

颗粒介质弹性的弛豫

孙其诚 刘传奇 周公旦

Relaxation of granular elasticity

Sun Qi-Cheng Liu Chuan-Qi Gordon G D Zhou

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 236101 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.236101

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.236101>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I23>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

La<sup>3+</sup> 存在形式对白云鄂博稀选尾矿微晶玻璃性能的影响

Effect of existence form of La<sup>3+</sup> on the properties of the Bayan Obo Mine tailing glass ceramics

物理学报.2015, 64(19): 196201 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.196201>

铁钛共掺强韧化蓝宝石晶体的研究

A method to strengthen and toughen Sapphire by codoping of Fe/Ti ions

物理学报.2013, 62(6): 066201 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.066201>

具有形状记忆效应的新型智能阻尼材料及其热弹性力学性能研究

Research on the shape memory effect and thermalelasticity of a novel intellectual damping material

物理学报.2012, 61(16): 168102 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.168102>

<100> LiF 的低压冲击响应和 1550 nm 波长下的窗口速度修正

Elastic-plastic response of shocked <100> LiF and its window correction at 1550 nm wavelength

物理学报.2012, 61(15): 156202 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.156202>

# 颗粒介质弹性的弛豫\*

孙其诚<sup>1)†</sup> 刘传奇<sup>1)</sup> 周公旦<sup>2)</sup>

1) (清华大学水沙科学与水利水电工程国家重点实验室, 北京 100084)

2) (中国科学院水利部成都山地灾害与环境研究所, 成都 610041)

(2015年4月13日收到; 2015年7月22日收到修改稿)

颗粒介质是复杂的多体相互作用体系, 其弹性源自内部的力链结构, 弹性能量处在亚稳态, 具有复杂的弛豫行为. 在常规作用下, 颗粒介质往往呈现明显的弹性弛豫. 应力松弛是应变恒定时应力的衰减现象, 弹性弛豫是应力松弛的主要原因. 在前期工作基础上, 从弹性势能面和双颗粒温度热力学角度分析了弹性弛豫的机理, 量化了弹性应力演化不可逆过程; 基于双颗粒温度热力学计算得到了弹性能、颗粒温度和应力的演化, 其中应力松弛的计算结果与实验结果基本一致, 讨论了颗粒温度初值和输运系数的影响. 指出, 开展力链结构及其动力学研究是揭示宏观弹性弛豫机理的关键.

**关键词:** 颗粒介质, 弹性, 弛豫, 热力学

**PACS:** 61.43.-j, 62.20.-x, 81.05.Rm, 05.70.-a

**DOI:** 10.7498/aps.64.236101

## 1 引言

颗粒介质由大量离散的颗粒聚集而成, 是多体相互作用体系, 介观层次呈现多种多样的结构和动力学不均匀性 (dynamic heterogeneity), 比如力链骨架、颗粒自旋、以及局域若干颗粒运动形成的涡旋等等, 是颗粒介质弹性和黏性等宏观性质的根源<sup>[1]</sup>. 弹性模量和黏滞系数分别是表征颗粒介质弹性和黏性的主要材料系数, Jiang 和 Liu 发展了一个颗粒介质弹性能密度函数<sup>[2]</sup>, 该函数是弹性应变张量的标量函数, 其对弹性应变分量的导数是对应的弹性应力分量, 在卸载时应变可自动恢复, 弹性应力-弹性应变关系是非线性的, 弹性模量可以由颗粒介质弹性能密度函数推导得到. 颗粒介质的黏滞系数在稀疏颗粒流动状态下, 可由颗粒动力学 (granular kinetics) 推导得到<sup>[3-5]</sup>; 准静态流和慢速流态的黏滞系数确定主要是基于经验得到, 如法国 GDR MiDi 组提出的 Herschel-Bulkley 流变关系和 Chialvo 等的工作<sup>[6,7]</sup>. 本文主要涉及颗粒介质的

弹性及其弛豫性质.

