

谐振子系统的量子-经典轨道、Berry相及 Hannay 角

辛俊丽 沈俊霞

Correspondences between quantum and classical orbits Berry phases and Hannay angles for harmonic oscillator system

Xin Jun-Li Shen Jun-Xia

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 240302 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.240302

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.240302>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I24>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

非线性系统的非对角 Berry 相

Off-diagonal Berry phase in nonlinear systems

物理学报.2013, 62(11): 110302 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.110302>

Born-Oppenheimer 近似下谐振子场驱动电磁模系统的 Berry 相和 Hannay 角

Berry phase and Hannay's angle of an electromagnetic mode system driven by harmonic field with Born-Oppenheimer approximation

物理学报.2013, 62(10): 100302 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.100302>

人工规范势下三阱玻色-爱因斯坦凝聚系统的动力学

Dynamics of Bose-Einstein condensate trapped in a triple-well with synthetic gauge field

物理学报.2012, 61(23): 230304 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.230304>

具有三体相互作用的自旋链系统中的几何相位与量子相变

Berry phase and quantum phase transition in spin chain system with three-site interaction

物理学报.2012, 61(22): 220302 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.220302>

等腰直角三角形的二维量子谱和经典轨道

Two-dimensional quantum spectra and classical orbits of isosceles- right triangular billiards

物理学报.2012, 61(22): 220301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.220301>

谐振子系统的量子-经典轨道、Berry相及 Hannay角*

辛俊丽† 沈俊霞

(运城学院物理与电子工程系, 运城 044000)

(2015年1月9日收到; 2015年8月27日收到修改稿)

从量子-经典轨道和几何相两方面, 研究了二维旋转平移谐振子系统的量子-经典对应. 通过广义规范变换得到了Lissajous经典周期轨道和Hannay角. 另外, 使用含时规范变换解析推导了旋转平移谐振子系统Schrödinger方程的本征波函数和Berry相, 得出结论: 原规范中的非绝热Berry相是经典Hannay角的 $-n$ 倍. 最后, 使用 $SU(2)$ 自旋相干态叠加, 构造一稳态波函数, 其波函数的概率云很好地局域于经典轨道上, 满足几何相位和经典轨道同时对应.

关键词: Berry相, Hannay角, 广义规范变换, 量子-经典对应

PACS: 03.65.Vf, 03.65.Sq, 03.65.Ge, 03.65.Fd

DOI: 10.7498/aps.64.240302

1 引言

自20世纪量子力学诞生以来, 有关量子-经典对应原理的研究就引起了人们极大的关注^[1]. 1915年, Sommerfeld给出了量子化条件; 1922年, Bohr提出了著名的对应原理^[2-4], 为经典力学过渡到量子力学提供了理论依据. 后来, 在Heisenberg工作^[5]的启发下, Dirac意识到Poisson括号的重要性, 并提出了与经典相应的量子Poisson括号和正则量子化条件. 而经典极限下的Schrödinger波动方程与经典Jacobi-Hamilton方程相当. 另外, Schrödinger在构造一维谐振子相干态的过程中, 发现波包中心的运动规律与经典粒子完全相同, 进而证明了量子-经典对应^[6].

最近, 二维谐振子的量子-经典对应引起了人们极大的研究兴趣, 文献^[7, 8]已从理论上证明拥有共同频率的二维各向异性谐振子波函数概率云的空间分布与经典Lissajous轨道完全一致, 这一结

论从实验上也得以证实^[8-10]. 通过二维中心势场中的量子-经典对应, 我们证明了经典轨道的旋转对称性和分数角动量^[11, 12]. 除此之外, 量子-经典对应解释原子核和金属集群的壳层效应等^[13, 14]奇特量子现象方面发挥着重要的作用.

Berry提出一个量子系统的多重参数随时间绝热演化时, 除产生通常的动力学相因子外, 还附加了一个依赖参数空间路径的相因子, 即Berry相^[15]. 不久以后, Hannay发现在可积系统中存在Berry相的经典对应量Hannay角^[16], 即经典系统在循环演化的过程中同样产生一附加角变量. 最近, 文献^[17, 18]分别研究了量子-经典混合系统和 $SU(1, 1)$ 周期驱动二维各向异性谐振子的Berry相和Hannay角. 在此基础上, 利用广义规范变换, 我们得到二维旋转平移谐振子的非绝热Berry相和Hannay角. 通过 $SU(2)$ 自旋相干态叠加, 构造一稳态波函数, 发现波函数概率云很好地局域于经典轨道上, 满足几何相位和轨道同时对应.

