

二值噪声激励下欠阻尼周期势系统的随机共振

马正木 靳艳飞

Stochastic resonance in periodic potential driven by dichotomous noise

Ma Zheng-Mu Jin Yan-Fei

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 240502 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.240502

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.240502>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I24>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

二维耦合定向输运模型研究

A two-dimensional coupled directed transport model

物理学报.2015, 64(15): 150501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.150501>

科赫分形基底上受限固-固模型动力学  $\rho$  锯齿形  $\rho$  氮  $\rho$  笛芯

Numerical investigations of dynamic behaviors of the restricted solid-on-solid model for Koch fractal substrates

物理学报.2015, 64(13): 130501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.130501>

非各态历经噪声的产生及其应用

Generation and application of non-ergodic noise

物理学报.2014, 63(24): 240503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.240503>

带有分数阶阻尼的压电能量采集系统相干共振

Coherence resonance of piezoelectric energy harvester with fractional damping

物理学报.2014, 63(22): 220504 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.220504>

色关联的乘性和加性色噪声激励下分段非线性模型的随机共振

Stochastic resonance in a piecewise nonlinear system driven by colored correlated additive and multiplicative colored noises

物理学报.2014, 63(21): 210501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.210501>

## 二值噪声激励下欠阻尼周期势系统的随机共振\*

马正木 靳艳飞†

(北京理工大学宇航学院, 北京 100081)

(2015年7月23日收到; 2015年8月26日收到修改稿)

研究了二值噪声和周期信号共同激励下欠阻尼周期势系统的随机共振. 利用随机能量法计算了系统的平均输入能量和平均输出信号的振幅和相位差, 讨论了二值噪声对随机共振的影响. 发现随着噪声强度的增大, 平均输入能量曲线存在一个极小值和一个极大值, 系统出现先抑制后共振的现象; 同时, 系统信噪比曲线随噪声强度的增加出现单峰现象, 说明系统存在随机共振现象.

**关键词:** 周期势系统, 二值噪声, 随机共振, 随机能量法

**PACS:** 05.40.-a

**DOI:** 10.7498/aps.64.240502

## 1 引言

随机共振的概念是 Benzi 等<sup>[1]</sup> 和 Nicolis<sup>[2]</sup> 在研究第四纪全球冰川期问题时提出的, 30 多年来, 随机共振及其相关问题的研究在理论和实验上都取得了丰硕成果<sup>[3-6]</sup>. 然而, 这些研究和成果大多集中在经典双稳系统, 对周期势系统的研究较少. 周期势系统是多稳系统, 在很多领域都有着重要应用, 如: 生物马达中的棘齿模型、物理领域的约瑟夫森结、工程力学中的阻尼摆模型等. Fronzoni 和 Mannella<sup>[7]</sup> 研究了倾斜的周期势系统中由噪声驱动的布朗粒子传输问题, 并搭建了锁相环电路模型进行实验验证. Dan 等<sup>[8]</sup> 从理论上研究了非均匀介质中质点在过阻尼周期势系统中的运动, 取适当相位差时, 质点的运输会随着噪声强度的变化达到随机共振的效果. Saikia 等<sup>[9,10]</sup> 发现在驱动频率接近最小势阱的固有频率时, 欠阻尼的周期势系统中存在随机共振现象, 并把随机能量法作为新的指标量引入到随机共振的研究中, 发现两个稳定的动力学状态和随机共振的产生都主要取决于系统的阻尼比和驱动振幅. Liu 和 Jin<sup>[11]</sup> 研究了色噪声激励下欠阻尼周期势系统中布朗粒子的动力学行为及

随机共振, 发现噪声相关时间会影响随机共振发生时最优噪声强度的取值和随机共振的区域宽度. Ai 等<sup>[12]</sup> 研究了非对称周期势系统中没有相互作用的自航粒子在波纹通道中的整流和扩散, 数值模拟得到了粒子的平均速度和扩散系数, 发现自航粒子可以自行纠正速度.