与取决于原子价键强度的固体弹性相比, 颗粒介质弹性不仅取决于颗粒间接触力, 还取决于颗粒的排布结构. 当颗粒位置固定且处于力平衡时, 接触点的法向力和切向力有多种可能的组合, 因此力链结构是超静定的, 相对应的宏观应力具有一定的分布, 力链系综理论对其进行了统计分析<sup>[8]</sup>. 从能量角度, 文献<sup>[1, 9]</sup>类比玻璃等非晶材料能量图景 (Energy landscape)<sup>[10,11]</sup>, 认为超静定的力链网络对应着高低起伏弹性势能面 (potential energy surface, PES) 上的能谷 (energy basin), 一种力链结构对应一个能谷, 建立了描述力链网络平均弹性能的模型, 提出了“颗粒温度” $T_g$  新概念表征力链网络弹性能起伏. 能态之间存在一定的能量势垒, 当外部激励超过能量势垒时, 能谷之间发生转变, 亦即从一个力链形态到另外一个力链形态演化. 自然界及工程建设中的颗粒介质, 其能量势垒与外部作用大致处于相当的水平时, 能谷之间易于相互转变, 颗粒介质的弹性弛豫非常明显, 但是其内在机理及其量化还不完善.

\* 国家自然科学基金项目 (批准号: 11272048, 51239006)、欧盟 Marie Curie 国际项目 (批准号: IRSES-294976)、美国全球创新计划 (Global Innovation Initiative) 和清华大学自主科研计划资助的课题.

† 通信作者. E-mail: [qcsun@tsinghua.edu.cn](mailto:qcsun@tsinghua.edu.cn)

应力松弛是在恒定形变下应力随时间的衰减, 是弹性弛豫的宏观表现. 本文基于文献 [1] 建立的双颗粒温度热力学, 认为弹性弛豫是颗粒介质的不可逆过程之一, 并建立了弹性弛豫方程. 应力松弛是弹性弛豫的表现, 本文建立了应力演化方程, 对文献 [12] 的单轴压缩颗粒体系应力松弛实验进行了分析.

## 2 弹性弛豫的机理分析

在光弹实验和离散元模拟中可以看到强、弱力链, 强力链上的颗粒被束缚住, 其位置不容易变化, 但是接触点力的分布可以变化, 导致强力链的方向发生偏转; 弱力链上的部分颗粒易于平移和转动. 力链结构的变化使得强、弱力链间的差异减弱, 颗粒体系向更低的能量状态演化, 且弹性能分布更加均匀.

### 2.1 颗粒温度

稳恒体系的局域物理量可线性分解为系综平均量和脉动量. 微观分子运动速度脉动量的二阶矩就是人们熟知的温度  $T$ , 人们把颗粒速度  $v_i$  的脉动量  $v'_i (= v_i - \langle v_i \rangle)$  二阶矩定义为“颗粒温度”(granular temperature),  $T_k = \frac{1}{2} \rho \langle v'_i v'_i \rangle$ ,  $\langle \dots \rangle$  表示系综平均运算;  $\rho (= \phi \rho_p)$  是体系的质量密度,  $\phi$  是颗粒的体积分数,  $\rho_p$  是颗粒的质量密度. 考虑到力链的强、弱差异及其演化均引起弹性应力脉动, 进而对能量涨落有贡献, 而传统的颗粒温度至今没有予以考虑. 文献 [1] 修正了颗粒温度  $T_g$  的表达, 量化了密集体系和稀疏体系在不同剪切速率下的能量脉动, 与速度脉动和应力脉动相关

$$\rho T_g = \frac{1}{2} \rho \langle v'_i v'_i \rangle + \frac{\rho}{\rho_p} \left\langle \left| P^e - \langle P^e \rangle \right| \varepsilon_V^e \right\rangle, \quad (1)$$

其中,  $P^e, \varepsilon_V^e$  分别是单颗粒的弹性应力和弹性应变的第一不变量.  $T_g$  的单位是 J/kg, 反映了内部结构(亦即颗粒速度脉动和力链应力脉动)无序演化的程度. 在特定力学状态下颗粒温度简化, 对于稀疏颗粒流  $T_g = \frac{1}{2} \langle v'_i v'_i \rangle$ , 与传统  $T_k$  相同. 本文涉及的应力松弛是准静态过程,  $T_g \approx \frac{1}{\rho_p} \left\langle \left| P^e - \langle P^e \rangle \right| \varepsilon_V^e \right\rangle$ .