* 国家自然科学基金(批准号: 11275118)、运城学院博士科研启动项目(批准号: YQ-2015013)和国家自然科学基金青年科学基金(批准号: 11505150)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: xinjunliycu@163.com

2 经典轨道和 Hannay 角

对于二维旋转平移谐振子, 哈密顿量算符包含两部分 $\mathbf{H} = \mathbf{H}_x(t) + \mathbf{H}_y$, 其中 $\mathbf{H}_y = w_y (\mathbf{a}_2^\dagger \mathbf{a}_2 + 1/2)$ 是一普通谐振子的哈密顿量, $\mathbf{H}_x(t)$ 是一旋转平移谐振子^[19], 其哈密顿量为

$$\mathbf{H}_x(t) = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} \dot{\varphi}(t) + w_x [(\mathbf{a}^\dagger e^{-i\varphi(t)} + \alpha^*) \times (\mathbf{a} e^{i\varphi(t)} + \alpha) + 1/2], \quad (1)$$

其中 w_x, w_y 分别是 x, y 方向的频率; $\mathbf{a}^\dagger (\mathbf{a})$ 是频率为谐振子 w_x 的产生(湮灭)算符; α 是任一复数; $\varphi(t)$ 是一含时参数, 且 $\varphi(t) = wt$, w 是旋转平移谐振子的旋转频率.

2.1 含时正则变换和经典解

利用谐振子的湮灭和产生算符

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{x} + i\mathbf{p}_x), \quad \mathbf{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{x} - i\mathbf{p}_x),$$

将方程(1)的哈密顿量返回到相空间, 可写为

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_x(x, p_x, t) &= \frac{(w_x + \dot{\varphi}(t))}{2} (x^2 + p_x^2) \\ &+ \frac{w_x}{\sqrt{2}} x [\alpha e^{-i\varphi(t)} + \alpha^* e^{i\varphi(t)}] \\ &+ \frac{i p_x w_x}{\sqrt{2}} [\alpha^* e^{i\varphi(t)} - \alpha e^{-i\varphi(t)}] \\ &+ |\alpha|^2 w_x - \frac{\dot{\varphi}(t)}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

构造如下正则变换关系

$$\begin{aligned} p_x &= \sin \varphi(t) X + \cos \varphi(t) P_X, \\ x &= \cos \varphi(t) X - \sin \varphi(t) P_X. \end{aligned} \quad (3)$$

对于给定的系统, 相空间的任意拉氏量 $L_X(X, \dot{P}_X) = P_X \dot{X} - H_X(X, P_X, t)$ 和 $L_x(x, \dot{p}_x) = p_x \dot{x} - H_x(x, p_x, t)$ 仅差一时空函数对时间的全导数, 且运动方程不变, 即

$$L_X(X, \dot{P}_X) = L(x, \dot{p}) + \frac{dF(X, P_X, t)}{dt}, \quad (4)$$

这一变换也称之为广义规范变换^[20], 其中 $F(X, P_X, t)$ 是生成函数.

通过方程(3)以及生成函数与相空间坐标之间的关系

$$\frac{\partial F}{\partial X} = P_X - p \frac{\partial x}{\partial X}, \quad \frac{\partial F}{\partial P_X} = -p \frac{\partial x}{\partial P_X}$$

得到生成函数

$$\begin{aligned} F &= -\frac{1}{4} \sin(2\varphi(t)) X^2 + \sin \varphi(t) X P_X \\ &+ \frac{1}{4} \sin(2\varphi(t)) P_X^2 + \frac{i}{2} \cos^2 \varphi(t) - \frac{\varphi(t)}{2}. \end{aligned}$$