在随机共振的研究中, 噪声对动力系统演化起决定性作用. 高斯噪声是实际研究中常用的噪声, 一般分为高斯白噪声和高斯色噪声. 然而, 高斯白噪声是不存在的, 故在实际问题中大多是具有非零关联时间的高斯色噪声. 二值噪声是一种随机电报噪声, 是真实噪声的典型模型<sup>[13-18]</sup>. 同时, 二值噪声属于色噪声, 具备简单的统计特性, 在不同极限条件下, 二值噪声可以近似为高斯白噪声或者散粒白噪声<sup>[13]</sup>. Fulinski<sup>[14]</sup> 发现在非马尔可夫二值噪声影响下, 线性过程表现出非线性, 且在外部震荡场作用下噪声诱导的迁移出现随机共振现象. Rozenfeld 等<sup>[15]</sup> 指出在弱周期信号和二值噪声驱动下的随机双稳系统中, 加入二值噪声后随机共振现象显著增强, 信噪比和功率谱增益取值都明显增大. Wozinski<sup>[16]</sup> 对两个相关二值噪声诱导下过阻尼粒子的逃逸问题进行了研究, 推出了平均首次穿越时间的方程式, 并观察到了粒子在多种情况下的

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11272051) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: jinyf@bit.edu.cn

加速和减速过程. Xu等<sup>[17]</sup>研究了非对称二值噪声作用下双稳系统的随机共振,发现系统响应也会呈现非对称性. Jin<sup>[18]</sup>研究了乘性二值噪声激励下捕食与被捕食模型的解矩稳定性.

本文研究了二值噪声和外加周期信号驱动下的欠阻尼周期势系统的随机共振. 利用系统平均输入能量、平均输出信号振幅和相位差、信噪比等指标量验证了系统随机共振现象的产生,讨论了二值噪声强度、噪声相关时间、输入信号、势能不对称系数对系统随机共振的影响.

## 2 模型的建立

考虑在外加周期信号作用下,二值噪声激励下欠阻尼周期势系统的随机微分方程为

$$\ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) = -V'(x) + F(t) + \eta(t), \quad (1)$$

其中,  $\gamma$ 为阻尼比,周期势场  $V(x) = -\sin(x)$ ,外加周期信号  $F(t) = A \cos(\omega t)$ ,  $\eta(t)$ 为对称二值噪声,其统计特性为

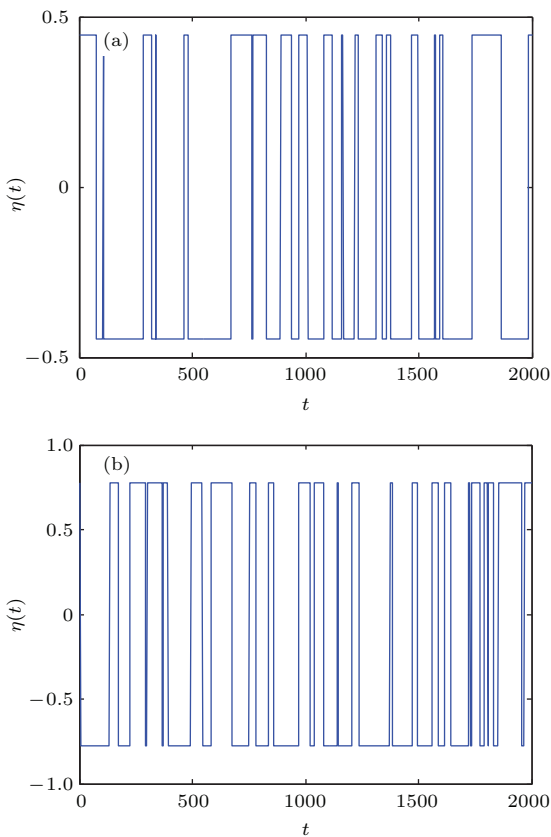


图1 二值噪声的时间历程 ( $dt = 0.2, \tau = 5$ ) (a)  $Q = 1$ ; (b)  $Q = 3$

Fig. 1. Time histories of  $\eta(t)$  for different noise intensities ( $dt = 0.2, \tau = 5$ ): (a)  $Q = 1$ ; (b)  $Q = 3$ .

$$\langle \eta(t) \rangle = 0,$$

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \frac{Q}{\tau} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau}\right), \quad (2)$$

其中  $Q$ 为噪声强度,  $\tau$ 为相关时间.

二值噪声  $\eta(t)$ 取两个固定值  $a, b(a > 0, b < 0)$ ,  $\eta(t)$ 的取值在  $a, b$ 之间随机转换,其中噪声由  $a$ 跃迁到  $b$ 的概率为  $\mu_a$ ,  $b$ 跃迁到  $a$ 的概率为  $\mu_b$ <sup>[19]</sup>:

$$\eta(t) \in \{a, b\},$$

$$Q = -ab\tau,$$

$$\lambda = \tau^{-1} = \mu_a + \mu_b. \quad (3)$$

当  $\lambda \rightarrow \infty, Q/\tau \rightarrow \infty$ , (3)式退化为高斯白噪声.

图1中是不同噪声强度下,二值噪声的时间历程<sup>[20,21]</sup>.