### 2.2 弛豫过程

颗粒介质弛豫是内部结构演化引起的, 是不可逆过程之一 [1]. 如图 1 所示, 在时间间隔  $\delta t$  内,

颗粒体系从状态  $\Psi_i$  演变到状态  $\Psi_j$ , 弹性能和弹性应变  $\delta \varepsilon_{ij}^e$  逐渐降低. 内部结构发生微小调整, 产生很小的不可恢复应变增量  $\delta \varepsilon_{ij}^c (> 0)$ , 本文简单假设  $\delta \varepsilon_{ij}^c = -\delta \varepsilon_{ij}^e$ . 双颗粒温度热力学认为这是不可逆过程之一, 其热力学力和流分别为  $\sigma_{ij}^e$  和  $\partial_t \varepsilon_{ij}^c$ , 两者成线性关系, 则有

$$\partial_t \varepsilon_{ij}^c = -\partial_t \varepsilon_{ij}^e = c_{ijkl} \sigma_{kl}^e, \quad (2)$$

式中,  $c_{ijkl}$  是弹性应力弛豫系数, 单位为  $1/(\text{Pa}\cdot\text{s})$ . 假设颗粒介质各向同性, 有  $c_{ijkl} \sigma_{kl}^e = (c_V \sigma_{kk}^e \delta_{ij} + 2c_s \sigma_{ij}^{e,0})$ , 其中  $\sigma_{ij}^{e,0} = \sigma_{ij}^e - \frac{1}{3} \sigma_{ij}^e \delta_{ij}$  是弹性应力的零迹张量,  $\delta_{ij}$  是 Delta 函数,  $c_V, c_s$  分别为弹性体应变和偏应变的弛豫系数, 与颗粒温度  $T_g$  和弹性能势垒  $E_{ij}^b$  有关. 如图 1 所示, 从  $\Psi_i$  向  $\Psi_j$  演化过程中, 弹性能势垒  $E_{ij}^b$  越大, 弛豫越困难; 与之相反, 表征结构与运动无序程度的颗粒温度  $T_g$  越高, 则更容易越过势垒, 我们类比非晶材料的 Arrhenius 方程, 将弛豫系数定义为

$$\begin{aligned} c_V &= c_V^0 (\rho T_g / E_{ij}^b)^M, \\ c_s &= c_s^0 (\rho T_g / E_{ij}^b)^M, \end{aligned} \quad (3)$$

即  $\rho T_g / E_{ij}^b$  越大,  $c_V$  和  $c_s$  就越大. 需要指出, 该不可逆过程使得颗粒温度增加  $\sigma_{ij}^e \partial_t \varepsilon_{ij}^c$  (见 (6) 式, 或文献 [1]).

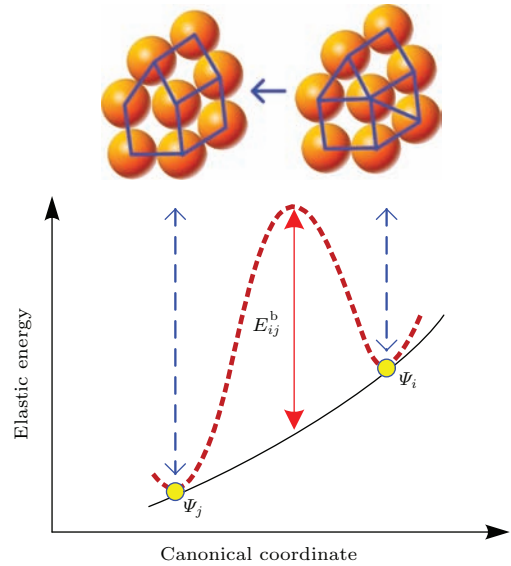


图 1 颗粒介质从状态  $\Psi_i$  到状态  $\Psi_j$  的弛豫过程中, 相应的力链形态演化(纵向坐标是弹性势能, 横向是弹性正则坐标)

Fig. 1. Sketch of a relaxation from state  $\Psi_i$  to lower energy state  $\Psi_j$ . The corresponding elastic energy and force chain configurations are schematically illustrated.

