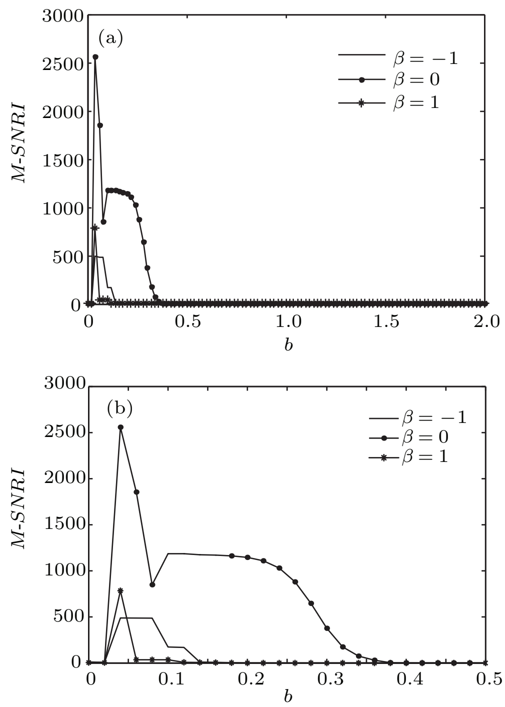


图9　(a)不同$\beta$取值时$M$-$SNRI$随$b$的变化; (b)不同$\beta$取值时$M$-$SNRI$随$b$的变化局部放大图

Fig. 9. (a) The $M$-$SNRI$ changing with $b$ under different $\beta$ values; (b) magnification of the $M$-$SNRI$ changing with $b$ under different $\beta$ values.

#### 3.2.3　*M-SNRI* 在不同对称参数 $\beta$ 条件下随Levy噪声强度放大系数 $D$ 的变化

固定参数 $a = 12.6$, $b = 0.04$ 进行仿真实验, 得到 *M-SNRI* 随噪声强度放大系数 $D$ 的变化如图10所示. 从图10可以看出, 与不同特征指数 $\alpha$ 条件取值下 *M-SNRI* 变化规律大致相同, 整体都表现为先增大后逐渐减小的趋势. 区别在于当对称参数 $\beta$ 取值不同时, *M-SNRI* 随噪声强度放大系数 $D$ 的变化规律都表现为在 $D$ 很小的区间内快速变化, 随后很快进入非常平稳减小的趋势. 再一次说明存在最佳噪声强度使得系统表现出较好的随机共振输出.

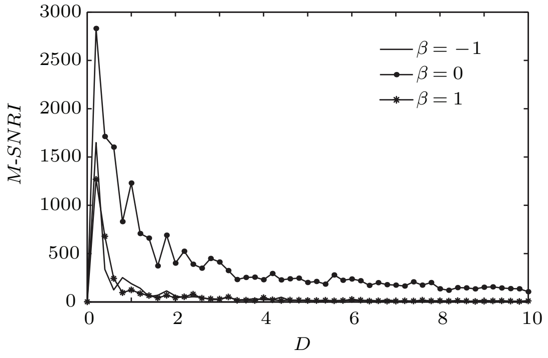


图10　不同 $\beta$ 取值时 *M-SNRI* 随噪声强度放大系数 $D$ 的变化

Fig. 10. The *M-SNRI* changing with the intensity amplification factor $D$ under different $\beta$ values.

### 3.3　不同系统参数 $a$ 和 $b$ 作用下的随机共振

待测微弱周期信号及采样频率仍保持不变, 取Levy噪声特征指数和对称参数分别为 $\alpha = 1$, $\beta = 0$, 其余噪声分布参数为 $\sigma = 1$, $\mu = 0$, $D = 0.3$; 系统参数取值分别为 $a = 15, 25, 35$, $b = 0.05, 0.15, 0.3$. *M-SNRI* 在不同参数条件下变化的曲线如图11. 从图11(a)可以看出, 随着参数 $b$ 的增加, 系统产生随机共振的区间呈现出左移且缩小的趋势. 纵向观察发现, 随着参数 $b$ 的变大, *M-SNRI* 随参数 $a$ 变化的曲线也更加缓慢, 同时从图11(b)也可以发现同一现象.

## 4　结　论

本文针对幂函数型单稳系统研究了Levy噪声激励下的随机共振现象. 在Levy噪声分布参数 $\alpha$, $\beta$ 不同取值的条件下, 从系统参数诱导和噪声诱导两个不同方面研究了 *M-SNRI* 随系统参数 $a$(或 $b$)