## 3 随机共振

### 3.1 系统的响应特性

图2、图3和图4分别是  $Q$ 取不同值时,系统(1)对应的时间历程、相图和概率密度,其中噪声强度  $Q$ 的取值分别为(a)  $Q = 0.001$ , (b)  $Q = 0.06$ , (c)  $Q = 0.16$ , (d)  $Q = 0.22$ . 在图2中,当噪声强度  $Q$ 很小时,系统只存在一个稳态,随着  $Q$ 的逐渐增大,系统出现多个稳态. 在图3中,当噪声强度  $Q$ 很小时,系统粒子只在一个势阱中运动,而随着  $Q$ 的增大,粒子运动的势阱由一个变为多个.

对应(1)式的郎之万方程,概率密度  $\rho(x, t)$ 的福克-普朗克方程可写为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho(x, y, t)}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} [y\rho(x, y, t)] \\ & \quad - \frac{\partial}{\partial y} [(-\gamma y + \cos(x) + F(t))\rho(x, y, t)] \\ & \quad + Q \frac{\partial^2}{\partial y^2} \rho(x, y, t), \end{aligned} \quad (4)$$

式中  $y = \dot{x}$ . 由于(4)式没有解析解,利用(1)式通过数值模拟给出随机变量  $x(t)$ 在不同噪声强度下的概率密度  $\rho(x, t)$ ,如图4所示. 输出信号的取值在  $Q$ 较小时主要集中在一个波峰,对应一个稳态,随着  $Q$ 的逐渐增大,波峰逐渐增加到多个,对应多个稳态. 以上分析说明,随着噪声强度逐渐增加达到最优值,系统的粒子在多个稳态之间跳跃,系统可能产生随机共振.

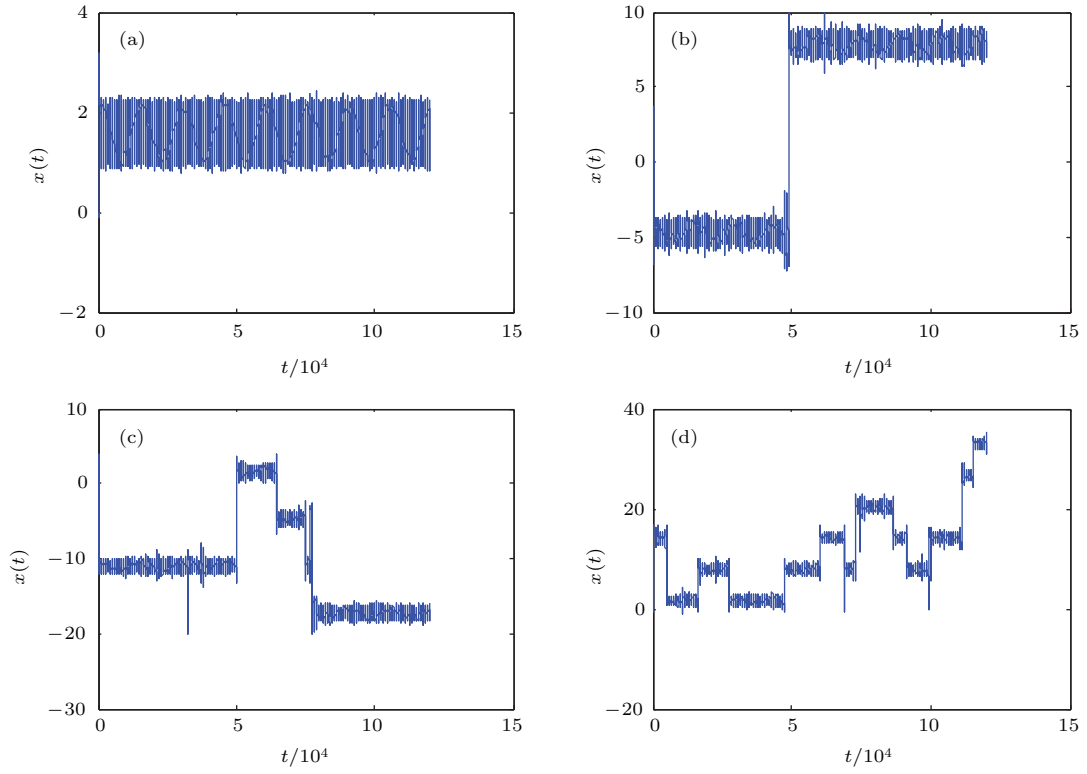


图2 不同噪声强度下输出信号的时间历程 (a)  $Q = 0.001$ ; (b)  $Q = 0.06$ ; (c)  $Q = 0.16$ ; (d)  $Q = 0.22$   
 Fig. 2. Time histories of  $x(t)$  for different noise intensities: (a)  $Q = 0.001$ ; (b)  $Q = 0.06$ ; (c)  $Q = 0.16$ ; (d)  $Q = 0.22$ .