### 2.3 弹性能模型

确定颗粒体系的弹性能表达式, 对弹性应力与弹性应变的相互关系进行限制, 是分析颗粒弹性的关键所在. 文献[9]结合 GSH 理论的弹性能模型[13], Jamming 点附近的弹性特性[14]和超塑性模型的余能函数[15], 提出了新的瞬态弹性能模型:

$$e_e = B_0(\phi - \phi_c)^b I_1^a (I_1^2 + \xi I_2), \quad (4)$$

其中,  $B_0$  是弹性系数,  $\phi_c$  是 Jamming 点处的临界颗粒体积分,  $(\phi - \phi_c)$  反映了偏离 Jamming 点的程度(参见文献[9, 14]).  $I_1 = -\varepsilon_{kk}^e$  和  $I_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}^{e,0}\varepsilon_{ij}^{e,0}$  分别是弹性应变张量  $\varepsilon_{ij}^e$  的第一不变量和偏应变的第二不变量,  $\varepsilon_{ij}^{e,0} (= \varepsilon_{ij}^e + \frac{1}{3}I_1)$  是零迹张量. 结合声速测试技术, 通过微振幅振动激励颗粒力链, 由声速可以确定(3)式中弹性参数. 另外, 由弹性能函数 Hessian 矩阵正定得到

$$\frac{I_2}{I_1^2} \leq \frac{(2+a)}{\xi a}. \quad (5)$$

这是弹性稳定平衡时颗粒介质材料性质所必须满足的充分必要条件; 如果不满足, 则弹性不稳定, 体系发生流变. 显然, 该条件与基于应力的弹塑性屈服准则本质上不同. 在弹性松弛中, 我们假设(5)式成立, 不涉及弹性不稳定问题.

弹性弛豫过程中, 颗粒温度演化方程简化为

$$\partial_t(\rho T_g) = \sigma_{ij}^e \partial_t \varepsilon_{ij}^c - \Delta T_g, \quad (6)$$

$\varepsilon_{ij}^c$  的定义见(2)式; 该式假定了弹性应力  $\sigma_{ij}^e$  引起了不可恢复应变增量  $\delta\varepsilon_{ij}^c$ , 该输运过程对颗粒体系脉动能量的贡献是  $\sigma_{ij}^e \partial_t \varepsilon_{ij}^c$ ;  $\Delta T_g$  是脉动能量  $\rho T_g$  逐渐耗散为热能, 源自颗粒间的非弹性碰撞和表面摩擦等. 颗粒动力学可理论推导稀疏颗粒流的  $\Delta T_g$ ,  $\Delta T_g = \frac{24}{\sqrt{\pi}}(1-e)G\rho d_p^{-1}T_g^{3/2}$ ,  $e$  是颗粒恢复系数,  $G$  反映颗粒浓度的影响,  $d_p$  是颗粒粒径; 对于密集体系, Jenkins 修正得到  $\Delta T_g = \frac{24}{\sqrt{\pi}}(1-e)G\rho L^{-1}T_g^{3/2}$ ,  $L$  是力链长度[16]. 在本文计算中, 取  $e = 0.8$ ,  $L = 10d_p$ .

### 3 单轴压缩体系的应力松弛

我们选用 Miksic 和 Alava 开展的单轴压缩颗粒体系应力松弛实验进行理论分析[12]. 球形玻璃珠粒径在 300—400  $\mu\text{m}$  之间分布, 用落雨法 (rain deposition) 充满 18 mm 高、直径为 30 mm 的圆柱

形容器, 侧壁固定并假定是刚性的. 制备试样时, 经过反复尝试, 发现上表面预先压到 650 kPa, 此时  $\phi = 0.655 \pm 0.9\%$ , 然后卸载, 此时  $\phi$  没有明显变化, 这说明内部结构足够稳定. 在应力松弛实验时, 重新加载压强至  $\sigma_{zz} = 627$  kPa, 内部结构没有明显变化, 然后测量应力随时间的衰减, 模型示意图见图 2. 忽略 Miksic 和 Alava 开展的单轴压缩颗粒体系的物理量空间梯度, 文献[1]推导的颗粒介质方程组简化为

$$\begin{aligned} P^e &= A(2+a)I_1^{a+1} + CbI_1^{b-1}I_2, \\ q^e &= \sqrt{3}CI_1^b I_2^{1/2}, \\ \partial_t(\rho T_g) &= 9c_V(A(2+a)I_1^{a+1} + CbI_1^{b-1}I_2)^2 \\ &\quad + 4c_s C^2 I_1^{2b} I_2 - \Delta T_g, \\ \partial_t I_1 &= -9c_V P^e, \\ \partial_t(\sqrt{I_2}) &= -\frac{2\sqrt{3}}{3}c_s q^e. \end{aligned} \quad (7)$$

我们取能量势垒是颗粒介质的弹性能, 并类比非晶材料输运系数扩展的 Arrhenius 公式, 弛豫系数取为  $c_V = c_s = c^0(\rho T_g/e_e)^M$ , 在本文中尝试计算, 发现  $c^0 = 2.4784 \times 10^{-12}$ ,  $M = 1.39$ , 并假定  $\sigma_{xx}/\sigma_{zz} = 0.6$  保持不变.