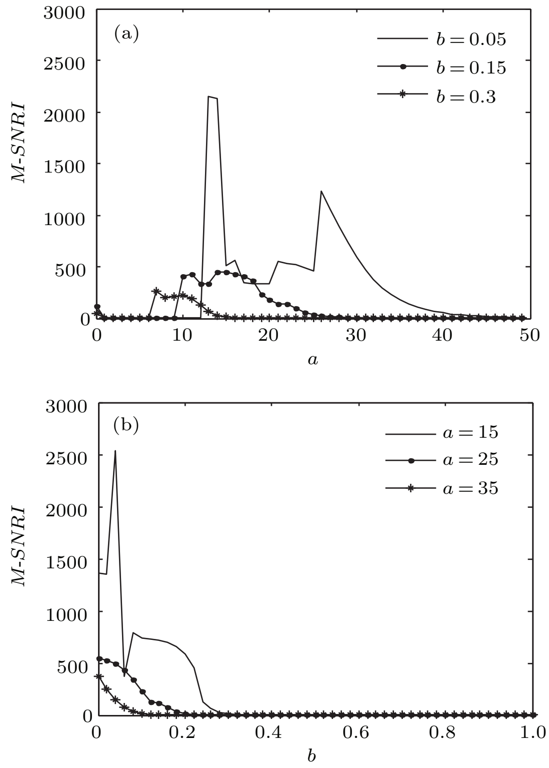


图11　(a) 不同 $b$ 取值时 *M-SNRI* 随 $a$ 的变化; (b) 不同 $a$ 取值时 *M-SNRI* 随 $b$ 的变化

Fig. 11. (a) The *M-SNRI* changing with $a$ under different $b$ values; (b) the *M-SNRI* changing with $b$ under different $a$ values.

和噪声强度放大系数 $D$ 的变化规律. 通过研究得出如下结论: 1) 在不同的噪声分布参数条件下, 都可以通过调节噪声强度放大系数 $D$ 和系统参数 $a$(或 $b$) 来实现随机共振; 2) 对于任意一个确定的系统参数 $a$(或 $b$) *M-SNRI* 都会出现整体先增大后减小的峰值区间, 且随机共振区间不随特征指数 $\alpha$ 和对称参数 $\beta$ 的改变而改变; 3) 在不同特征指数 $\alpha$ 条件下, 在任意系统参数和噪声强度放大系数的随机共振区间中, 特征指数 $\alpha = 1$ 时, 系统对微弱信号的改善作用最好; 4) 在不同对称参数 $\beta$ 条件下, 在任意系统参数和噪声强度放大系数的随机共振区间中, 特征指数 $\beta = 0$ 时, 系统对微弱信号的改善作用最好; 5) 在Levy噪声分布参数相同的条件下, 不同固定参数 $a$(或 $b$) 的条件下, *M-SNRI* 随着参数 $b$(或 $a$) 的变化都表现为随着固定参数取值的增大随机共振区间左移缩小的现象. 这些结论对幂函数型单稳系统如何实现随机共振的参数选择提供了可靠的基础保证, 有利于其在工程实践中的应用. 本文研究了非广义随机共振情况下Levy噪声驱动的幂函数型单势阱随机共振规律, 未来将集中研究广义随机共振参数条件下的共振规律, 以及含

有Levy噪声的轴承故障信号检测.

## 参考文献

[1] Beniz R, Sutera A, Vulplana A 1981 *Physica A* **14** 453
[2] Beniz R, Parisi G, Srutera A, Vulplana A 1982 *Tellus* **34** 11
[3] Leng Y G, Leng Y S, Wang T Y, Guo Y 2006 *J. Sound Vib.* **292** 788
[4] Lin L F, Tian Y, Ma H 2014 *Chin. Phys. B* **23** 080503
[5] Lemarchand A, Gorecki J, Gorecki A, Nowakowski B 2014 *Phys. Rev. E* **89** 022916
[6] Tang Y, Gao H J, Zou W, Kurths J 2013 *Phys. Rev. E* **87** 062920
[7] Wang K K, Liu X B 2014 *Chin. Phys. B* **23** 010502
[8] Liu H B, Wu D W, Dai C J, Mao H 2013 *Acta Elec. Sin.* **41** 9 (in Chinese) [刘海波, 吴德伟, 戴传金, 毛虎 2013 电子学报 **41** 9]
[9] Zhang L Y, Jin G X, Cao L, Wang Z Y 2012 *Chin. Phys. B* **21** 120502
[10] Yang J H, Liu X B 2010 *Chin. Phys. B* **19** 050504
[11] Zhao L, Luo X Q, Wu D, Zhu S Q, Gu J H 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 040503
[12] Jiao S B, Ren C, Li P H, Zhang Q, Xie G 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 070501 (in Chinese) [焦尚彬, 任超, 李鹏华, 张青, 谢国 2014 物理学报 **63** 070501]
[13] Zhang W Y, Wang Z L, Zhang W D 2009 *Cont. Eng. Chin.* **16** 639 (in Chinese) [张文英, 王自力, 张卫东 2009 控制工程 **16** 639]
[14] Li P, Nie L R, Huang Q R, Sun X X 2012 *Chin. Phys. B* **21** 050503
[15] Leng Y G, Leng Y S, Guo Y 2006 *J. Sound Vib.* **292** 788
[16] Leng Y G, Wang T Y 2007 *Mech. Sys. Signal Process.* **21** 138
[17] Zhu W N, Lin M 2014 *J. Vib. Shock* **33** 143 (in Chinese) [朱维娜, 林敏 2014 振动与冲击 **33** 143]
[18] Lei Y G, Han D, Lin J, He Z J, Tan J Y 2012 *J. Mech. Eng.* **48** 63 (in Chinese) [雷亚国, 韩冬, 林京, 何正嘉, 谭继勇 2012 机械工程学报 **48** 63]
[19] Li J M, Chen X F, He Z J 2011 *J. Mech. Eng.* **47** 58 (in Chinese) [李继猛, 陈雪峰, 何正嘉 2011 机械工程学报 **47** 58]
[20] Ji Y D, Zhang L, Luo M K 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 164302 (in Chinese) [季袁冬, 张路, 罗懋康 2014 物理学报 **63** 164302]
[21] Doiron B, Lindner B, Longtin A, Maler L, Bastian J 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 048101
[22] Gitterman M 2005 *Physica A* **352** 309
[23] Gilbarg D, Trudinger N 2001 *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order* (Berlin: Springer) pp149, 152
[24] Xu B H, Zeng L Z, Li J L 2007 *Sound Vib.* **303** 255
[25] Dybiec B, Gudowska-Nowak E 2006 *Acta Phys. Polo. B* **37** 1479
[26] Chambers J M 1976 *J. Am. Stat. Assoc.* **71** 340
[27] Weron A, Weron R 1995 *Lec. Notes Phys.* **457** 379
[28] Weron R 1996 *Statist. Prob. Lett.* **28** 165
[29] Gong C, Wang Z L 2008 *MATLAB Language Commonly Used Algorithm for Assembly* (Beijing: Publishing House of Electronics Industry) (in Chinese) [龚纯, 王正林 2008 MATLAB 语言常用算法程序集 (北京: 电子工业出版社) ]
[30] Wan P, Zhan Y J, Li X C, Wang Y H 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 040502 (in Chinese) [万频, 詹宜巨, 李学聪, 王永华 2011 物理学报 **60** 040502]