利用广义规范变换(4), 我们发现 \mathbf{H}'_X 是一不含时的普通谐振子,

$$\mathbf{H}'_X = \frac{w_x}{2} [X'^2 + P_X'^2], \quad (5)$$

其中 X' 和 P_X' 是无量纲变量,

$$\begin{aligned} X' &= X + \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha + \alpha^*), \\ P_X' &= P_X + \frac{i}{\sqrt{2}} (\alpha^* - \alpha). \end{aligned} \quad (6)$$

在新空间 (X', y) , 二维旋转平移谐振子变成了普通的各向异性谐振子 $X' = X'_0 \cos(w_x t + \phi_0)$, $y = y_0 \cos(w_y t + \theta_0)$. 众所周知, 具有共同频率的二维各向异性谐振子的运动轨道, 即著名的 Lissajous 图像. 图1—图3中的黑实线描绘的是频率比 $w_x : w_y = n : m$ 分别是 2/3; 3/5; 4/5, 初相位分别是 $\theta_0 = 0, \phi_0 = 0, \pi/3m, 2\pi/3m$ 的周期轨道.

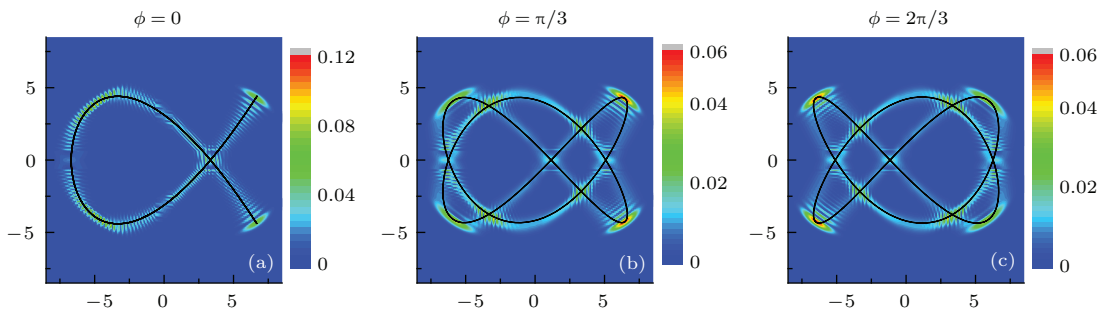


图1 (网刊彩色) 表示叠加态 $N = 30$, 可调参数 $\delta_{X'} = -0.08, \delta_y = -0.15$, 频率比 $m : n = 3 : 2$ 的概率密度 $|\Psi_N^{m,n}(X', y, w_x, w_y, \tau)|^2$ 分布和经典轨道(黑色实线)图, 初相位分别为 (a) $\phi = 0$, (b) $\phi = \pi/3$, (c) $\phi = 2\pi/3$

Fig. 1. (color online) Probability density image $|\Psi_N^{m,n}(X', y, w_x, w_y, \tau)|^2$ and classical orbits (black solid curve) for frequency ration $m : n = 3 : 2$, with $N = 30, \delta_{X'} = -0.08, \delta_y = -0.15$ and (a) $\phi = 0$, (b) $\phi = \pi/3$ and (c) $\phi = 2\pi/3$.

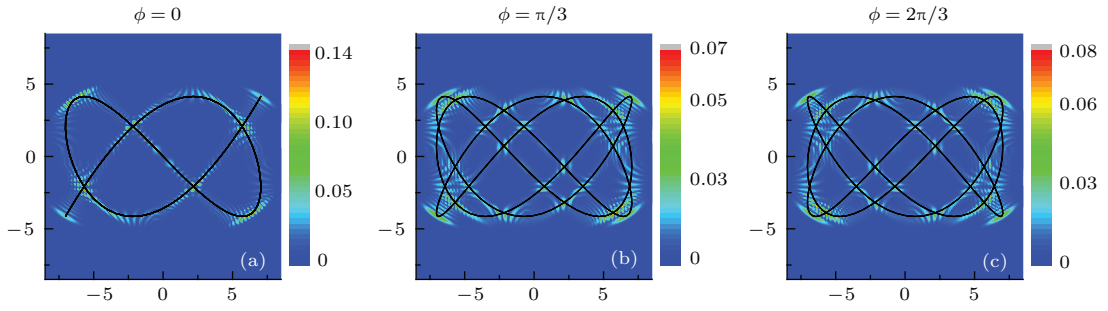


图2 (网刊彩色) 表示频率比 $m : n = 5 : 3$ 叠加态 $N = 30$, 可调参数 $\delta_{X'} = -0.06$, $\delta_y = -0.12$ 的概率密度分布和经典轨道 (黑色实线) 图