在文献[12]的声速测量实验中, 玻璃珠的杨氏模量为 69.6 GPa, 泊松比为 0.20, 密度  $\rho_p = 2650$   $\text{kg/m}^3$ ,  $\phi_c \approx 0.648$ ; 实验中  $\phi \approx 0.655$ , 我们基于声速实验结果, 确定了  $B_0 = 9.22 \times 10^9$  Pa,  $b = 0.40$ ,  $a = 0.50$  和  $\xi = 3.88$ .

#### 3.1 $I_1, I_2$ 和 $T_g$ 初始数值的确定

单轴压缩实验视为准静态和应变恒定的过程, 宏观应力即为弹性应力,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e = \partial e_e / \partial \varepsilon_{ij}^e$ , 进而第一不变量  $P$  和广义偏应力  $q$  为  $P^e \equiv \frac{1}{3}\sigma_{ii}^e, q^e \equiv \sigma_{zz}^e - \sigma_{xx}^e$ . 考虑常规单轴加载情况, 弹性应变张量为

$$\varepsilon_{ij}^e = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^e & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy}^e & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}^e \end{bmatrix}. \quad (8)$$



且  $\varepsilon_{xx}^e = \varepsilon_{yy}^e$ , 并令  $A = B_0(\phi - \phi_c)^b$ ,  $C = B_0(\phi - \phi_c)^b \xi$ . 那么,  $I_1, I_2$  表示为弹性应力的函数

$$I_1 = \left[ \frac{P^e \pm \sqrt{(P^e)^2 - 4A(2+a)\frac{b}{3C}(q^e)^2}}{2A(2+a)} \right]^{2/3}, \quad (9)$$

以及

$$I_2 = \left( \frac{q^e}{\sqrt{3}CT_1^b} \right)^2. \quad (10)$$

可以看出  $I_1$  有两个解, 合理的解需要满足 (5) 式. 初始时刻  $\sigma_{zz} = 627$  kPa, 而侧向压力应有固壁边界反算得到, 但为了简化计算过程, 我们假定  $\sigma_{xx}/\sigma_{zz} = 0.6$ , 此时得到  $I_1, I_2$  的初始数值, 分别为  $I_1 = 2.705 \times 10^{-3}$  和  $I_2 = 3.188 \times 10^{-7}$ .

确定颗粒温度  $T_g$  初始数值很困难, 在本文中简化处理: 一般而言弹性能越大, 其涨落越大, 那么初始时刻的  $\rho T_g$  简单取为初始时刻  $I_1, I_2$  对应的初始弹性能的 1/6 (见 (4) 式), 即为  $T_g = 7.066 \times 10^{-3}$  J/kg, 或初始的弹性能涨落为  $\rho T_g = 122.641$  J/m<sup>3</sup>.

### 3.2 结果与讨论

图 2 是应力松弛过程中颗粒体系的弹性能和颗粒温度的演化. 弹性能逐渐降低, 与图 1 示意的颗粒介质从状态  $\Psi_i$  弛豫到状态  $\Psi_j$  时, 弹性降低的过程一致. 本文涉及的应力松弛是准静态过程, 则有  $T_g \approx \frac{1}{\rho_p} \langle |P^e - \langle P^e \rangle| \varepsilon_V^e \rangle$ ,  $T_g$  越小则表明体系中的弹性应力越均匀. 从图 2 可以看出, 颗粒温度逐渐衰减, 说明了应力(或弹性能)分布趋于均衡, 与第 2 节的分析一致.

图 3 是应力松弛的计算结果与实验结果 [12], 两者基本一致. 纵坐标的量值计算公式为  $[(\sigma_{zz} - 627)/627] \times 100$ , 可以看出在前 100 s, 应力快速衰减了约 3%.

