

多跳噪声量子纠缠信道特性及最佳中继协议

杨光 廉保旺 聂敏

Characteristics of multi-hop noisy quantum entanglement channel and optimal relay protocol

Yang Guang Lian Bao-Wang Nie Min

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 240304 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.240304

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.240304>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I24>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于分组交换的量子通信网络传输协议及性能分析

Transmission protocol and its performance analysis of quantum communication network based on packet switching

物理学报.2015, 64(21): 210303 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.210303>

噪声情况下的量子网络直接通信

Quantum network direct communication protocol over noisy channel

物理学报.2015, 64(16): 160306 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.160306>

量子直接通信

Quantum secure direct communication

物理学报.2015, 64(16): 160307 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.160307>

利用信息流方法优化多激发自旋链中的量子态传输

Optimizing quantum state transfer in multi-excitation spin chains via information flux

物理学报.2015, 64(16): 160305 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.160305>

PM2.5 大气污染对自由空间量子通信性能的影响

Influences of PM2.5 atmospheric pollution on the performance of free space quantum communication

物理学报.2015, 64(15): 150301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.150301>

# 多跳噪声量子纠缠信道特性及最佳中继协议\*

杨光<sup>†</sup> 廉保旺 聂敏

(西北工业大学电子信息学院, 西安 710072)

(2015年7月24日收到; 2015年9月6日收到修改稿)

在量子通信网络中, 最佳中继路径的计算与选择策略是影响网络性能的关键因素. 针对噪声背景下量子隐形传态网络中的中继路径选择问题, 本文首先研究了相位阻尼信道及振幅阻尼信道上的纠缠交换过程, 通过理论推导给出了两种多跳纠缠交换信道上的纠缠保真度与路径等效阻尼系数. 在此基础上提出以路径等效阻尼系数为准则的隐形传态网络最佳中继协议, 并给出了邻居发现、量子链路噪声参数测量、量子链路状态信息传递、中继路径计算与纠缠资源预留等工作的具体过程. 理论分析与性能仿真结果表明, 相比于现有的量子网络路径选择策略, 本文方法能获得更小的路径平均等效阻尼系数及更高的隐形传态保真度. 此外, 通过分析链路纠缠资源数量对协议性能的影响, 说明在进行量子通信网设计时, 可以根据网络的规模及用户的需求合理配置链路纠缠资源.

**关键词:** 量子网络, 纠缠交换, 量子噪声, 路由选择**PACS:** 03.67.Hk, 03.65.Yz**DOI:** 10.7498/aps.64.240304

## 1 引言

近年来, 随着人们在量子信息通信理论和实验领域的不断突破, 构建量子通信网络、实现广域范围安全保密通信成为全球各科技强国关注的重要目标. 世界上第一个量子通信网络——美国 DARPA 密钥分配网络<sup>[1]</sup>于2003年10月开始全面运作; 欧洲 SECOQC 量子通信网络于2008年成功演示运行<sup>[2]</sup>; 2009年5月, 中国科技大学郭光灿小组在安徽芜湖成功演示了我国第一个量子政务网, 该网络具有多层次结构, 连接了城市中的七个节点<sup>[3]</sup>; 2012年, 我国安徽合肥46节点量子城域网开始试运行; 2014年, 我国国家级重大工程“量子保密通信京沪干线”项目启动, 将形成大规模量子广域保密通信网<sup>[4]</sup>. 此外, 世界上多个国家积极推进量子通信卫星计划, 已经展开的有美国 Richard Hughes 研究组的量子密钥分配空间平台<sup>[5]</sup>、欧洲的 Space-QUEST 计划<sup>[6]</sup>、日本的 SOCRATES 星地量子通信实验计划<sup>[7]</sup>. 我国潘建伟院士研究组牵头组织中国科学院战略先导专项“量子科学实验卫

星”项目, 并计划于2016年左右发射全球首个量子通信卫星<sup>[8]</sup>.

围绕量子网络中的纠缠态制备、信道损失补偿、多用户安全通信等有关问题, 学者们展开了深入的研究. Heilmann 等<sup>[9]</sup>提出了一种基于三维集成光子波导结构来产生高阶单光子 W 态的通用实验装置, 并提出表征该装置中量子门的方法. 文献<sup>[10]</sup>介绍了应用于量子信息网络的连续变量多体及多色量子纠缠态制备方法及实验进展情况. 文献<sup>[11]</sup>提出了一种基于检测与能量插入的量子通信协议, 该协议可应用于任意长距离的量子密钥分发及量子安全直接通信. 文献<sup>[12]</sup>提出了应用于星地量子密钥分发的动态光子偏振补偿方法并进行了实验验证. 基于相位匹配量子搜索算法<sup>[13]</sup>, Hanzo 等<sup>[14]</sup>构造了一种量子辅助最大似然多用户检测方法, 能够达到经典最大似然检测方法的性能, 但复杂度明显降低. 王剑等<sup>[15]</sup>提出了一种基于单光子序列顺序重排的多方控制量子安全直接通信协议, 只有得到所有控制方同意, 接收方才能恢复出发送方的秘密消息. 在文献<sup>[15]</sup>的基础上, 王天银等<sup>[16]</sup>证明量子接收方可以利用伪信号替

\* 国家自然科学基金(批准号: 61172071, 61201194)和陕西省国际科技合作与交流计划(批准号: 2015KW-013, 2014KW02-02)资助的课题.

<sup>†</sup> 通信作者. E-mail: sharon.yg@163.com

换攻击方法逃避控制方的控制, 并对原有协议进行了改进. 文献 [17] 提出了一种基于单光子源的三步式“半量子”安全直接通信方案, 发送方只需具备经典通信能力, 且在进行窃听检测时发送方不需公布任何位置及编码信息. 文献 [18] 提出噪声背景下的量子网络直接通信方案, 量子节点通过共享多粒子 Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) 态及 CNOT 操作传输秘密信息, 接收节点提取部分秘密信息进行窃听检测, 并采用奇偶校验法纠正剩余秘密信息中的比特翻转错误.

无论在陆地或卫星量子通信网中, 一条端到端的量子信息传输路径往往要经过多个量子通信节点, 如何选择最佳中继节点、寻找最优路径成为关键的问题. 聂敏和卢光跃 [19] 提出了基于纠缠中继模型的量子移动 Ad Hoc 网络桥接方案; 刘晓慧等 [20] 提出了量子隐形传态网络路由策略, 采用纠缠交换建立量子信道, 但路由选择采用经典方法; Cheng 等 [21] 提出了量子域内无线通信网络中的量子路由算法, 但未涉及对路由选择和建立的具体研究; Yu 等 [22] 提出了分布式无线隐形传态网络的路由策略, 以相邻节点间的纠缠对数目作为路由度量.

然而以上研究均假设量子信道是理想的, 并未考虑实际量子网络中的噪声问题. 如果将量子信道的噪声特性与网络中继路径选择策略相结合, 则可能进一步提高量子网络的通信性能. 马鸿洋等 [23] 提出了噪声环境下的小型量子网络路由通信协议, 采用经典的距离向量算法计算量子隐形传态路径, 利用量子纠错码纠正量子路径上的通信误码, 但该协议仅适于两跳内的网络. 由于分析多跳量子信道上噪声对量子通信的影响是比较困难的, 目前有关的研究还较少. 本文从分析噪声背景下多跳量子纠缠交换信道的特性出发, 通过理论推导给出了多跳相位阻尼信道及振幅阻尼信道上的纠缠保真度及等效阻尼系数; 并以中继路径等效阻尼系数为准则, 提出了量子隐形传态网络的纠缠中继路径选择协议并给出其详细工作过程. 基于该协议, 本文对量子网络路径等效阻尼系数、隐形传态保真度、资源预留时间等进行了分析与仿真.