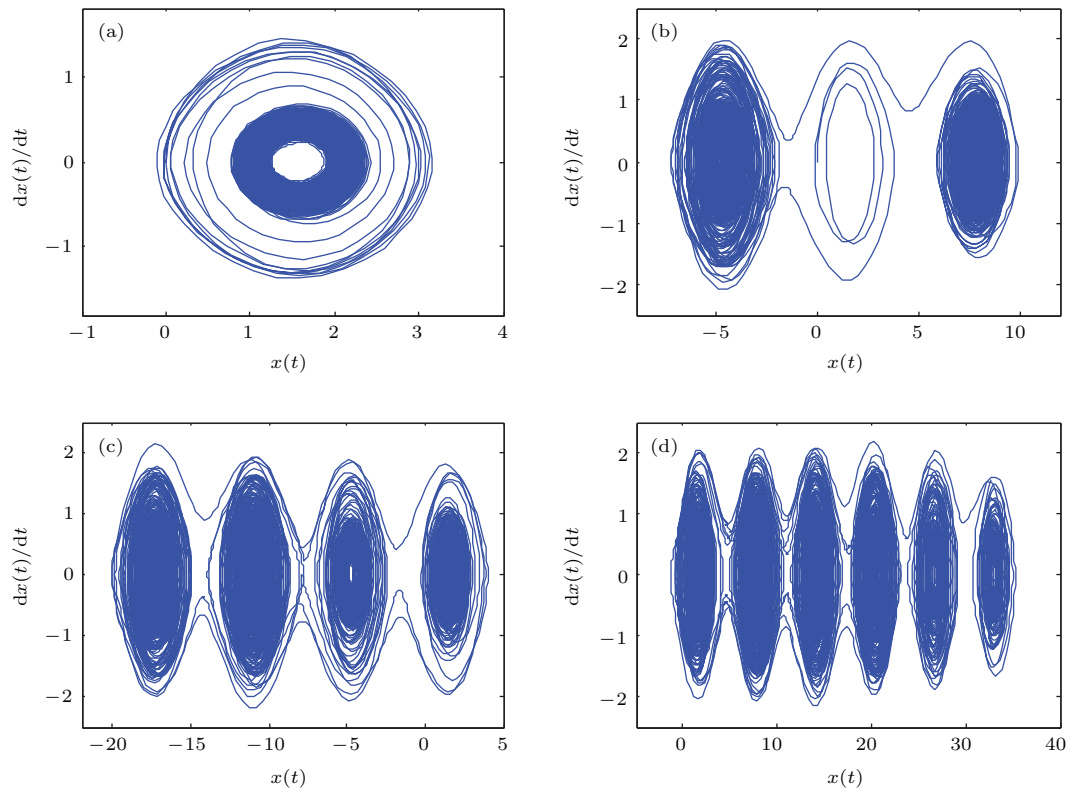


图3 不同强度下系统的相图 (a)  $Q = 0.001$ ; (b)  $Q = 0.06$ ; (c)  $Q = 0.16$ ; (d)  $Q = 0.22$   
 Fig. 3. Phase trajectories of system for different noise intensities: (a)  $Q = 0.001$ ; (b)  $Q = 0.06$ ; (c)  $Q = 0.16$ ; (d)  $Q = 0.22$ .