本工作以表征弹性应力涨落的颗粒温度作为主要态变量, 建立了颗粒弹性弛豫过程的演化方程, 对颗粒介质弹性弛豫的进行了分析, 在单轴压缩计算过程中引入简化假设, 比如  $\sigma_{xx}/\sigma_{zz} = 0.6$  保持不变, 可得到与实验结果相一致的应力松弛曲线. 类比非晶材料输运系数扩展的 Arrhenius 公式, 本文取颗粒介质的弛豫系数取为  $c_V = c_s = c^0(\rho T_g/e_e)^M$ , 并且 (7) 式中颗粒温度  $\partial_t(\rho T_g) \sim -AT_g$  的演化方程, 对图 2 和图 3 的结果

起了关键作用, 说明输运系数的 Arrhenius 方程形式适用于颗粒介质输运系数, 且颗粒介质的能量耗散率正比于颗粒温度.

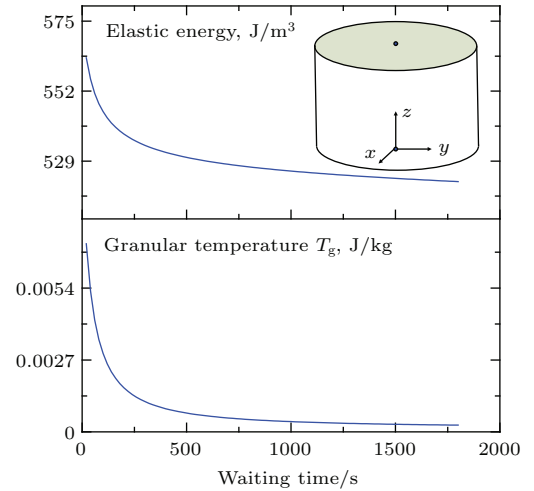


图 2 应力松弛过程中, 弹性能和颗粒温度的演化 (插图是实验示意图)

Fig. 2. Evolutions of elastic energy and granular temperature in 30 min.

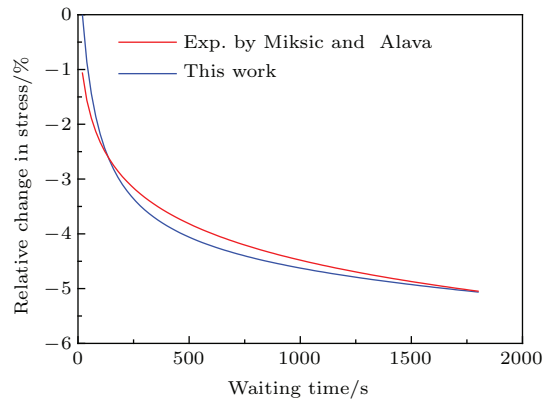


图 3 (网刊彩色) 单轴压缩颗粒体系中的应力松弛

Fig. 3. (color online) Relative change (negative) in stress for relaxation tests vs waiting time (30 min). An initial applied stress is 627 kPa.

计算过程中, 颗粒温度的初始值对计算结果影响很大, 初始时刻的  $\rho T_g$  简单取为初始时刻  $I_1, I_2$  对应的初始弹性能的 1/6, 这是类比颗粒流的平均动能和脉动动能之间的数值关系确定的, 本文关于弹性能初值的确定方法并不严谨. 更为艰难的问题是, 如何理解不可逆过程  $\partial_t \varepsilon_{ij}^e = c_{ijkl} \sigma_{kl}^e$ ? 输运系数  $c_{ijkl}$  如何确定? 目前尚缺乏严格的理论可以借鉴. 从更宽泛的视角看, 弹性弛豫是复杂流体和软物质等共同的难题之一, 认识介观结构及其动力学是揭示宏观弹性弛豫机理的关键.

