

忆阻混沌系统的脉冲同步与初值影响研究

武花干 陈胜焄 包伯成

Impulsive synchronization and initial value effect for a memristor-based chaotic system

Wu Hua-Gan Chen Sheng-Yao Bao Bo-Cheng

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 030501 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.030501

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.030501>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I3>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

不确定混沌系统的异结构同步

[Synchronization with different structures of uncertain chaotic system](#)

物理学报.2013, 62(2): 020514 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.020514>

光电反馈混沌系统脉冲同步特性研究

[Chaotic impulse synchronization of opto-electronic feedback](#)

物理学报.2012, 61(19): 190504 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.190504>

基于改进脉冲控制方法的超混沌系统同步

[Synchronization of hyperchaotic systems via improved impulsive control method](#)

物理学报.2012, 61(10): 100507 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.100507>

基于比较系统方法的分数阶混沌系统脉冲同步控制

[Impulsive synchronization of fractional order hyperchaotic systems based on comparison system](#)

物理学报.2012, 61(9): 090503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.090503>

参数不确定时延超混沌系统的脉冲同步方法研究

[Research on impulsive synchronization approach of parameter uncertain hyperchaotic systems with time-delay](#)

物理学报.2011, 60(11): 110504 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.60.110504>

## 忆阻混沌系统的脉冲同步与初值影响研究\*

武花干<sup>1)</sup> 陈胜垚<sup>1)</sup> 包伯成<sup>2)†</sup>

1)(南京理工大学电子工程与光电技术学院, 南京 210094)

2)(常州大学信息科学与工程学院, 常州 213164)

(2014年8月18日收到; 2014年9月6日收到修改稿)

以光滑三次型磁控忆阻器的蔡氏电路为例, 研究了两个同构忆阻混沌系统的脉冲控制同步方法. 基于 Lyapunov 稳定性理论, 给出了忆阻混沌系统的脉冲同步渐近稳定条件; 结合误差系统的最大条件 Lyapunov 指数谱, 讨论了系统初值对脉冲同步性能的影响, 并进行了相应的数值仿真实验. 结果表明, 在合适的脉冲控制参数条件下, 同构的忆阻混沌系统的脉冲同步是可行而有效的; 忆阻混沌系统的初值对脉冲同步性能存在一定的影响, 但可通过增大脉冲耦合强度来抑制系统初值的影响.

**关键词:** 脉冲同步, Lyapunov 函数, 忆阻混沌系统, 初值

**PACS:** 05.04.Gg, 05.04.Pq, 05.04.Xt

**DOI:** 10.7498/aps.64.030501

## 1 引言

忆阻器是物理上新实现的、具有记忆特性的第四种基本电路元件<sup>[1]</sup>. 不同于电阻、电容和电感三种基本电路元件可以同时具有线性的和非线性的属性, 忆阻器是一种纯粹的非线性电路元件. 将忆阻元件引入到蔡氏振荡电路中或者替换蔡氏振荡电路中的非线性元件, 可以使得改造后的电路具有更加复杂的动力学行为<sup>[2-4]</sup>. 对这类忆阻混沌电路或者在此基础上发展而来的记忆混沌系统进行动力学建模与分析<sup>[2-8]</sup>、混沌控制与同步方法研究<sup>[9-11]</sup>, 得到了研究人员的广泛关注. 已有的研究成果表明, 忆阻混沌系统不同于一般的混沌系统, 其动力学行为不仅依赖于系统参数, 还依赖于忆阻器内部状态变量的初始条件, 存在瞬态混沌、系统轨线状态转移、分岔模式共存等多种复杂的非线性行为<sup>[2-8]</sup>. 为了实现忆阻混沌系统的工程应用, 近年来已有文献开展了忆阻混沌系统的同步控制方法研究<sup>[9-11]</sup>. 文献[9]和[10]分别针对参数未知的分数阶蔡氏忆阻电路和 AVDP 忆阻电路的自适应

同步方法进行了研究; 文献[11]为洛伦兹忆阻系统和蔡氏忆阻系统建立了新的模糊模型, 并在此基础上研究了异构忆阻混沌系统的模糊同步问题.