Fig. 2. (color online) Probability density image $|\Psi_N^{m,n}(X', y, w_x, w_y, \tau)|^2$ and classical orbits (black solid curve) for frequency ration $m : n = 5 : 3$ with $N = 30$, $\delta_{X'} = -0.06$, $\delta_y = -0.12$.

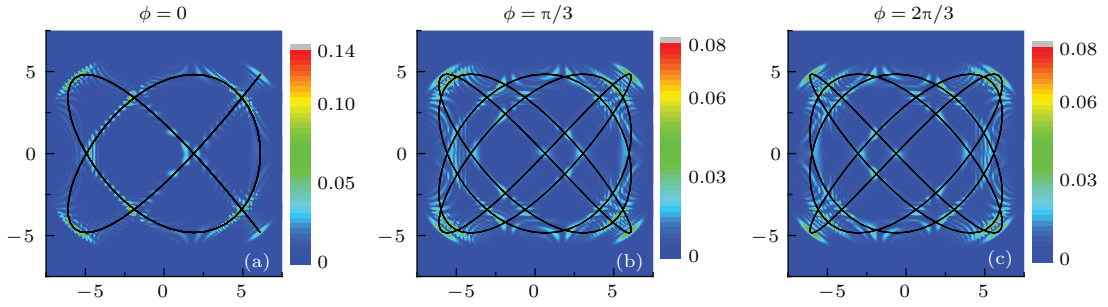


图3 (网刊彩色) 表示频率比 $m : n = 5 : 4$ 叠加态 $N = 30$, 可调参数 $\delta_{X'} = -0.03$, $\delta_y = -0.07$ 的概率密度分布和经典轨道 (黑色实线) 图

Fig. 3. (color online) Probability density image $|\Psi_N^{m,n}(X', y, w_x, w_y, \tau)|^2$ and classical orbits (black solid curve) for frequency ration $m : n = 5 : 4$ with $N = 30$, $\delta_{X'} = -0.03$, $\delta_y = -0.07$.

2.2 作用量-角变量和Hannay角

经典力学中的Hannay角都是从正则变量 $(X', P'_{X'})$ 到作用量-角变量 (I, θ) 进行正则变换的过程中产生的, 例如

$$\begin{aligned} X'(I, \theta) &= \sqrt{2I} \sin \theta, \\ P'_{X'}(I, \theta) &= \sqrt{2I} \cos \theta. \end{aligned} \quad (7)$$

哈密顿量 $H_{X'}$ ($X', P'_{X'}$) 变成了以作用量-角变量 (I, θ) 为变量的函数, 即 $H_0(I, \theta) = Iw_x$, 且满足正则方程 $\dot{\theta} = \partial H_0(I, \theta) / \partial I = w_x$, $\dot{I} = 0$.

通过方程(1), (6)和(7), 我们可以得到从原始变量 (x, p_x) 到作用量-角变量 (I, θ) 总的正则变换

$$\begin{aligned} p_x &= -\sin \varphi(t) \left[\sqrt{2I} \sin \theta - \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \alpha^*) \right] \\ &\quad + \cos \varphi(t) \left[\sqrt{2I} \cos \theta - \frac{i}{\sqrt{2}}(\alpha^* - \alpha) \right], \\ x &= \cos \varphi \left[\sqrt{2I} \sin \theta - \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \alpha^*) \right] \\ &\quad + \sin \varphi \left[\sqrt{2I} \cos \theta - \frac{i}{\sqrt{2}}(\alpha^* - \alpha) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

因此, 旋转平移谐振子的哈密顿量 $H_x(t)$ 演化一个周期的Hannay角为

$$\begin{aligned} \Delta\theta(I, C) &= -\frac{\partial}{\partial I} \oint \langle p_x(I, \theta, \varphi(t)) d_\varphi x(I, \theta, \varphi(t)) \rangle_\theta \\ &= -2\pi, \end{aligned} \quad (9)$$

这里的 $\langle \dots \rangle_\theta$ 表示对角变量 θ 求平均.