参考文献

- [1] Sun Q 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 076101 (in Chinese) [孙其诚 2015 物理学报 **64** 076101]
- [2] Jiang Y M, Liu M 2009 *Granular Matter* **11** 139
- [3] Savage S B, Jeffrey D J 1981 *J. Fluid Mech.* **110** 255
- [4] Lun C K K, Savage S B, Jeffrey D J, Chepuriniy N 1984 *J. Fluid Mech.* **140** 223
- [5] Goldhirsch I 2003 *Annual Rev Fluid Mech.* **35** 267
- [6] Forterre Y, Pouliquen O 2008 *Annual Rev Fluid Mech.* **40** 1
- [7] Chialvo S, Sun J, Sundaresan S 2012 *Phys. Rev. E* **85** 021305
- [8] Tighe B P, Vlugt T J H 2011 *J. Stat. Mech.* P04002
- [9] Sun Q, Jin F, Wang G, Song S, Zhang G 2015 *Sci. Rep.* **5** 9652
- [10] Wales D J 2003 *Energy landscapes* (Cambridge: Cambridge University Press) p1
- [11] Stillinger F H 1995 *Science* **267** 1935
- [12] Miksic A, Alava M J 2013 *Phys. Rev. E* **88** 032207
- [13] Jiang Y M, Liu M 2015 *Europhys. J. E* **38** 15
- [14] Xu N 2011 *Front. Phys. China* **6** 109
- [15] Collins I F, Houlsby G T 1997 *Proceed. Royal Soc. A* **453** 1975
- [16] Jenkins J T 2006 *Phys. Fluids* **18** 103307

# Relaxation of granular elasticity\*

Sun Qi-Cheng<sup>1)†</sup> Liu Chuan-Qi<sup>1)</sup> Gordon G D Zhou<sup>2)</sup>1) (*State Key Laboratory of Hydrosience and Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China*)2) (*Institute of Mountain Hazards and Environment, Chinese Academy of Sciences & Ministry of Water Conservancy, Chengdu 610041, China*)

( Received 13 April 2015; revised manuscript received 22 July 2015 )

## Abstract

In granular materials, particles constitute a complex force chains network through contact with each other, and elastic energies are stored due to deformation of particles. This elastic behavior is macroscopic manifestation of inter-particle contacts. Elastic constants or elastic moduli are of fundamental importance for granular material. Due to the hyper-static property of inter-particle forces, the bulk elastic energy stored in the contacts is metastable in the viewpoint of energy landscape, i.e. a high energy state may approaches a more stable state (i.e. relatively lower state) under the action of external perturbations or internal stress, resulting in the elastic modulus reduction. This process is the so-called elasticity relaxation. It may be more obvious in granular materials.

The time-dependent behavior of granular materials, especially the creep, has been studied in experiments and numerical simulations, while the stress relaxation has few reported investigations. Stress relaxation is defined as the process in which the initial strain is maintained and the stress decays with the time. From energetic viewpoint, elastic energy is stored in the deformation of particles. The granular system is in a metastable state when confined in a state easy to break the balance. Generally speaking, the shape and grading of particles, volume fraction, surface friction properties, initial structure features, ageing time, loading strain rate will all play important roles in stress relaxation.

In this work, it is believed that the elastic relaxation is the only mechanism to describe the stress relaxation, and the mechanism of it is analyzed from the viewpoint of the potential energy surface. Stress relaxation is calculated by means of the so-called two-granular temperature theory (TGT) we developed previously (Sun Q et al. 2015 Sci. Rep. 5 9652). The stress decays fast at the beginning, then decreases gradually slowly to a stable value. The logarithmic fit is first proposed to describe the stress decay in the compressed system. Calculated results of stress relaxation match well with the measured results in a recently published paper (Miksic A, Alava M J 2013 Phys. Rev. E 88 032207). Both elastic energy and granular temperature may be reduced with increasing time. It is found that the initial value of the granular temperature has a great influence on the stress relaxation, and at present its effect is input by trial and error. It would be a major problem how to determine the initial value of the granular temperature. Moreover, the relaxation coefficient of elastic stress is basically chosen as a function of granular temperature which is described by the Arrhenius equation that need be further investigated.

**Keywords:** granular materials, elasticity, relaxation, non-equilibrium thermodynamics

**PACS:** 61.43.-j, 62.20.-x, 81.05.Rm, 05.70.-a

**DOI:** 10.7498/aps.64.236101

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11272048, 51239006), the European Commission Marie Curie Actions (Grant No. IRSES-294976), the Global Innovation Initiative of US, and Tsinghua University Initiative Scientific Research Program.

† Corresponding author. E-mail: [qcsun@tsinghua.edu.cn](mailto:qcsun@tsinghua.edu.cn)