脉冲控制同步法使得驱动系统与响应系统经历较少脉冲耦合后达到混沌同步, 在混沌保密通信、混沌压缩感知等领域有着广泛应用<sup>[12,13]</sup>. 与已有的混沌同步方法相比<sup>[14-18]</sup>, 脉冲控制同步法仅在离散时刻向响应系统施加脉冲信号, 使得一些不具备连续耦合条件或者不能承受连续扰动的系统可以在脉冲耦合条件下达到同步; 另一方面, 这种离散耦合方式大大降低了驱动系统与响应系统之间的信息传输率, 应用于混沌压缩感知可有效实现测量信号的降采样, 是混沌压缩感知技术中的关键环节<sup>[12,13]</sup>. 目前, 尚未有文献对忆阻混沌系统的脉冲同步进行研究, 特别是忆阻混沌系统的初始条件, 即系统初值对系统同步性能影响的研究. 因此, 本文将研究同构的蔡氏忆阻混沌系统的脉冲控制同步方法, 基于 Lyapunov 稳定性理论确定脉冲同步渐近稳定条件, 结合条件 Lyapunov 指数谱讨论系统初值对脉冲同步性能的影响, 并进一步地开展相应的数值仿真实验.

\* 国家自然科学基金(批准号: 51277017)和江苏省自然科学基金(批准号: BK2012583)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: mervinbao@126.com

## 2 脉冲微分方程基本理论

为了实现同构的忆阻混沌系统的脉冲控制同步, 需要把响应系统表示为一种脉冲控制微分方程形式. 脉冲控制微分方程的一般形式可描述为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta \mathbf{x}|_{t=\tau_k} &= \mathbf{I}_k(\mathbf{x}), \quad t = \tau_k, \\ \mathbf{x}(t_0^+) &= \mathbf{x}_0, \quad t_0 \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  是系统的状态变量,  $\mathbf{f} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  为连续的函数向量, 在离散时刻  $\tau_k$  处施加的脉冲控制量为  $\mathbf{I}_k(\mathbf{x}) = \Delta \mathbf{x}|_{t=\tau_k} \triangleq \mathbf{x}(\tau_k^+) - \mathbf{x}(\tau_k^-)$ , 且离散时间序列  $\{\tau_k\}$  满足  $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k < \tau_{k+1} < \dots, k \rightarrow \infty$  时, 有  $\tau_k \rightarrow \infty$ .

(1) 式所描述的系统可简称为系统 (1). 当系统 (1) 是渐近稳定的, 就可以认为驱动和响应系统达到了脉冲同步. 通常情况下, 判定一个脉冲控制微分方程是否稳定可转化为判定它对应的比较系统是否稳定.

根据文献 [17], 首先给出关于脉冲控制理论中的一些基本定义和定理.

**定义 1** 令  $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ , 如果  $V$  满足

1)  $V$  在  $(\tau_{k-1}, \tau_k] \times \mathbb{R}^n$  上连续, 且对于每个  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  和  $k = 1, 2, \dots$ , 存在

$$\lim_{(t, \mathbf{y}) \rightarrow (\tau_k^+, \mathbf{x})} V(t, \mathbf{y}) = V(\tau_k^+, \mathbf{x}); \quad (2)$$

2)  $V$  在  $\mathbf{x}$  上满足局部 Lipschitz 条件, 则称  $V$  属于  $V_0$ . 对于任意的  $(t, \mathbf{x}) \in (\tau_{k-1}, \tau_k] \times \mathbb{R}^n$ , 定义

$$D^+V(t, \mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sup \frac{1}{h} \left[ V(t+h, \mathbf{x} + f(t, \mathbf{x})) - V(t, \mathbf{x}) \right]. \quad (3)$$

**定义 2** 设  $V \in V_0$ , 且满足

$$\begin{aligned} D^+V(t, \mathbf{x}) &\leq g[t, V(t, \mathbf{x})], \quad t \neq \tau_k, \\ V(t, \mathbf{x} + \mathbf{I}_k(\mathbf{x})) &\leq \psi_k[V(t, \mathbf{x})], \quad t = \tau_k, \end{aligned} \quad (4)$$

其中,  $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  是连续函数,  $\psi_k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  是非减函数. 则系统 (1) 的比较系统可表示为

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= g(t, \omega), \quad t \neq \tau_k, \\ \omega(\tau_k^+) &= \psi_k[\omega(\tau_k)], \end{aligned}$$

$$\omega(t_0^+) = \omega_0 \geq 0. \quad (5)$$

**定义 3** 如果函数  $\alpha$  满足  $\alpha \in C[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+]$ ,  $\alpha(0) = 0$ , 并且  $\alpha(x)$  在  $x$  中是严格递增的, 则称函数  $\alpha$  属于集合  $\kappa$ .

**定义 4** 定义集合  $S(\rho) = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| < \rho\}$ , 其中  $\|\cdot\|$  表示  $\mathbb{R}^n$  上的欧氏范数.