3 量子态和Berry相

二维旋转平移谐振子的哈密顿算符可写为 $\mathbf{H} = \mathbf{H}_x(t) + \mathbf{H}_y$, 其中 $\mathbf{H}_y = w_y(\mathbf{a}_2^\dagger \mathbf{a}_2 + 1/2)$, 本征态 $\mathbf{a}_2^\dagger \mathbf{a}_2 |n_y\rangle = n_y |n_y\rangle$. x 方向的含时 Schrödinger 方程可写为

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \mathbf{H}_x(t) |\psi(t)\rangle. \quad (10)$$

引入么正算符 $\mathbf{U}(\varphi) = e^{-i\mathbf{a}_2^\dagger \mathbf{a}_2 \varphi(t)}$, 且满足 $\mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} = 1$. 对方程(10)做一广义规范变换 $|\psi\rangle = \mathbf{U} |\psi\rangle$, 其 Schrödinger 方程的形式不变^[21], 其哈密

量为

$$H'_x = U H_x U^\dagger - iU \frac{\partial}{\partial t} U^\dagger.$$

与经典相似, 在新规范中的哈密顿量算符变成了一普通的谐振子

$$H'_X = \left[\mathbf{b}^\dagger \mathbf{b} + \frac{1}{2} \right] w_x, \quad (11)$$

其中 $\mathbf{b}^\dagger = \mathbf{a}^\dagger + \alpha^*$, $\mathbf{b} = \mathbf{a} + \alpha$, 量子本征态为 $|n'_x\rangle$, 本征值 $E'_{n_x} = (n_x + 1/2) w_x$.

返回原规范中, 含时 Schrödinger 方程的通解, 很容易写出

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sum_n c_n U^\dagger |n'_x(t)\rangle \\ &= \sum_n e^{-i \int_0^\tau \langle n_x(t) | H_x(t) | n_x(t) \rangle dt} e^{-i\gamma_n} |n_x(t)\rangle. \end{aligned}$$

经过一个周期后的 Berry 相 [21] 为

$$\begin{aligned} \gamma_n &= i \int_0^\tau \langle n_x(t) | \frac{d}{dt} |n_x(t)\rangle dt \\ &= i \int_{\varphi(0)}^{\varphi(T)} \langle n_x(\varphi) | \frac{d}{d\varphi} |n_x(\varphi)\rangle d\varphi \\ &= 2\pi \langle n'_x | \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} | n'_x \rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

因此, 我们得出非绝热 Berry 相和经典 Hannay 角之间, 满足下面的对应关系:

$$\gamma_n = -n\Delta\theta. \quad (13)$$

4 量子-经典轨道对应

在新空间 (X', y) 中, 二维各向异性谐振子的波函数, 可以表示成 X' 和 y 方向波函数的直积形式

$$\psi_{n_x, n_y}(X', y) = \psi'_{n_x}(X', w_x) \psi_{n_y}(y, w_y), \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} \psi'_{n_x}(X', w_x) &= \langle X' | n'_x \rangle \\ &= \sqrt{\frac{\sqrt{w_x}}{2^{n_x} \sqrt{\pi} n_x!}} e^{-\frac{w_x X'^2}{2}} H_{n_x}(\sqrt{w_x} X'), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \psi_{n_y}(y, w_y) &= \langle y | n_y \rangle \\ &= \sqrt{\frac{\sqrt{w_y}}{2^{n_y} \sqrt{\pi} n_y!}} e^{-\frac{w_y y^2}{2}} H_{n_y}(\sqrt{w_y} y), \end{aligned} \quad (16)$$

$H_n(\dots)$ 是厄米多项式. 相应的本征值为 $E_{n_x, n_y} = w_x(n_x + 1/2) + w_y(n_y + 1/2)$. 当频率比值为 $w_x : w_y = n : m$ (m, n 是整数且 $m > n$) 的二维