## 2 量子纠缠交换原理

假设在图 1 中,  $A$  要向  $D$  进行量子隐形传态. 这里, 如果两个量子节点之间能够直接共享 Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) 纠缠对, 则称它们

是相邻的, 二者之间的量子信道称为量子链路; 否则这两个节点不相邻, 则它们必须以纠缠交换中继方式建立量子纠缠信道, 此时称二者间的量子信道为多跳纠缠信道, 若中继节点个数为  $n$ , 则跳数计为  $n + 1$ .

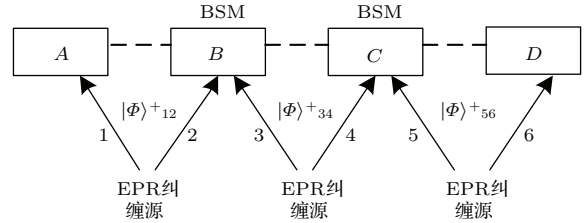


图 1 理想信道上的量子纠缠交换

Fig. 1. Quantum entanglement swapping in ideal channel.

除量子信道外, 相邻量子节点间还需采用经典信道进行必要的辅助信息传递. 由于  $A, D$  节点不相邻, 它们必需经过中继路径  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$  进行纠缠交换. 若量子信道是理想的, 假设纠缠源分发的 EPR 对都处于  $|\phi\rangle^+$  态, 则经过纠缠交换,  $A$  持有的粒子 1 与  $D$  持有的粒子 6 最终可以处于  $|\phi\rangle_{16}^+$  态. 此时, 二者间的纠缠交换信道已经建立起来. 具体过程可参考文献 [24].

## 3 噪声背景下的量子纠缠交换

### 3.1 量子噪声信道模型

在实际情况下, 量子系统不可能完全封闭, 将不可避免地与环境发生相互作用, 产生量子退相干, 从而对量子态与信息的传递带来一定的误差, 称为量子噪声. 常见的量子噪声信道模型有相位阻尼信道、振幅阻尼信道、退极化信道等 [25]. 为克服退相干对量子纠缠的影响, 人们提出纠缠纯化方法提炼出一个纯度较高的子系统 [26, 27]. 但由于纠缠纯化操作的效率与成功率是一对矛盾, 为保证一定的成功率, 纠缠纯度不可能达到 100%, 退相干对量子纠缠的影响无法被完全去除. 在下文中, 主要研究相位阻尼信道及振幅阻尼信道上的多跳量子纠缠特性.

### 3.2 相位阻尼信道上的多跳量子纠缠交换

相位阻尼信道可以用 (1) 式描述. 这里,  $S$  表示系统,  $E$  表示环境,  $p$  表示相位阻尼系数, 其取值范围为  $(0, 1)$ ,  $U_{SEPD}$  为一个作用在系统  $S$  和环境  $E$

的直积空间  $H_S \otimes H_E$  上的么正变换.

$$U_{\text{SEPD}} : \begin{cases} |0\rangle_S |0\rangle_E \rightarrow \\ \sqrt{1-p}|0\rangle_S |0\rangle_E + \sqrt{p}|0\rangle_S |1\rangle_E, \\ |1\rangle_S |0\rangle_E \rightarrow \\ \sqrt{1-p}|1\rangle_S |0\rangle_E + \sqrt{p}|1\rangle_S |2\rangle_E. \end{cases} \quad (1)$$

假设在 1 跳信道上的两个相邻的量子通信节点之间, 分发的 Bell 纠缠态为

$$|\phi\rangle_{12}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle_{12} + |11\rangle_{12}). \quad (2)$$

经过相位阻尼信道后, 该纠缠态与环境的演化为

$$\begin{aligned} & W_{12} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(1-p)|00\rangle_{12}|00\rangle_E \\ &+ \sqrt{p(1-p)}|00\rangle_{12}|01\rangle_E \\ &+ \sqrt{p(1-p)}|00\rangle_{12}|10\rangle_E + p|00\rangle_{12}|11\rangle_E \\ &+ (1-p)|11\rangle_{12}|00\rangle_E \\ &+ \sqrt{p(1-p)}|11\rangle_{12}|02\rangle_E \\ &+ \sqrt{p(1-p)}|11\rangle_{12}|20\rangle_E + p|11\rangle_{12}|22\rangle_E] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ [(1-p)|00\rangle_E + \sqrt{p(1-p)}|01\rangle_E \\ &+ \sqrt{p(1-p)}|10\rangle_E + p|11\rangle_E] |00\rangle_{12} \\ &+ [(1-p)|00\rangle_E + \sqrt{p(1-p)}|02\rangle_E \\ &+ \sqrt{p(1-p)}|20\rangle_E + p|22\rangle_E] |11\rangle_{12} \}. \end{aligned} \quad (3)$$

对环境求偏迹, 可以得到:

$$\rho'_{12} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & (1-p)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1-p)^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

可以计算出  $\rho'_{12}$  相对于  $\rho_{12}$  的 Bures 保真度为

$$\begin{aligned} F(\rho'_{12}, \rho_{12}) &= \left[ \text{Tr}(\sqrt{\sqrt{\rho_{12}}\rho'_{12}\sqrt{\rho_{12}}}) \right]^2 \\ &= \frac{1 + (1-p)^2}{2} = \frac{1 + q^2}{2}. \end{aligned} \quad (5)$$

对于相位阻尼系数分别为  $p_1, p_2$  的两跳纠缠交换信道, 假设每跳分发的量子纠缠态分别为  $|\phi\rangle_{12}^+$  和  $|\phi\rangle_{34}^+$ , 则经过相位阻尼信道后, 系统的总态为

$$\begin{aligned} & |W\rangle_{12} \otimes |W\rangle_{34} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ [(1-p_1)|00\rangle_{E1} + \sqrt{p_1(1-p_1)}|01\rangle_{E1} \\ &+ \sqrt{p_1(1-p_1)}|10\rangle_{E1} + p_1|11\rangle_{E1}] |00\rangle_{12} \\ &+ [(1-p_1)|00\rangle_{E1} + \sqrt{p_1(1-p_1)}|02\rangle_{E1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \sqrt{p_1(1-p_1)}|20\rangle_{E1} + p_1|22\rangle_{E1}] |11\rangle_{12} \} \\ & \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \{ [(1-p_2)|00\rangle_{E2} + \sqrt{p_2(1-p_2)}|01\rangle_{E2} \\ &+ \sqrt{p_2(1-p_2)}|10\rangle_{E2} + p_2|11\rangle_{E2}] |00\rangle_{34} \\ &+ [(1-p_2)|00\rangle_{E2} + \sqrt{p_2(1-p_2)}|02\rangle_{E2} \\ &+ \sqrt{p_2(1-p_2)}|20\rangle_{E2} + p_2|22\rangle_{E2}] |11\rangle_{34} \}. \end{aligned} \quad (6)$$

上式可展开为 64 项, 为方便计算, 令:

$$\begin{aligned} a &= (1-p_1)|00\rangle_{E1} + \sqrt{p_1(1-p_1)}|01\rangle_{E1} \\ &+ \sqrt{p_1(1-p_1)}|10\rangle_{E1} + p_1|11\rangle_{E1}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} b &= (1-p_1)|00\rangle_{E1} + \sqrt{p_1(1-p_1)}|02\rangle_{E1} \\ &+ \sqrt{p_1(1-p_1)}|20\rangle_{E1} + p_1|22\rangle_{E1}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} c &= (1-p_2)|00\rangle_{E2} + \sqrt{p_2(1-p_2)}|01\rangle_{E2} \\ &+ \sqrt{p_2(1-p_2)}|10\rangle_{E2} + p_2|11\rangle_{E2}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} d &= (1-p_2)|00\rangle_{E2} + \sqrt{p_2(1-p_2)}|02\rangle_{E2} \\ &+ \sqrt{p_2(1-p_2)}|20\rangle_{E2} + p_2|22\rangle_{E2}. \end{aligned} \quad (10)$$