**定理 1** 当同时满足以下的三个稳定性条件时, 系统 (1) 在原点处是渐近稳定的.

1)  $V : \mathbb{R}_+ \times S_\rho \rightarrow \mathbb{R}_+, \rho > 0, V \in V_0, D^+V(t, \mathbf{x}) \leq g[t, V(t, \mathbf{x})], t \neq \tau_k$ .

2) 存在  $\rho_0 > 0$ , 如果  $\mathbf{x} \in S_{\rho_0}$ , 对任意的  $k, V[t, \mathbf{x} + \mathbf{I}_k(\mathbf{x})] \leq \psi_k[V(t, \mathbf{x})], t = \tau_k$  和  $\mathbf{x} + \mathbf{I}_k(\mathbf{x}) \in S_{\rho_0}$  均成立.

3) 在  $\mathbb{R}_+ \times S_\rho$  上,  $\beta(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq \alpha(\|\mathbf{x}\|)$ , 其中  $\alpha(\cdot), \beta(\cdot) \in \kappa$ . 则比较系统 (5) 的平凡解的稳定性可以保证系统 (1) 的平凡解的稳定性.

**定理 2** 令  $g(t, \omega) = \dot{\lambda}(t)\omega, \lambda \in C^1[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+]$ ,  $\psi_k(\omega) = d_k\omega$ , 对于任意的  $k, d_k \geq 0$ . 如果满足如下条件:

$$\begin{aligned} \lambda(\tau_{k+1}) + \ln(\eta d_k) &\leq \lambda(\tau_k), \\ i &= 1, 2, \dots, \eta > 1, \\ \dot{\lambda}(t) &\geq 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\dot{\lambda}(t) \geq 0, \quad (7)$$

则比较系统 (5) 的平凡解是全局渐近稳定的, 因此系统 (1) 的平凡解是全局渐近稳定的.

## 3 同构忆阻混沌系统的脉冲同步

### 3.1 蔡氏忆阻混沌系统

文献 [3] 利用无源二端光滑磁控忆阻器  $W$  和一个负阻  $G$  构成的有源磁控电路替代蔡氏电路中的蔡氏二极管, 构建了一个四阶蔡氏忆阻混沌电路, 如图 1 所示. 其中, 无源磁控忆阻器  $W$  的本构关系  $q(\phi)$  及其忆导值  $W(\phi)$  可表示为

$$\begin{aligned} q(\phi) &= a\phi + b\phi^3, \\ W(\phi) &= a + 3b\phi^2, \end{aligned} \quad (8)$$

式中, 参数  $a$  和  $b$  为正实常数,  $\phi$  代表忆阻内部状态变量. 因此, 图 1 电路有四个动态元件, 分别是电容  $C_1$ 、电容  $C_2$ 、电感  $L$  和忆阻  $W$ , 相应的状态变量为  $u_1, u_2, i_3$  和  $\phi$ .

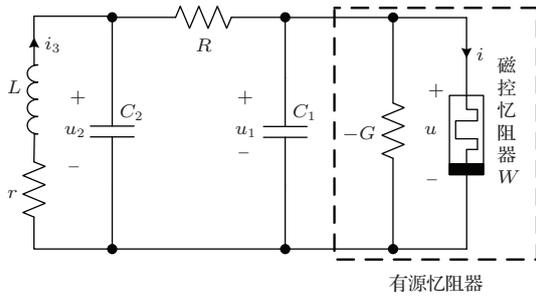


图1 蔡氏忆阻混沌电路

应用基尔霍夫电压、电流定律以及元件的伏安关系, 可得到蔡氏忆阻混沌电路的状态方程. 设  $x_1 = u_1, x_2 = u_2, x_3 = i_3, x_4 = \phi, \alpha = 1/C_1, \beta = 1/L, \gamma = r/L, \xi = G, C_2 = 1$  以及  $R = 1$ , 无量纲处理后的状态方程可表达为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha(x_2 - x_1 + \xi x_1 - W(x_4)x_1), \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 &= -\beta x_2 + \gamma x_3, \\ \dot{x}_4 &= x_1. \end{aligned} \quad (9)$$

(9) 式为一个四维自治常微分系统方程, 简称为蔡

氏忆阻混沌系统.