各向异性谐振子时, 使用 $\psi_{n_x, n_y}^{m, n}(X', y)$ 表示 $N + 1$ 个能量本征态, 其中 $n_x = mk$, $n_y = n(N - k)$, $k = 0, 1, 2, \dots, N$ 是简并度. 因此, 系统的能量的本征值为

$$E_N = (mN + 1/2) w_x + w_y/2. \quad (17)$$

通过 $SU(2)$ 自旋相干态, 我们可以构造出与经典轨道相对应的宏观量子态

$$\begin{aligned} \Psi_N^{m, n}(X', y, w_x, w_y, \tau) &= \frac{1}{(1 + |\tau|^2)^{N/2}} \sum_{k=0}^N \binom{N}{k}^{1/2} \tau^k \\ &\times \psi_{mk, n(N-k)}^{m, n}(X', y, w_x, w_y), \end{aligned} \quad (18)$$

这里 $\tau = e^{i\phi}$ 是一个复参数, 初相位 $\phi = m\phi_0 - n\theta_0$ [22]. 图 1—图 3 分别显示了 $N = 30$, 初相位 $\phi = 0, \pi/3, 2\pi/3$ 和 $m : n = 3/2; 5/3; 5/4$ 的概率密度空间分布. 通过引进一参数 δ_i ($i = X', y$) 调整 X', y 方向的轨道振幅, 我们可以得到宏观量子态的概率密度分布与 Lissajous 轨道图像完全一致.

$$\begin{aligned} X'_0 &= \sqrt{2\langle X'^2 \rangle} + \delta_{X'}, \\ y_0 &= \sqrt{2\langle y^2 \rangle} + \delta_y, \end{aligned}$$

这里 $\langle Q^2 \rangle = \langle \Psi_N^{m, n} | Q^2 | \Psi_N^{m, n} \rangle$, $Q = X', y$ 表示坐标平方的平均值.

最后, 退回原规范, 含时 Schrödinger 方程 (10) 的一般解可写为 [18]

$$\psi'_{n_x}(X', w_x, t) = \psi'_{n_x}(X', w_x) e^{-iE'_{n_x} t}. \quad (19)$$

通过广义规范变换逆变换和方程 (19), 得到旋转平移谐振子哈密顿算符 $H_x(t)$ 的波函数

$$\psi_{n_x}(X', w_x, t) = U^\dagger(X', t) \psi'_{n_x}(X', w_x, t). \quad (20)$$

在坐标表象中, 么正算符 $U^\dagger(X', t)$ 可表示为

$$U^\dagger(X', t) = e^{\frac{i\varphi(t)}{2}} \left[(X' - \sqrt{2}\text{Re}\alpha)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial X'} - \sqrt{2}\text{Im}\alpha \right)^2 + 1 \right].$$

因此, 我们可以得到含时 Schrödinger 方程, 本征值为 E_{n_x, n_y} 的二维波函数

$$\begin{aligned} \psi_{n_x, n_y}(X', y, w_x, w_y, t) &= e^{-iE_{n_x, n_y} t} \sqrt{\frac{\sqrt{w_x w_y}}{2^{n_x + n_y} \pi n_x! n_y!}} e^{-\frac{w_y y^2}{2}} H_{n_y}(\sqrt{w_y} y) \\ &\times U^\dagger(X', t) \left[e^{-\frac{w_x X'^2}{2}} H_{n_x}(\sqrt{w_x} X') \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

5 结 论

通过广义规范变换, 我们研究了二维旋转平移谐振子系统中的量子-经典对应, 解析推导出其经典解和量子波函数, 并得出非绝热 Berry 相是经典 Hannay 角的 $-n$ 倍. 除此之外, 通过 $SU(2)$ 自旋相干态叠加构造一宏观量子态, 发现波函数的概率云完全局域于经典轨道上, 满足几何相位和轨道同时对应.

感谢台湾交通大学陈永福教授和国家应用物理和计算数学研究所刘昊迪博士的讨论.