则 (6) 式可展开为

$$\begin{aligned} & |W\rangle_{12} \otimes |W\rangle_{34} \\ &= \frac{1}{2} (ac|00\rangle_{12}|00\rangle_{34} + ad|00\rangle_{12}|11\rangle_{34} \\ &+ bc|11\rangle_{12}|00\rangle_{34} + bd|11\rangle_{12}|11\rangle_{34}) \\ &= \frac{1}{2} (ac|00\rangle_{23}|00\rangle_{14} + ad|01\rangle_{23}|01\rangle_{14} \\ &+ bc|10\rangle_{23}|10\rangle_{14} + bd|11\rangle_{23}|11\rangle_{14}). \end{aligned} \quad (11)$$

接下来, 中继节点  $R$  对粒子 2, 3 进行 Bell 基测量, 测量结果将塌缩到  $|\phi\rangle_{23}^+, |\phi\rangle_{23}^-, |\phi\rangle_{23}^+, |\phi\rangle_{23}^-$  四个 Bell 态中的一个. 假设测量结果塌缩为  $|\phi\rangle_{23}^+$ , 由于

$$\begin{aligned} |00\rangle_{23} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi\rangle_{23}^+ + |\phi\rangle_{23}^-), \\ |11\rangle_{23} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi\rangle_{23}^+ - |\phi\rangle_{23}^-), \end{aligned} \quad (12)$$

则粒子 1, 4 所处的量子纠缠态为

$$|W\rangle_{14} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(ac|00\rangle_{14} + bd|11\rangle_{14}). \quad (13)$$

将  $ac$  展开, 可以得到 16 项:

$$\begin{aligned} ac &= (1-p_1)(1-p_2)|00\rangle_{E1}|00\rangle_{E2} \\ &+ \sqrt{p_1(1-p_1)}\sqrt{p_2(1-p_2)}|01\rangle_{E1}|01\rangle_{E2} \\ &+ \sqrt{p_1(1-p_1)}\sqrt{p_2(1-p_2)}|10\rangle_{E1}|10\rangle_{E2} \\ &+ p_1p_2|11\rangle_{E1}|11\rangle_{E2} \\ &+ (1-p_1)\sqrt{p_2(1-p_2)}|00\rangle_{E1}|01\rangle_{E2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (1 - p_1)\sqrt{p_2(1 - p_2)}|00\rangle_{E1}|10\rangle_{E2} \\
 & + (1 - p_1)p_2|00\rangle_{E1}|11\rangle_{E2} \\
 & + \sqrt{p_1(1 - p_1)}(1 - p_2)|01\rangle_{E1}|00\rangle_{E2} \\
 & + \sqrt{p_1(1 - p_1)}\sqrt{p_2(1 - p_2)}|01\rangle_{E1}|10\rangle_{E2} \\
 & + \sqrt{p_1(1 - p_1)}p_2|01\rangle_{E1}|11\rangle_{E2} \\
 & + \sqrt{p_1(1 - p_1)}(1 - p_2)|10\rangle_{E1}|00\rangle_{E2} \\
 & + \sqrt{p_1(1 - p_1)}\sqrt{p_2(1 - p_2)}|10\rangle_{E1}|01\rangle_{E2} \\
 & + \sqrt{p_1(1 - p_1)}p_2|10\rangle_{E1}|11\rangle_{E2} \\
 & + p_1(1 - p_2)|11\rangle_{E1}|00\rangle_{E2} \\
 & + p_1\sqrt{p_2(1 - p_2)}|11\rangle_{E1}|01\rangle_{E2} \\
 & + p_1\sqrt{p_2(1 - p_2)}|11\rangle_{E1}|10\rangle_{E2}. \tag{14}
 \end{aligned}$$

将  $bd$  展开, 可以得到 16 项:

$$\begin{aligned}
 bd = & (1 - p_1)(1 - p_2)|00\rangle_{E1}|00\rangle_{E2} \\
 & + \sqrt{p_1(1 - p_1)}\sqrt{p_2(1 - p_2)}|02\rangle_{E1}|02\rangle_{E2} \\
 & + \sqrt{p_1(1 - p_1)}\sqrt{p_2(1 - p_2)}|20\rangle_{E1}|20\rangle_{E2} \\
 & + p_1p_2|22\rangle_{E1}|22\rangle_{E2} \\
 & + (1 - p_1)\sqrt{p_2(1 - p_2)}|00\rangle_{E1}|02\rangle_{E2} \\
 & + (1 - p_1)\sqrt{p_2(1 - p_2)}|00\rangle_{E1}|20\rangle_{E2} \\
 & + (1 - p_1)p_2|00\rangle_{E1}|22\rangle_{E2} \\
 & + \sqrt{p_1(1 - p_1)}(1 - p_2)|02\rangle_{E1}|00\rangle_{E2} \\
 & + \sqrt{p_1(1 - p_1)}\sqrt{p_2(1 - p_2)}|02\rangle_{E1}|20\rangle_{E2} \\
 & + \sqrt{p_1(1 - p_1)}p_2|02\rangle_{E1}|22\rangle_{E2} \\
 & + \sqrt{p_1(1 - p_1)}(1 - p_2)|20\rangle_{E1}|00\rangle_{E2} \\
 & + \sqrt{p_1(1 - p_1)}\sqrt{p_2(1 - p_2)}|20\rangle_{E1}|02\rangle_{E2} \\
 & + \sqrt{p_1(1 - p_1)}p_2|20\rangle_{E1}|22\rangle_{E2} \\
 & + p_1(1 - p_2)|22\rangle_{E1}|00\rangle_{E2} \\
 & + p_1\sqrt{p_2(1 - p_2)}|22\rangle_{E1}|02\rangle_{E2} \\
 & + p_1\sqrt{p_2(1 - p_2)}|22\rangle_{E1}|20\rangle_{E2}. \tag{15}
 \end{aligned}$$

将 (14) 和 (15) 式代入 (13) 式, 再对环境  $E1, E2$  求

偏迹, 可以得到粒子 1, 4 所处的纠缠态的密度矩阵:

$$\rho'_{14} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_1^2 q_2^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_1^2 q_2^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

这里  $q_1 = 1 - p_1, q_2 = 1 - p_2$ . 根据 (16) 式, 可以计算出 2 跳相位阻尼信道上的纠缠交换之后, 纠缠态  $\rho'_{14}$  相对于未经历相位阻尼信道的纠缠态  $\rho_{14}$  的 Bures 保真度为

$$\begin{aligned}
 F_{PD}(\rho'_{14}, \rho_{14}) & = \left[ \text{Tr}(\sqrt{\sqrt{\rho_{14}}\rho'_{14}\sqrt{\rho_{14}}}) \right]^2 \\
 & = \frac{1 + q_1^2 q_2^2}{2}. \tag{17}
 \end{aligned}$$

根据量子纠缠交换的操作过程, 利用等效计算方法, 可以得到多跳相位阻尼纠缠交换信道上的等效阻尼系数为

$$p_{\text{equ},n} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_n). \tag{18}$$