选择参数  $\alpha = 10, \beta = 100/7, \gamma = 0.1, \xi = 9/7, a = 1/7$  和  $b = 2/7$ , 且系统 (9) 的状态初值  $(x(0), y(0), z(0), w(0)) = (10^{-10}, 0, 0, c)$ . 当  $c$  在  $[-0.8, 0.8]$  区间变化时, 系统 (9) 随初值  $c$  变化的 Lyapunov 指数谱和分岔图分别如图 2(a) 和 (b) 所示. 由 Lyapunov 指数谱可以看到, 系统 (9) 的动力学行为随初值  $c$  发生了变化, 出现了周期和混沌行为. 结合分岔图可以发现, 系统 (9) 处于混沌状态时, 可形成双涡卷混沌吸引子和单涡卷混沌吸引子, 即存在两种不同的混沌状态, 相应的初值  $c$  的范围分别为

$$\begin{aligned} c_{\text{双}} &= [-0.720, -0.655] \cup [-0.062, 0.062] \\ &\quad \cup [0.655, 0.720], \\ c_{\text{单}} &= [-0.520, -0.505] \cup [0.263, 0.286] \\ &\quad \cup [0.505, 0.520]. \end{aligned}$$

在典型的系统初值下, 系统 (9) 生成的双涡卷混沌吸引子如图 2(c) 所示, 而在单涡卷混沌状态时, 存在上吸引子或者下吸引子, 如图 2(d) 所示.

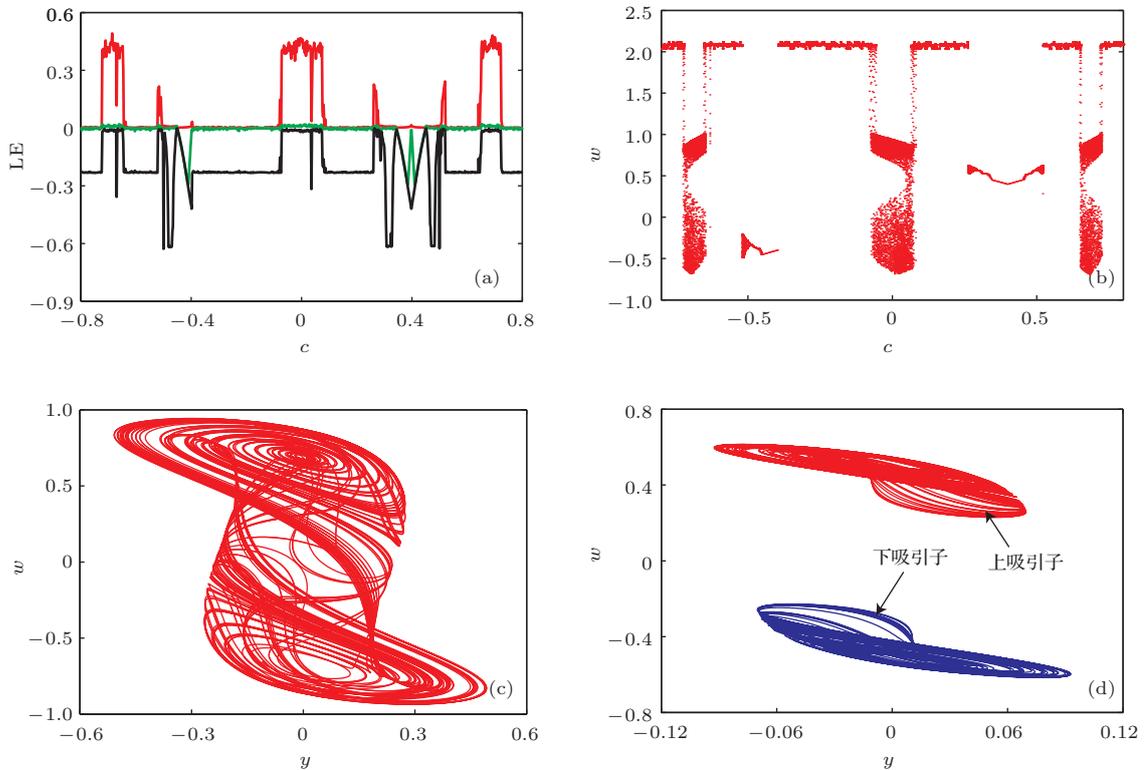


图2 (网刊彩色) 系统 (9) 依赖于忆阻初始条件的动力学行为 (a) 随初值  $c$  变化的 Lyapunov 指数谱; (b) 随初值  $c$  变化的分岔图; (c)  $c = 0$  时, 双涡卷混沌吸引子; (d)  $c = -0.515$ , 下吸引子;  $c = 0.515$ , 上吸引子

### 3.2 脉冲同步渐近稳定性分析

将(9)式所描述的蔡氏忆阻混沌系统作为驱动系统, 令  $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ , 则驱动系统可写成矩阵形式为

$$\dot{x} = Ax + \Phi(x), \quad (10)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} \alpha(\xi - 1) & \alpha & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\beta & \gamma & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} -\alpha W(x_4)x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

且  $W(x_4) = a + 3bx_4^2$ , 参数  $\alpha, \beta, \gamma, \xi, a$  和  $b$  均为正实常数.