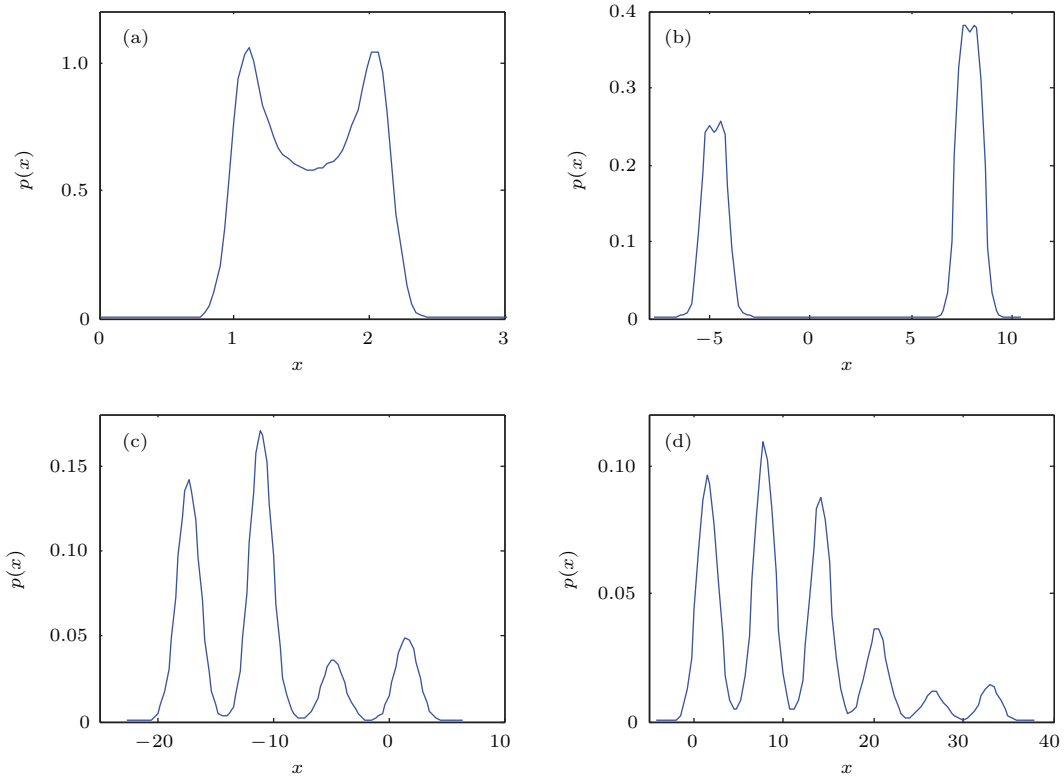


图4 不同强度下系统的概率密度 (a)  $Q = 0.001$ ; (b)  $Q = 0.06$ ; (c)  $Q = 0.16$ ; (d)  $Q = 0.22$

Fig. 4. Plot of  $P(x)$  with  $x$  for different noise intensities: (a)  $Q = 0.001$ ; (b)  $Q = 0.06$ ; (c)  $Q = 0.16$ ; (d)  $Q = 0.22$ .

### 3.2 随机能量法

随机能量法是以系统中周期力与随机力之间各项做功和能量转换来研究随机动力学的过程.

外部周期力在一个周期  $L = 2\pi/\omega$  内对系统做功为

$$W(t_0, t_0 + \tau_0) = \int_{t_0}^{t_0+L} F_0 \omega_0 x(t) \sin(\omega_0 t) dt, \quad (5)$$

同一初始条件下(单一轨迹) $N$ 个周期的平均输入能量为  $\bar{W}$  为

$$\bar{W} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N W(nL, (n+1)L). \quad (6)$$

在数值模拟中, 我们取  $\gamma = 0.12$ ,  $A = 0.2$ ,  $\omega = \pi/4$ ,  $\tau = 5$ ,  $dt = 0.2$ ,  $N = 2500$ , 初始条件  $v(0) = 0$ ,  $x(0) = -\pi/2 + i \times 2\pi/500$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, 500$ ). 图5(a)描述了在二值噪声的相关时间  $\tau = 5$  时, 所有轨迹不同周期的平均输入能量随二值噪声强度  $Q$  的变化曲线. 随着噪声强度  $Q$  的增大, 平均输入能量的变化曲线展现出明显的非单调关系, 表明存在随机共振现象; 当噪声强度  $Q$  较小时, 平均输入能量随着强度的增大而减小, 在  $Q = 0.06$  附近出现一个最小值, 出现共振

抑制现象; 随着噪声强度  $Q$  的继续增大, 变化曲线开始逐渐上升直到出现一个峰值, 这是典型的随机共振现象. 图5(b)描述了不同噪声强度下平均输入能量随二值噪声相关时间的变化关系. 随着相关时间的增大, 平均输入能量先单调上升出现一个峰值, 然后下降到一个最小值, 再继续上升到一定程度然后不再随相关时间的增大而变化, 此变化趋势与平均输入能量随噪声强度的变化趋势完全相反. 这是由于二值噪声的强度和相关时间满足关系式  $Q = -ab\tau$ , 即噪声强度和相关时间成反比. 由图5(b)可以发现随着二值噪声强度的增大, 曲线取得最值对应的相关时间也在增大, 且随机共振区域也越大.

根据线性响应理论, 系统的平均输出信号  $\langle x(t) \rangle$  可以写为  $\langle x(t) \rangle = A \cos(\omega t + \varphi)$ , 可以得到平均输出信号振幅和相位差的表达式<sup>[18]</sup>:

$$\begin{cases} A_1 = \langle x(t) \cos(\omega t) \rangle, \\ A_2 = \langle x(t) \sin(\omega t) \rangle, \end{cases} \quad (7)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2},$$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{A_1}{A_2}\right). \quad (8)$$

根据(7)和(8)式, 可得平均输出信号的振幅和相对输入信号的相位差随二值噪声强度的变化曲线, 如图6所示. 图6(a)中平均输出信号振幅随噪声强度的变化先出现一个最小值, 然后出现一个峰值, 存在随机共振现象. 图6(b)中, 平

均输出信号相对输入信号的相位差随二值噪声强度的变化曲线也表明随机共振现象的存在. 当平均输入能量和平均输出信号的振幅取得最小值时, 平均输出信号与输入信号的相位差最小.