同理, 可以得到多跳相位阻尼纠缠交换信道上的纠缠保真度为

$$F_{\text{equ},n} = \frac{1}{2} \left( 1 + \prod_{i=1}^n q_i^2 \right). \tag{19}$$

### 3.3 振幅阻尼信道上的多跳量子纠缠交换

在振幅阻尼信道上, 系统与环境的演化可以用 (20) 式描述. 这里  $S$  表示系统,  $E$  表示环境,  $\lambda$  为振幅阻尼系数, 其取值范围为  $(0, 1)$ .

$$U_{\text{SEAD}} = \begin{cases} |0\rangle_S |0\rangle_E \rightarrow |0\rangle_S |0\rangle_E, \\ |1\rangle_S |0\rangle_E \rightarrow \sqrt{1 - \lambda} |1\rangle_S |0\rangle_E \\ \quad + \sqrt{\lambda} |0\rangle_S |1\rangle_E. \end{cases} \tag{20}$$

利用与 3.2 节类似的方法, 可以得到在两跳振幅阻尼纠缠信道上, 经过纠缠交换之后, 粒子 1, 4 所处的纠缠态的密度矩阵为

$$\rho''_{14} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1^2 \lambda_2^2 & 0 & 0 & (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) \\ +\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2^2 - \lambda_1^2 \lambda_2 & & & \\ 0 & (1 - \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2) & 0 & 0 \\ -\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1^2 + 2\lambda_1^2 \lambda_2 & & & \\ 0 & 0 & (1 - \lambda_1)(\lambda_1 + \lambda_2) & 0 \\ -\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_2^2 + 2\lambda_1 \lambda_2^2 & & & \\ (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) & 0 & 0 & (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)(1 + 2\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_2) \end{bmatrix}, \tag{21}$$

这里,  $L$  为归一化因子. 可以计算出 2 跳振幅阻尼信道上, 纠缠态  $\rho''_{14}$  相对于未经历振幅阻尼信道的纠缠态  $\rho_{14}$  的 Bures 保真度为

$$\begin{aligned}
 & F_{AD}(\rho''_{14}, \rho_{14}) \\
 &= \left[ \text{Tr} \left( \sqrt{\sqrt{\rho_{14}} \rho''_{14} \sqrt{\rho_{14}}} \right) \right]^2 \\
 &= \frac{1}{2 + 2\lambda_1 \lambda_2} (2 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1^2 \\
 &\quad + \lambda_2^2 - 2\lambda_1^2 \lambda_2 - 2\lambda_1 \lambda_2^2 + 2\lambda_1^2 \lambda_2^2). \quad (22)
 \end{aligned}$$

根据量子纠缠交换的操作过程, 利用等效计算方法, 可以得到两跳振幅阻尼纠缠交换信道上的等效阻尼系数为

$$\begin{aligned}
 & \lambda_{\text{equ},2} \\
 &= 1 - \left[ \frac{1}{1 + \lambda_1 \lambda_2} \left( 1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \lambda_2^2 - 2\lambda_1^2 \lambda_2 - 2\lambda_1 \lambda_2^2 + 2\lambda_1^2 \lambda_2^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (23)
 \end{aligned}$$

通过迭代计算方法, 可以进一步得到多跳振幅阻尼纠缠交换信道上的等效阻尼系数, 这里就不再赘述了.

## 4 量子多跳纠缠最佳中继协议

### 4.1 最佳中继协议设计思路

在实际情况下量子通信网络中存在退相干. 图 2 是一个带有相位阻尼的固定量子通信网络, 各段量子链路具有不同的相位阻尼系数. 每个量子通

信节点可以完成两种功能: 1) 作为量子通信的源端或目的端; 2) 作为量子纠缠交换的中继节点.

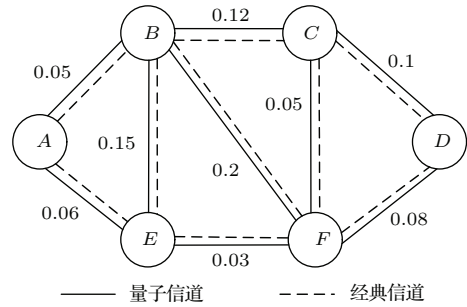


图 2 带有相位阻尼的量子纠缠通信网络

Fig. 2. Quantum entanglement communication network with phase damping.

假设节点  $A$  要向  $D$  进行隐形传态, 则可能选择的纠缠交换路径有多条, 如  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ ,  $A \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow D$ ,  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow D$  等. 考虑到退相干的影响, 本文主要以多跳纠缠中继路径上的等效噪声系数为准则选择最佳路径. 等效相位阻尼系数越小, 则多跳纠缠保真度越大, 隐形传态通信效果越好. 根据该准则, 本文设计了纠缠网络中继路径选择协议, 量子节点以分布式策略进行量子链路信息发布、收集与路径计算. 协议应完成的主要工作有: 邻居发现、量子链路噪声参数测量、量子链路状态信息传递、最佳中继路径计算等. 为完成这些工作, 量子通信节点间需在经典信道上彼此交换一些协议消息, 主要的消息类型如图 3 所示.

消息类型	消息关键参数	用途
HELLO	纠缠源编号列表 发送节点地址	邻居发现
QLMR	发送节点地址 接收节点地址 纠缠源编号	量子链路测量
QLMA	发送节点地址 接收节点地址 纠缠源编号	
QLSA	链路端点地址 链路噪声参数 序号 生存期	传递链路状态
ERRR	源节点地址 目的节点地址 中继节点列表 预留标志列表 请求编号	中继路径资源预留
ERRS	源节点地址 目的节点地址 中继节点列表 请求编号	
ERRF	源节点地址 目的节点地址 中继节点列表 预留标志列表 请求编号	
ERRL	源节点地址 目的节点地址 中继节点列表 请求编号	中继路径资源释放
ERLA	源节点地址 目的节点地址 中继节点列表 请求编号	

图 3 量子中继协议消息类型与参数

Fig. 3. Type and parameters of the quantum relay protocol messages.

### 4.2 邻居发现

各个量子通信节点为了解自己拥有哪些邻居节点, 需要以广播方式周期地向外发送问候 (Hello) 消息. 消息中的纠缠源编号列表记录了与该发送节

点具有 EPR 纠缠分发关系的一组纠缠源编号. 假定某节点收到 Hello 消息, 分析其中的纠缠源编号是否存在于自己的纠缠源列表中, 如果存在, 则说明该节点与发送节点可以共享相同的纠缠源产生的 EPR 纠缠对, 则二者是相邻节点; 否则不相邻.

### 4.3 量子链路噪声参数测量

量子链路噪声参数的测量在相邻的量子通信节点间进行. 当相邻节点建立新的邻居关系或量子链路状态发生改变时, 两者中地址大的一方发出量子链路测量请求 (quantum link measurement request, QLMR) 消息, 启动二者之间的量子链路噪声参数测量过程. 收到 QLMR 消息的节点如果同意进行量子链路噪声参数测量, 则向对端邻居节点回复量子链路测量应答 (quantum link measurement acknowledgement, QLMA) 消息. 量子链路测量的方法主要是通过量子信道噪声估计的方法获取噪声参数, 对于相位阻尼信道、振幅阻尼信道等, 有关学者已提出了具体的参数估计方法, 通过寻找最佳的输入量子态、最佳测量算子及估计算子, 可以得到最佳的参数估计结果 [28,29].