参考文献

- [1] Makowski A J 2006 *Eur. J. Phys.* **27** 1133
- [2] Nielsen J R 1976 *Collected Works* (Vol. 3): *The Correspondence Principle* (1918–1923) (Amsterdam: North-Holland)
- [3] Bohr N 1922 *The Structure of the Atom Nobel Lecture*, December 11, 1922
- [4] Bohr N 1923 *Nature* **112** 29
- [5] Heisenberg W (translated by Eckart C, Hoyt F C) 1949 *The Physical Principles of the Quantum Theory* (New York: Dover Publications) p116
- [6] Schrödinger E 1926 *Naturwissenschaften* **14** 664
- [7] Chen Y F 2011 *Phys. Rev. A* **83** 032124
- [8] Chen Y F, Lan Y P, Huang K F 2003 *Phys. Rev. A* **68** 043803
- [9] Chen Y F, Lu T H, Su K W, Huang K F 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 213902
- [10] Lu T H, Lin Y C, Chen Y F, Huang K F 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 233901
- [11] Xin J L, Liang J Q 2012 *Chin. Phys. B* **21** 040303
- [12] Xin J L, Liang J Q 2014 *Sci. China: Phys. Mech. Astron.* **57** 1504
- [13] Brack M 1993 *Rev. Mod. Phys.* **65** 677
- [14] Heer W A De 1993 *Rev. Mod. Phys.* **65** 611
- [15] Berry M V 1984 *Proc. R. Soc. A* **392** 45
- [16] Hannay J H 1985 *J. Phys. A* **18** 221
- [17] Liu H D 2011 *Ph. D. Dissertation* (Dalian: Dalian University of technology) (in Chinese) [刘昊迪 2011 博士学位论文 (大连: 大连理工大学)]
- [18] Xin J L, Liang J Q 2015 *Phys. Scr.* **90** 065207
- [19] Wang M H, Wei L F, Liang J Q 2015 *Phys. Lett. A* **379** 1087
- [20] Liang J Q, Wei L F 2011 *New Advances in Quantum Physics* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梁九卿, 韦联福 2011 量子物理新进展 (北京: 科学出版社)]
- [21] Lai Y Z, Liang J Q, Müller K, Zhou J G 1996 *J. Phys. A* **29** 1773
- [22] Chen Y F, Lu T H, Su K W, Huang K F 2005 *Phys. Rev. E* **72** 056210

Correspondences between quantum and classical orbits Berry phases and Hannay angles for harmonic oscillator system*

Xin Jun-Li[†] Shen Jun-Xia

(Department of Physics and Electronic Engineering, Yuncheng College, Yuncheng 044000, China)

(Received 9 January 2015; revised manuscript received 27 August 2015)

Abstract

On the basis of quantum-classical correspondence for two-dimensional anisotropic oscillator, we study quantum-classical correspondence for two-dimensional rotation and translation harmonic oscillator system from both quantum-classical orbits and geometric phases. Here, the two one-dimensional oscillators refer to a common harmonic oscillator and a rotation and translation harmonic oscillator. In terms of the generalized gauge transformation, we obtain the stationary Lissajous orbits and Hannay's angle. On the other hand, the eigenfunctions and Berry phases are derived analytically with the help of time-dependent gauge transformation. We may draw the conclusion that the nonadiabatic Berry phase in the original gauge is $-n$ times the classical Hannay's angle, here n is the eigenfunction index. As a matter of fact, the quantum geometric phase and the classical Hannay's angle have the same nature according to Berry. Finally, by using the $SU(2)$ coherent superposition of degenerate two-dimensional eigenfunctions for a fixed energy value, we construct the stationary wave functions and show that the spatial distribution of wave-function probability clouds is in excellent accordance with the classical orbits, indicating the exact quantum-classical correspondence. We also demonstrate the quantum-classical correspondences for the geometric phase-angle and the quantum-classical orbits in a unified form.

Keywords: Berry phase, Hannay angle, generalized gauge transformation, quantum-classical correspondence

PACS: 03.65.Vf, 03.65.Sq, 03.65.Ge, 03.65.Fd

DOI: [10.7498/aps.64.240302](https://doi.org/10.7498/aps.64.240302)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11275118), the Doctoral Scientific Research Foundation of Yuncheng College, China (Grant No. YQ-2015013), and the Young Scientists Fund of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11505150).

[†] Corresponding author. E-mail: xinjunliycu@163.com