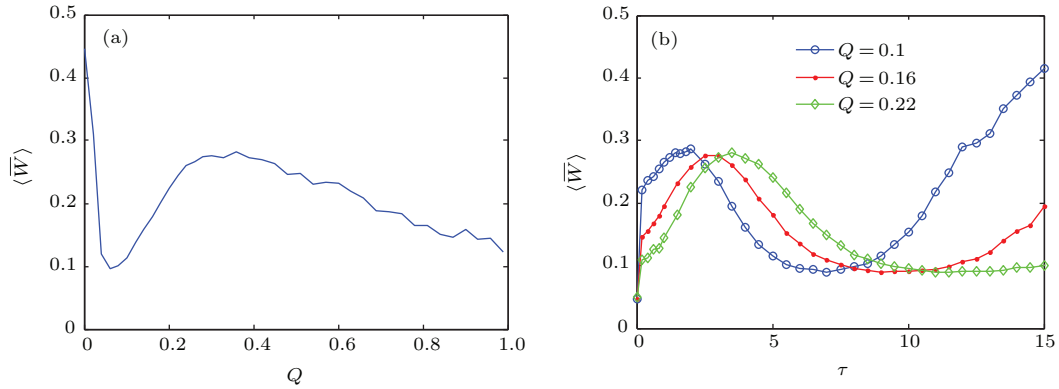


图5 (网刊彩色) 平均输入能量随噪声参数的变化 (a) 强度; (b) 相关时间

Fig. 5. (color online) Plot of  $\langle \bar{W} \rangle$  for different parameters of dichotomous noise: (a) Noise intensity; (b) noise correlation time.

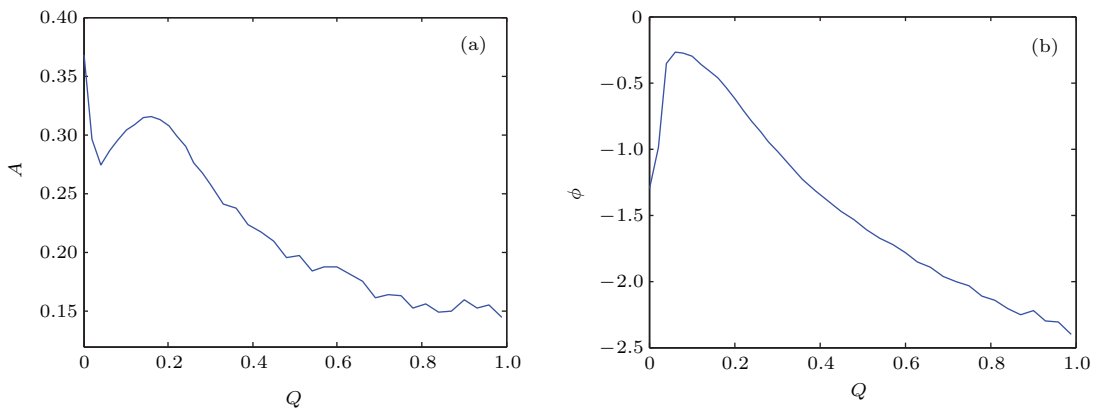


图6 平均输出信号的参数随噪声强度的变化 (a) 振幅; (b) 相位差

Fig. 6. Plot of different parameters of average output signal with intensity of noise: (a) Amplitude; (b) phase difference.