### 4.4 量子链路状态信息传递

在相邻节点进行量子链路噪声参数测量后, 地址大的节点以广播泛洪的方式向外发布量子链路状态通告 (quantum link status advertisement, QLSA) 消息, 从而让全网中的各个节点获取每段量子链路上的噪声参数. 这里, 链路端点地址包括两个相邻量子节点的地址, 链路噪声参数根据不同的噪声信道模型可以是相位阻尼系数或振幅阻尼系数等. 发送节点每发送关于同一量子链路的新的 QLSA 消息, 序号增加 1. 如果中间节点收到具有重复序号的或序号更小的 QLSA, 则不继续转发. 生存期赋予一定的初值, 每经过一个中间节点该值减少 1, 生存期为 0 的 QLSA 不被继续转发, 从而限制泛洪的规模. 为维持全网的链路状态信息, 量子链路状态泛洪过程每隔 30 min 应强制刷新一次.

### 4.5 最佳中继路径计算

经过一段时间的 QLSA 消息泛洪, 每个节点都能够获取全网量子链路的信道噪声参数信息. 根

据这些信息, 各节点以最小化纠缠中继路径等效噪声系数为准则, 计算出自己到其他各个量子节点的最佳纠缠交换中继路径. 结合量子路径计算的需求, 在经典 Dijkstra 算法的基础上, 本文进行了改进, 具体描述如下.

首先需定义算法中的几个变量 (假设源节点为  $A$ ):

$k(i, j)$ , 量子通信节点  $i$  到  $j$  的噪声参数, 假如  $i$  与  $j$  相邻, 则  $k(i, j)$  等于  $i$  与  $j$  之间量子链路的噪声系数, 否则  $k(i, j) = \infty$ ;

$e(v)$ , 从源节点  $A$  到目的节点  $v$  的纠缠交换中继路径的当前最小等效噪声系数;

$Q(v)$ , 从源节点  $A$  到目的节点  $v$  的当前最小等效噪声中继路径上的前一节点;

$N$ , 最佳中继路径已确定的节点集合.

算法步骤如下:

1) 初始化 令  $N = \{A\}$ ,  $e(V) = k(A, V)$ ,  $V$  为不属于  $N$  的任意节点;

2) 迭代 在所有不属于  $N$  的节点  $j$  中, 寻找一个节点  $U$ , 且满足  $e(U) = \min\{e(j)\}$ , 并将  $U$  纳入集合  $N$ ;

3) 更新 对所有与节点  $U$  相邻但不属于  $N$  的节点  $V$ , 按照以下方法更新其  $e(V)$  值:

$$e(V) = \min\{e(V), f(e(U), k(U, V))\}.$$

这里,  $f(x, y)$  表示纠缠中继路径等效噪声系数计算公式, 对于相位阻尼信道可以按照 (18) 式计算, 对于振幅阻尼信道可以按照 (23) 式计算.

循环执行步骤 2) 和 3), 直到所有节点均在  $N$  中, 算法结束, 此时源节点  $A$  已经计算出到达所有目的节点的最佳中继路径并记录在自己的路径列表中.

表 1 给出了以图 2 为例、且  $A$  节点作为源节点的最佳中继路径计算过程. 可见, 经过 5 轮运算,  $A$  获得了到达所有目的节点的最佳路径及路径等效相位阻尼系数.

表 1 中继路径算法示例

Table 1. An example of relay path algorithm.

$N$	$e(B), Q(B)$	$e(C), Q(C)$	$e(D), Q(D)$	$e(E), Q(E)$	$e(F), Q(F)$
初始化 $A$	0.05, $A$	—, —	—, —	0.06, $A$	—, —
1 $A, B$		0.164, $B$	—, —	0.06, $A$	0.24, $B$
2 $A, B, E$		0.164, $B$	—, —		0.0882, $E$
3 $A, B, E, F$		0.1338, $F$	0.1611, $F$		
4 $A, B, E, F, C$			0.1611, $F$		
5 $A, B, E, F, C, D$					

### 4.6 量子中继路径的资源预留

根据 4.5 节中的最佳路径算法, 量子通信节点会首先选用具有较小噪声系数的优势量子链路, 可能造成优势量子链路的拥塞. 受到量子处理能力的影响, 两个相邻节点间能够同时维持的量子纠缠连接的数量是有限的, 发生拥塞的量子链路无法为新的用户分发纠缠资源, 最终导致纠缠交换路径建立失败. 为克服以上问题, 本文采用了纠缠资源预留机理. 每个量子通信节点维持一个纠缠资源列表,

其内容包括: 纠缠源编号、邻居节点地址、纠缠资源总数、空闲纠缠资源数量.

资源成功预留的过程如图 4 所示, 使用的主要消息有: 纠缠资源预留请求 ERRR 消息; 资源预留成功 ERRS 消息. ERRR 消息中具有与中继节点列表对应的预留标志, 如果该中继节点有空闲纠缠资源, 则对应标志置为 1, 否则置为 0. 当量子隐形传态结束, 源节点发送资源释放 ERRL 消息, 收到该消息的中继节点将自己的空闲纠缠资源加 1 并返回释放应答 ERLA 消息.

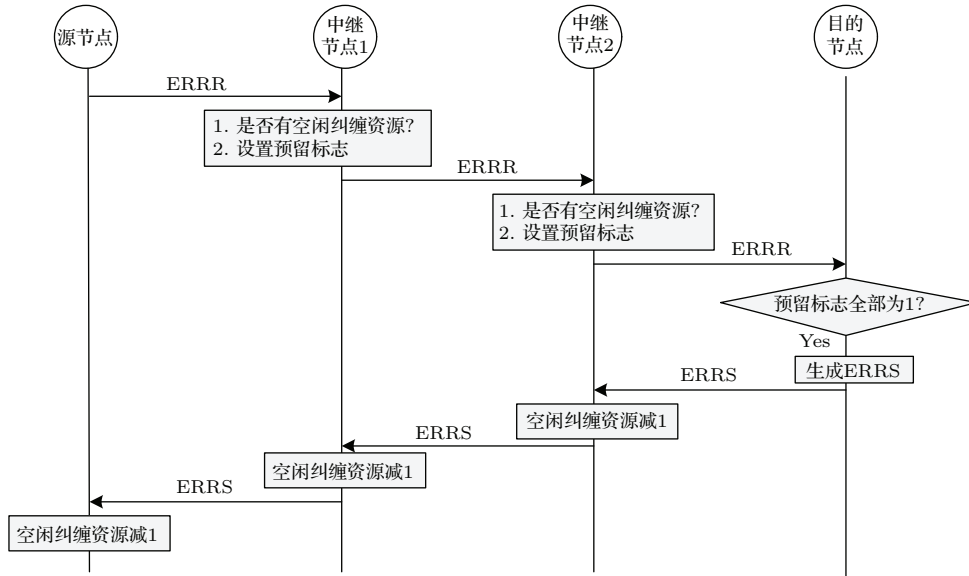


图 4 成功的纠缠资源预留过程

Fig. 4. Procedure of a successful entanglement resource reservation.

若目的节点发现预留标志列表非全 1, 则返回资源预留失败 ERRF 消息. 源节点根据预留失败标志标记相应的量子链路为不可用状态并重新计算最佳中继路径.

## 5 性能分析与仿真

### 5.1 多跳纠缠信道上的等效阻尼系数

根据 (18) 和 (23) 式, 图 5 给出了两跳噪声信道上的等效阻尼系数. 从图 5 (a) 可以看出, 两跳相位阻尼纠缠信道上的等效相位阻尼系数随着每跳链路上的阻尼系数的增大而增加, 且等效阻尼系数大于每跳链路上的阻尼系数. 根据 (18) 式, 可以进一步得出多跳信道上的等效阻尼系数同样随每跳链路上的阻尼系数的增大而增加, 且大于每跳链路上的阻尼系数. 从图 5 (b) 可以看出, 此结论对于两跳及多跳振幅阻尼信道也适用.