# Characteristic analysis of power function type monostable stochastic resonance with Levy noise*

Zhang Gang[1)2)] Hu Tao[1)†] Zhang Tian-Qi[1)2)]

1) (*School of Communication, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China*)

2) (*Key Laboratory of Signal and Information Processing of Chongqing, Chongqing 400065, China*)

( Received 6 July 2015; revised manuscript received 1 August 2015 )

**Abstract**

In this paper, the Levy noise is combined with a power function type monostable stochastic resonance system for the first time. In order to ensure the reliability of the experimental data, the average signal-to-noise ratio gain is regarded as an index to investigate the stochastic resonance phenomenon stimulated by Levy noise. Potential function form of the monostable system and the method of generating Levy noise are presented in detail. The pulse characteristic and smear characteristic of Levy noise are also presented in detail. The laws for the resonant output of monostable system, governed by parameters $a$ and $b$, the intensity amplification factor $D$ of Levy noise, are explored under different values of characteristic index $\alpha$ and symmetry parameter $\beta$ of Levy noise. Results show that no matter whether it is under any different characteristic index $\alpha$ or symmetry parameter $\beta$ of Levy noise, the weak signal can be detected by adjusting the system parameters $a$ and $b$. The intervals of $a$ and $b$ which can induce stochastic resonances are multiple, and do not change with $\alpha$ nor $\beta$. Moreover, the same rule is founded which by adjusting the intensity amplification factor $D$ of Levy noise can also realize synergistic effect when studying the noise-induced stochastic resonance, and the interval of $D$ does not change with $\alpha$ nor $\beta$; the best value of characteristic index is $\alpha = 1$ under any system parameter, and the best value of symmetry parameter is $\beta = 1$ under any system parameter. So, the system performance is best when $\alpha = 1$ and $\beta = 1$. Finally, the interaction relationship between system parameters $a$ and $b$ is investigated, and it is found that the interval of $a$ or $b$ will change with $b$ or $a$ when characteristic index $\alpha$, symmetry parameter $\beta$ and the intensity amplification factor $D$ of Levy noise are fixed. These results will contribute to reasonably choosing the system parameters and intensity amplification factor of power function type monostable stochastic resonance system under Levy noise, and provide a reliable basis for practical engineering application of weak signal detection by stochastic resonance.

**Keywords:** Levy noise, power function type monostable system, stochastic resonance, average signal-to-noise ratio gain

**PACS:** 05.40.–a, 05.45.–a, 05.40.Ca, 05.40.Fb **DOI:** 10.7498/aps.64.220502

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61071196, 61102131), the Program for New Century Excellent Talents in University of Ministry of Education of China (Grant No. NCET-10-0927), the Outstanding Youth Fund of Chongqing, China (Grant No. CSTC2011jjjq40002), and the Natural Science Foundation of Chongqing, China (Grant Nos. CSTC2010BB2398, CSTC2010BB2409, CSTC2010BB2411).

† Corresponding author. E-mail: 524680394@qq.com