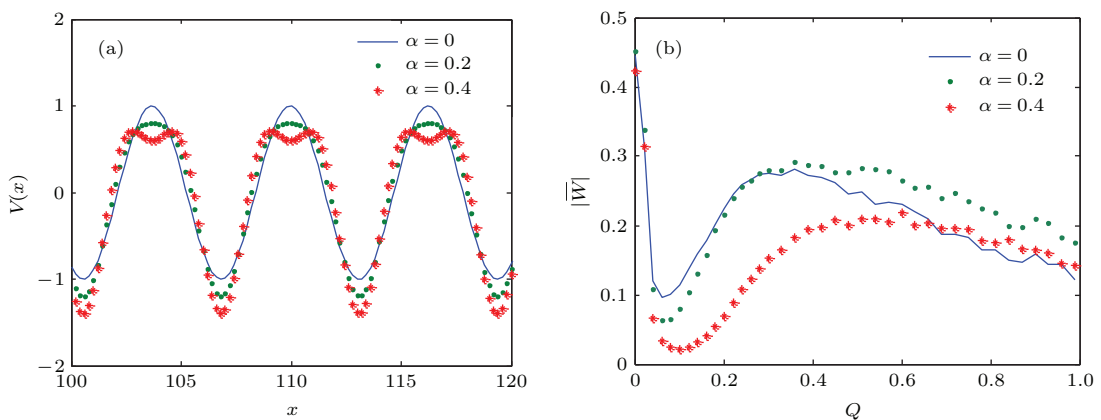


图7 (网刊彩色) 不同  $\alpha$  下的周期势场及平均输入能量的变化 (a) 周期势场; (b) 平均输入能量

Fig. 7. (color online) Plot of  $V(x)$  and  $\langle \bar{W} \rangle$  for different  $\alpha$ : (a) Potential field; (b) average input energy.



当系统中的周期势场变为  $V(x) = -\sin(x) - \alpha/2\sin(2x)$  ( $\alpha$  为不对称系数), 周期势能不再满足反演对称性, 变为棘齿势能, 系统也变成能够产生定向输运的棘齿系统, 即生物上的分子马达. 如图 7 所示, 我们数值模拟了不同  $\alpha$  下的周期势场随  $x$  的变化及平均输入能量随噪声强度的变化. 在图 7(a) 中, 随着  $\alpha$  的增大, 周期势场随  $x(t)$  的变化曲线失衡度越来越高. 在图 7(b) 中, 随着  $\alpha$  的增大, 平均输入能量随噪声强度的变化曲线取得的极小值逐渐减小, 而随机共振区域逐渐增大.

### 3.3 信噪比

信噪比是随机共振现象中常用的定量分析指标之一, 输出信噪比定义为输出总信号在  $f_0$  处的功率与噪声在  $f_0$  处的功率谱密度之比<sup>[22,23]</sup>:

$$\text{SNR} = 10 \lg \left( \frac{s(f_0)}{N} \right), \quad (9)$$

式中  $s(f_0)$  为输出信号在  $f_0$  处的功率谱,  $N$  为噪声在  $f_0$  处附近 10 个点的平均功率谱. 通过数值模拟得到了信噪比 SNR 随二值噪声强度  $Q$  变化的非单调性曲线, 如图 8 所示. 从图 8 中可以看到, 随着二值噪声强度  $Q$  的增大, SNR 的变化曲线出现显著的随机共振现象特性.

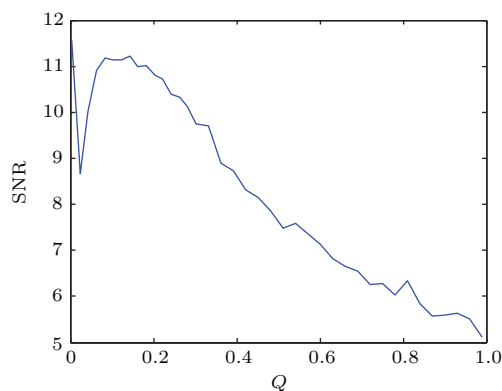


图 8 SNR 随噪声强度的变化曲线

Fig. 8. Plot of SNR with noise intensity.

## 4 结 论

本文主要研究了欠阻尼周期势系统中由二值噪声和外加周期力激励下的随机共振. 在取适当的参数条件下, 由二值噪声和外加周期信号激励的欠阻尼周期势系统中存在随机共振现象. 当二值噪声的相关时间较小时, 随着相关时间的增大, 外加周期信号的平均输入能量的变化曲线呈现出显著的非单调性的随机共振现象; 且随着二值噪声的强度

增大, 出现随机共振现象所对应的相关时间取值越大, 共振区域也越大. 同时, 在棘齿系统中, 随着不对称系数  $\alpha$  的增大, 周期势场失衡度越高, 随机共振区域也越大. 此外, 由平均输出信号振幅和信噪比判定的随机共振曲线取得最值所对应的噪声强度基本一致, 随机能量法中因噪声做功和系统被动耗散能量的影响, 变化曲线取得最值所对应的强度与以上两种方法相比较较大; 另外, 平均输出信号振幅和信噪比判定的随机共振曲线取得最小值时, 输出信号与输入信号的相位差最小.