### 5.2 等效阻尼系数对隐形传态保真度的影响

下面分析在不同类型量子噪声信道模型下, 等效阻尼系数对隐形传态保真度的影响. 假定在隐形传态过程中, 待发送的量子态为  $|\Psi\rangle_0 = \alpha|0\rangle_0 + \beta|1\rangle_0$ .

在等效相位阻尼系数为  $p$  的信道上执行隐形传态后, 接收端获得的量子态为

$$\begin{aligned}
 & |\Psi\rangle_{PD} \\
 &= \frac{1}{2} \{ \alpha[(1-p)|00\rangle_E + \sqrt{p(1-p)}|01\rangle_E \\
 &+ \sqrt{p(1-p)}|10\rangle_E + p|11\rangle_E] |0\rangle_2 \\
 &+ \beta[(1-p)|00\rangle_E + \sqrt{p(1-p)}|02\rangle_E \\
 &+ \sqrt{p(1-p)}|20\rangle_E + p|22\rangle_E] |1\rangle_2 \}. \quad (24)
 \end{aligned}$$

对环境求偏迹, 可以得到该量子态的密度



矩阵为

$$\rho_{PD} = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^*(1-p)^2 \\ \alpha^*\beta(1-p)^2 & |\beta|^2 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

$\rho_{PD}$  相对于  $\rho_0$  的保真度为

$$F(\rho_{PD}, \rho_0) = \left[ \text{Tr} \left( \sqrt{\sqrt{\rho_0} \rho_{PD} \sqrt{\rho_0}} \right) \right]^2. \quad (26)$$

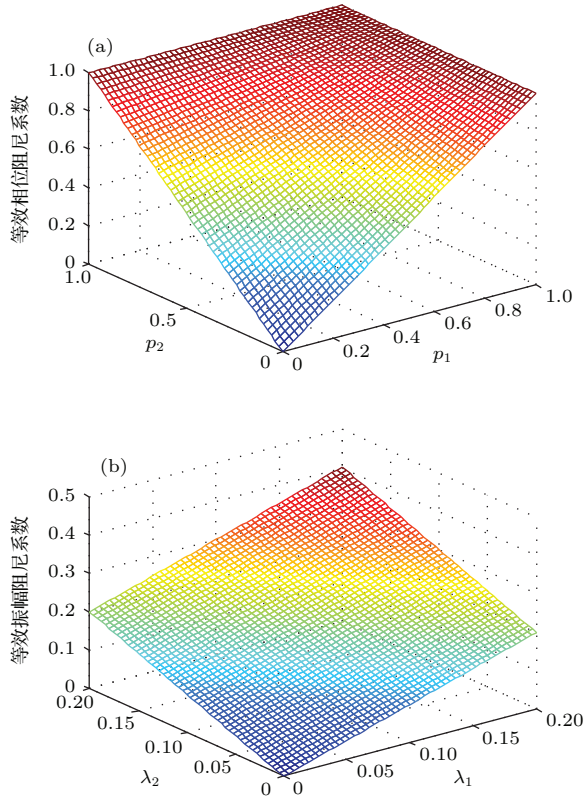


图5 (网刊彩色) 两跳阻尼信道上的等效阻尼系数 (a) 相位阻尼信道; (b) 振幅阻尼信道

Fig. 5. (color online) Equivalent damping factor of 2-hop channel: (a) Phase damping; (b) amplitude damping.

采用类似的方法, 可以计算出在等效振幅阻尼系数为  $\lambda$  的信道上, 执行隐形传态之后, 接收端获得的量子态的密度矩阵为

$$\rho_{AD} = \frac{1}{L_{AD}} \begin{bmatrix} |\alpha|^2 + |\alpha|^2\lambda^2 & \alpha\beta^*(1-\lambda) \\ +|\beta|^2\lambda(1-\lambda) & |\beta|^2(1-\lambda)^2 \\ \alpha^*\beta(1-\lambda) & +|\alpha|^2\lambda(1-\lambda) \end{bmatrix}, \quad (27)$$

这里,  $L_{AD}$  为归一化因子.  $\rho_{AD}$  相对于  $\rho_0$  的保真度为

$$F(\rho_{AD}, \rho_0) = \left[ \text{Tr} \left( \sqrt{\sqrt{\rho_0} \rho_{AD} \sqrt{\rho_0}} \right) \right]^2. \quad (28)$$

图6给出了多跳中继路径等效阻尼系数对隐形传态保真度的影响. 图中, 待传送的量子态分别

为  $|\Psi\rangle_0 = 0.3|0\rangle_0 + \sqrt{1-0.3^2}|1\rangle_0$ ,  $|\Psi\rangle_0 = 0.5|0\rangle_0 + \sqrt{1-0.5^2}|1\rangle_0$  以及  $|\Psi\rangle_0 = 0.7|0\rangle_0 + \sqrt{1-0.7^2}|1\rangle_0$ . 可以看出, 无论是在相位阻尼信道还是在振幅阻尼信道上, 隐形传态的保真度都随着路径等效阻尼系数的增大而减小. 因而, 在计算最优纠缠中继路径时, 采用路径等效阻尼系数最小化的原则与路径隐形传态保真度最大化的原则是一致的, 且前者在执行路径选择算法时更为简便.

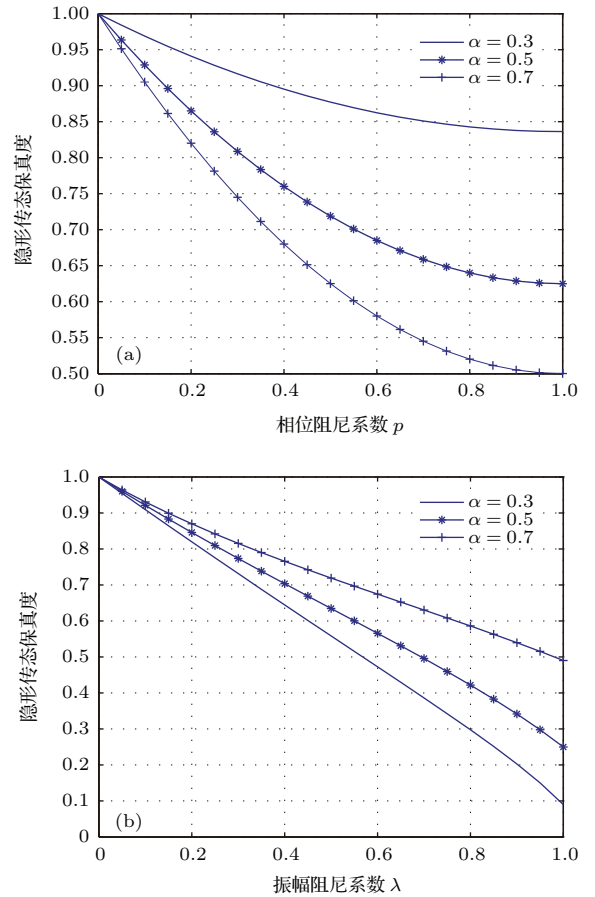


图6 等效阻尼系数对隐形传态保真度的影响 (a) 相位阻尼信道; (b) 振幅阻尼信道

Fig. 6. Influence of equivalent damping factor on quantum teleportation fidelity: (a) Phase damping; (b) amplitude damping.

### 5.3 中继协议的性能

#### 5.3.1 纠缠资源不受限时的等效阻尼系数

首先假定在多跳量子网络中的各个链路上, 两相邻节点能同时维持的量子纠缠连接数量足够大, 且产生量子纠缠连接请求数量相对较少, 则根据本文方法, 每个请求都能成功预留资源并采用4.5节的算法计算最佳纠缠中继路径并进行通信.