### 参考文献

- [1] Benzi R, Sutera A, Vitiello P 1981 *J. Phys. A* **14** L453
- [2] Nicolis C 1982 *Tellus* **3** 312
- [3] Gammaioni L, Hanggi P, Jung P, Marchesoni F 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223
- [4] Murali K, Sinha S, Ditto W L, Bulsara A R 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 104101
- [5] Zhang L Y, Cao L, Wu D J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1174 (in Chinese) [张良英, 曹力, 吴大进 2003 物理学报 **52** 1174]
- [6] Jin Y F, Li B 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 210501 (in Chinese) [靳艳飞, 李贝 2014 物理学报 **63** 210501]
- [7] Fronzoni L, Mannella R 1993 *J. Stat. Phys.* **70** 501
- [8] Dan D, Mahato M C, Jayannavar A M 1999 *Phys. Rev. E* **60** 6421
- [9] Saikia S, Jayannavar A M, Mahato M C 2011 *Phys. Rev. E* **83** 061121
- [10] Saikia S 2014 *Physica A* **416** 411
- [11] Liu K H, Jin Y F 2013 *Physica A* **392** 5283
- [12] Ai B Q, Chen Q Y, He Y F, Li F G, Zhong W R 2014 *Phys. Rev. E* **88** 062129
- [13] Fulinski A 1997 *Acta Phys. Pol. B* **28** 1811
- [14] Fulinski A 1995 *Phys. Rev. E* **52** 4523
- [15] Rozenfeld R, Neiman A, Schimansky G L 2000 *Phys. Rev. E* **62** 3031
- [16] Wozinski A 2006 *Acta Phys. Pol. B* **37** 1677
- [17] Xu Y, Wu J, Zhang H Q, Ma S J 2012 *Nonlinear Dyn.* **70** 531
- [18] Jin Y F 2015 *Chin. Phys. B* **24** 060502
- [19] Jin Y F, Xu W, Li W, Xu M 2005 *J. Phys. A* **38** 3733
- [20] Barik D, Ghosh P K, Ray D S 2006 *J. Stat. Mech.* **3** 03010
- [21] Xu Y, Jin X Q, Zhang H Q, Yang T T 2013 *J. Stat. Phys.* **152** 753
- [22] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear Systems* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) p221 (in Chinese) [胡岗 1994 随机力与非线性系统 (上海: 上海科技教育出版社) 第 221 页]
- [23] Kang Y M, Xu J X, Xie Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 802 (in Chinese) [康艳梅, 徐健学, 谢勇 2003 物理学报 **52** 802]

# Stochastic resonance in periodic potential driven by dichotomous noise<sup>\*</sup>

Ma Zheng-Mu Jin Yan-Fei<sup>†</sup>

(School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

( Received 23 July 2015; revised manuscript received 26 August 2015 )

## Abstract

Periodic potential system is widely used in a lot of areas such as biological ratchet model of motor, Josephson junction in the field of physics, engineering mechanics of the damping pendulum model, etc. Meanwhile, in the study of stochastic resonance, noise is crucial for dynamical system evolution. There are mostly colored Gaussian noises with nonzero correlation times in practical problems. Dichotomous noises belong to the color noises, and they have some simple statistical properties. In this paper, we study the motion of a Brownian particle in a periodic potential, driven by both a periodic signal and a dichotomous noise. The periodic potential system is different from the bistable system, so we use multiple indexes to explain the stochastic resonance. We calculate the average input energy of the system and the average output signal amplitude and phase difference by using stochastic energetics. Then we discuss the influences of the dichotomous noise intensity, noise correlation time and asymmetric coefficient of potential energy on the stochastic resonance. The results show that with the increase of the noise correlation time, a minimum value and a maximum value occur on the curve of the average input energy, meanwhile, the phenomenon of resonance appears in the system. With the increase of the noise intensity, the value of noise correlation time becomes greater when the phenomenon of stochastic resonance appears. Therefore, the region of stochastic resonance becomes bigger as the noise intensity or the asymmetry coefficient increases. Moreover, with the increase of the noise intensity, a mono peak is found for the signal-to-noise ratio (SNR) of the system and the stochastic resonance appears in this system. With the increase of the noise intensity, we compare the change of the SNR, the average input energy, and the average output signal amplitude. We find that the values of the amplitudes of the average output signal and SNR are basically the same, while the values of the amplitude of the average input energy of the system are a little different. This is because during the process of periodic signal doing work to the system, noise does work and passive dissipation energy of the system occurs. In addition, when the curves of the amplitude of the average output signal and SNR reach their corresponding minimum values, the phase difference between the output signal and input signal is minimal.

**Keywords:** periodic potential, dichotomous noise, stochastic resonance, stochastic energetics

**PACS:** 05.40.-a

**DOI:** 10.7498/aps.64.240502

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11272051).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [jinyf@bit.edu.cn](mailto:jinyf@bit.edu.cn)