图7给出了在量子网络节点数为6—14, 量子链路阻尼系数随机分布于(0, 0.2)区间时, 采用本

文方法得到的中继路径平均等效阻尼系数与文献[22]方法的对比. 可见, 无论是对于相位阻尼信道还是振幅阻尼信道上, 本文算法得到的路径平均等效阻尼系数均小于文献[22]的方法. 此外, 可以看出, 随着网络节点数量的增加, 平均等效阻尼系数有所增加, 这是由于路径平均跳数增加所导致的.

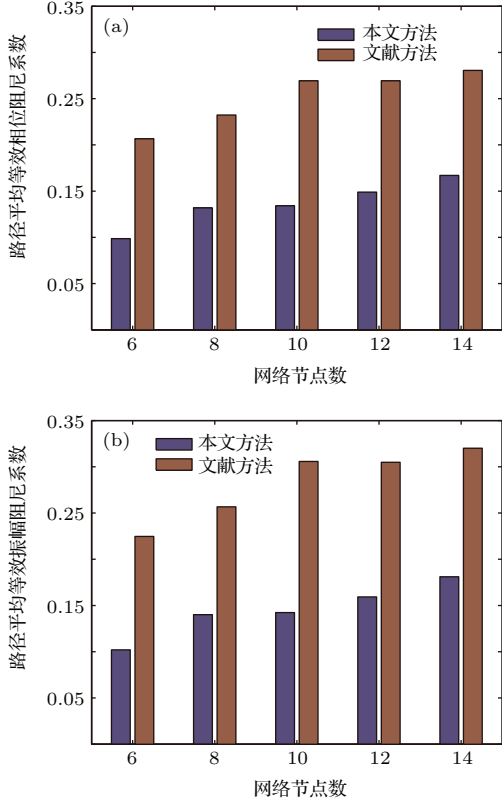


图7 (网刊彩色) 纠缠资源不受限时的量子中继路径平均等效阻尼系数 (a) 相位阻尼信道; (b) 振幅阻尼信道  
Fig. 7. (color online) Average equivalent damping factor of quantum relay path with unlimited entanglement resources: (a) Phase damping; (b) amplitude damping.

### 5.3.2 纠缠资源受限时的协议性能

设量子网络中的量子纠缠连接流为  $s$ , 且每个连接流的到达率为  $x_s$ , 在量子链路资源受限的情况下, 经过任一链路  $(i, j)$  上的连接到达率  $\tau_{ij}$  由以下公式计算:

$$\tau_{ij} = \sum_{\substack{\text{所有经过}(i,j) \\ \text{的分组流 } s}} x_s. \quad (29)$$

假定链路  $(i, j)$  上能够同时维持的量子纠缠连接的数量为  $n_{ij}$ , 当  $n_{ij} < \tau_{ij}$  时称为纠缠资源受限, 则此时量子网络中需重新进行路径计算的概率为

$$P_r = 1 - \prod_{\substack{\text{所有最佳路径} \\ \text{上的链路}(i,j)}} P(n_{ij} \geq \tau_{ij}). \quad (30)$$

假设在量子网络中同时产生了  $R$  个纠缠资源连接请求. 对于第  $i$  个请求, 经过  $M_i$  次资源预留才成功, 设第  $k$  次预留使用的中继路径的跳数为  $H_{i,k}$ . 为了便于计算, 假设在每跳量子链路上花费的经典消息传输与处理时延为  $d$ , 则网络中的平均纠缠中继路径建立时间为

$$D_{avr} = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \sum_{k=1}^{M_i} 2H_{i,k}d. \quad (31)$$

图8和图9分别给出了6节点与10节点量子网络中, 在各个源节点上的纠缠连接请求数量在  $(0, 5)$  区间随机取值时, 随着量子链路纠缠资源数量的增加, 路径平均等效阻尼系数以及路径平均资源预留时间的变化情况. 可见, 在链路纠缠资源较少的情况下, 优势量子链路资源不足导致纠缠中继路径重新计算, 进而选择阻尼系数较大的链路, 使得路径平均等效阻尼系数较大、路径平均资源预留时间

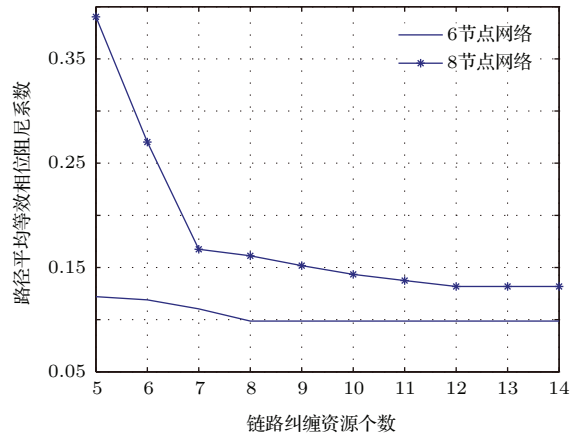


图8 链路纠缠资源个数对路径平均等效阻尼系数的影响  
Fig. 8. Influence of the number of entanglement resources on average path equivalent damping factor.

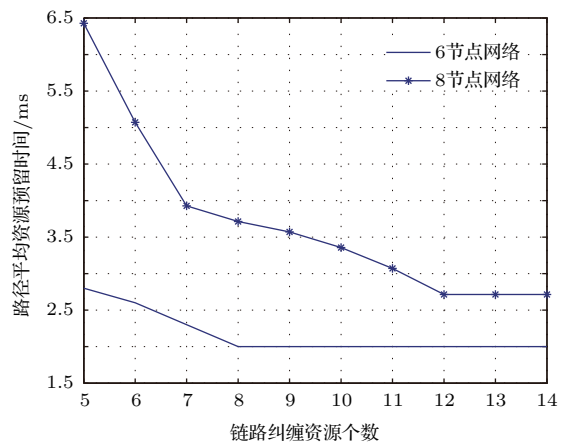


图9 链路纠缠资源个数对路径平均资源预留时间的影响  
Fig. 9. Influence of the number of entanglement resources on average path resource reservation time.

较长. 随着链路纠缠资源增加, 这两项指标减小; 当纠缠资源数量继续增加并大于请求的资源数量时, 路径平均等效阻尼系数、路径平均资源预留时间逐渐稳定于较小值.

## 6 结 论

在基于纠缠的量子通信网中, 端到端的纠缠交换中继路径会受到量子信道噪声的影响. 尽管在相关的量子节点上可以进行纠缠纯化以提高纠缠质量, 但为保证一定的纯化成功率, 纯化效率无法达到100%. 为从源端到达目的端, 量子网络中存在的纠缠中继路径通常有多条, 不同路径受到量子信道噪声的影响不同, 如何衡量并选择一条最佳的纠缠中继路径是影响量子通信性能的关键因素.

本文分析了相位阻尼信道与振幅阻尼信道上的多跳纠缠交换过程, 通过理论推导给出了多跳纠缠交换信道的纠缠保真度及等效阻尼系数, 并以后者作为衡量最佳路径的准则, 提出了隐形传态网络中的最佳纠缠中继路径选择协议. 最后, 通过分析与仿真说明了本文协议所选择的路径能够获得更高的隐形传态质量. 受到量子通信网中节点处理能力的限制, 对于选定的中继路径需要先进行纠缠资源预留. 量子节点能同时维持的量子纠缠连接越多, 则量子通信质量越高, 但网络构建的成本和技术要求更高. 根据本文的分析结果, 在进行量子网络设计时, 可以根据网络的规模、用户的请求到达情况、用户期望的路径等效阻尼系数及资源预留时间等, 合理地配置网络链路路上的纠缠资源数量.

## 参考文献

- [1] Sergienko A V 2006 *Quantum Communications and Cryptography* (Florida: Taylor & Francis Group CRC Press) pp83–102
- [2] Poppe A, Peev M, Maurhart O 2008 *Int. J. Quantum Inf.* **6** 209
- [3] Xu F X, Chen W, Wang S, Yin Z Q, Zhang Y, Liu Y, Zhou Z, Zhao Y B, Li H W, Liu D, Han Z F, Guo G C 2009 *Chin. Sci. Bull.* **54** 2991
- [4] Xu H X 2014 *J. CAEIT* **9** 259 (in Chinese) [许华醒 2014 中国电子科学研究院学报 **9** 259]
- [5] Hughes R J, Buttler W T, Kwiat P G, Lamoreaux S K, Morgan G L, Nordholt J E, Peterson C G 2000 *Aerospace Conference Proceedings, 2000 IEEE Big Sky MT, USA*, March 18–25, 2000 p191
- [6] Ursin R, Jennewein T, Kofler J, Perdignes J M, Cacciapuoti L, Zeilinger A 2009 *Europhys. News* **40** 26
- [7] Toyoshima M, Takayama Y, Takahashi T, Suzuki K, Kimura S 2008 *IEEE Aerosp. Electron. Syst. Mag.* **23** 10
- [8] Yin J, Cao Y, Liu S B, Pan G S, Wang J H, Yang T, Pan J W 2013 *Opt. Express* **21** 20032
- [9] Heilmann R, Gräfe M, Nolte S, Szameit A 2015 *Sci. Bull.* **60** 96
- [10] Su X L, Jia X J, Xie C D, Peng K C 2014 *Sci. China: Phys. Mech. Astron.* **57** 1210
- [11] Wang W Y, Wang C, Zhang G Y 2009 *Chin. Sci. Bull.* **54** 158
- [12] Wang C Z, Guo H, Ren J G, Cao Y, Peng C Z, Liu W Y 2014 *Sci. China: Phys. Mech. Astron.* **57** 1233
- [13] Long G L, Li Y S, Zhang W L, Niu L 1999 *Phys. Lett. A* **262** 27
- [14] Botsinis P, Ng S X, Hanzo L 2013 *Access. IEEE* **1** 94
- [15] Wang J, Chen H Q, Zhang Q, Tang C J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 673 (in Chinese) [王剑, 陈皇卿, 张权, 唐朝京 2007 物理学报 **56** 673]
- [16] Wang T Y, Qin S J, Wen Q Y, Zhu F C 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7452 (in Chinese) [王天银, 秦素娟, 温巧燕, 朱甫臣 2008 物理学报 **57** 7452]
- [17] Zou X F, Qiu D W 2014 *Sci. China: Phys. Mech. Astron.* **57** 1696
- [18] Ma H Y, Qin G Q, Fan X K, Chu P C 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 160306 (in Chinese) [马鸿洋, 秦国卿, 范兴奎, 初鹏程 2015 物理学报 **64** 160306]
- [19] Nie M, Lu G Y 2008 *J. Northwest Univ. (Nat. Sci. Ed.)* **38** 905 (in Chinese) [聂敏, 卢光跃 2008 西北大学学报自然科学版 **38** 905]
- [20] Liu X H, Pei C X, Nie M 2014 *J. Jilin Univ. (Technol. Ed.)* **44** 1177 (in Chinese) [刘晓慧, 裴昌幸, 聂敏 2014 吉林大学学报工学版 **44** 1177]
- [21] Cheng S T, Wang C Y, Tao M H 2005 *IEEE J. Sel. Areas Commun.* **23** 1424
- [22] Yu X T, Zhang Z C, Xu J 2014 *Chin. Phys. B* **23** 010303
- [23] Ma H Y, Guo Z W, Fan X K, Wang S M 2015 *Acta Electron. Sin.* **43** 171 (in Chinese) [马鸿洋, 郭忠文, 范兴奎, 王淑梅 2015 电子学报 **43** 171]
- [24] Yin H, Han Y 2012 *Quantum Communication Theory and Technology* (Beijing: Publishing House of Electronics Industry) pp202–211 (in Chinese) [尹浩, 韩阳 2013 量子通信原理与技术 (北京: 电子工业出版社) 第202—211页]
- [25] Zhang Y D 2012 *Principles of Quantum Information Physics* (Beijing: Science Press) pp147–253 (in Chinese) [张永德 2012 量子信息物理原理 (北京: 科学出版社) 第147—172页]
- [26] Bennett C H, Brassard G, Popescu S, Schumacher B, Smolin J A, Wootters W K 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 722
- [27] Nicolas S, Christoph S, Hugues D R, Nicolas G 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 33
- [28] Fujiwara A 2004 *Phys. Rev. A* **70** 012317
- [29] Sarovar M, Milburn G J 2006 *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** 8487

# Characteristics of multi-hop noisy quantum entanglement channel and optimal relay protocol\*

Yang Guang<sup>†</sup> Lian Bao-Wang Nie Min

(School of Electronics and Information, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

( Received 24 July 2015; revised manuscript received 6 September 2015 )

## Abstract

The optimal relay path calculation and selection are important factors to affect the performance of quantum communication network. Current researches seldom consider the quantum path selection in real noisy environments. One of the difficult problems is how to analyze the influence of the noise on the quantum communication in multi-hop channels. This paper aims to solve the path selection problem of the quantum teleportation network in noisy environments. The process of entanglement swapping in the phase damping channel is first studied with an example of two-hop quantum channel, whose damping factors are  $p_1$  and  $p_2$ . The entanglement states  $|\Phi\rangle_{12}^+$  and  $|\Phi\rangle_{34}^+$  are distributed separately in each hop. After the entanglement swapping, the density matrix of the entanglement state of photon 1 and photon 4 is obtained by performing a partial trace over the environment. Then, the Bures fidelity of this entanglement is calculated. After that, we define the path equivalent damping factor to describe the characteristic of the two-hop noisy quantum relay path. With an equivalent calculation method, the results above can be generalized to multi-hop channel. The path equivalent damping factor of the multi-hop amplitude damping channel is also obtained. According to these results, we propose an optimal relay protocol for the quantum teleportation network with the criterion of path equivalent damping factor, which means that a relay path with the minimum path equivalent damping factor can obtain the highest teleportation fidelity. The types and parameters of the messages used in the protocol are given. The processes of the relay protocol are described specifically, including neighbor finding, quantum link noise measurement, and quantum link status transmission. An improved Dijkstra algorithm is used in the optimal path calculation. Furthermore, because the entanglement resources maintained in the quantum nodes are limited and may be exhausted in superior quantum links, we propose a resource reservation method to avoid the failure of the relay path setup. Theoretical analysis and simulation show that our method can obtain a lower average equivalent damping factor and higher teleportation fidelity. It can also be seen that increasing the number of the entanglement resources will raise the performance of the quantum network, however, it brings higher cost and complexity. Therefore, the entanglement resources maintained in the quantum nodes must be configured reasonably according to the network scale, the cost, the time delay and the need of the users.

**Keywords:** quantum network, entanglement swapping, quantum noise, path selection

**PACS:** 03.67.Hk, 03.65.Yz

**DOI:** 10.7498/aps.64.240304

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61172071, 61201194) and the International Scientific and Technological Cooperation and Exchange Program of Shaanxi Province, China (Grant Nos. 2015KW-013, 2014KW02-02).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [sharon.yg@163.com](mailto:sharon.yg@163.com)