响应系统的脉冲控制微分方程可表示为

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Ay + \Phi(y), \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta y|_{t=\tau_k} &= I_k(y) = -Be, \quad t = \tau_k, \\ y(t_0^+) &= y_0, \quad t_0 \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (11)$$

其中,  $B$  是  $4 \times 4$  的脉冲控制矩阵,  $e = x - y = [x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, x_4 - y_4]^T$  为两个蔡氏忆阻混沌系统之间的同步误差. 令

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \Phi(x) - \Phi(y) \\ &= [\alpha W(y_4)y_1 - \alpha W(x_4)x_1, 0, 0, 0]^T, \end{aligned}$$

脉冲同步误差系统可描述为

$$\begin{aligned} \dot{e} &= Ae + \Phi(x, y), \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta e|_{t=\tau_k} &= Be, \quad t = \tau_k, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (12)$$

系统(9)的状态变量是有界的, 假定状态变量  $x_1, x_4$  的最大幅值为  $M_1, M_2$ , 即有  $|x_1| \leq M_1, |x_4| \leq M_2$ .

**定理 3** 假定脉冲控制矩阵  $B$  为 Hermite 矩阵,  $d$  为矩阵  $(I + B^T)(I + B)$  的最大特征值,  $(I + B)$  的谱半径  $\rho(I + B) \leq 1$ ,  $q$  为  $(A + A^T)$  的最大特征值, 脉冲采样是等间隔的, 采样间隔为  $\Delta$ . 如果脉冲间隔满足

$$0 < \Delta \leq -\frac{\ln(\eta d)}{q + 2\alpha b M_1 M_2}, \quad \eta > 1.$$

那么两个同构蔡氏忆阻混沌系统的脉冲同步是渐近稳定的.

**证明** 构造 Lyapunov 函数  $V(e) = e^T e = \|e\|^2$ . 当  $t \neq \tau_k$  时,

$$\begin{aligned} D^+V(e) &= e^T Ae + e^T A^T e + e^T \Phi(x, y) \\ &\quad + \Phi^T(x, y)e \\ &= e^T (A + A^T) e \\ &\quad + 2\alpha[W(y_4)y_1 - W(x_4)x_1]e_1 \\ &\leq qe^T e + 2\alpha[(a + by_4^2)y_1 \\ &\quad - (a + bx_4^2)x_1]e_1 \\ &= qe^T e - 2\alpha ae_1^2 \\ &\quad + 2\alpha b(y_4^2 y_1 - y_4^2 x_1 + y_4^2 x_1 - x_4^2 x_1)e_1 \\ &\leq qe^T e + \alpha b|x_1|(|x_4| + |y_4|)(e_1^2 + e_4^2) \\ &\leq [q + \alpha b|x_1|(|x_4| + |y_4|)]e^T e \\ &\leq (q + 2\alpha b M_1 M_2) e^T e. \end{aligned} \quad (13)$$

这里得到了满足定理 1 的第一个条件:  $g(t, \omega) = (q + 2\alpha b M_1 M_2)\omega$ . 而当  $t = \tau_k$  时,

$$\begin{aligned} V(\tau_k, e + Be) &= (e + Be)^T (e + Be) = e^T (I + B^T)(I + B)e \\ &\leq dV(\tau_k, e). \end{aligned} \quad (14)$$

从而得到了满足定理 1 的第二个条件:  $\psi_k(\omega) = d\omega$ . 可以看出, 定理 1 的第三个条件也是可以满足的. 因此, 根据定理 1 可知, 误差系统(12)的全局渐近稳定性可由比较系统的稳定性决定. 比较系统可表示为

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= (q + 2\alpha b M_1 M_2)\omega, \quad t \neq \tau_k \\ \omega(\tau_k^+) &= d\omega(\tau_k), \\ \omega(t_0^+) &= \omega_0 \geq 0, \end{aligned} \quad (15)$$

由比较系统(15)可知,  $\dot{\lambda}(t) = q + 2\alpha b M_1 M_2 > 0$ , 且当脉冲采样间隔满足

$$0 < \Delta \leq -\frac{\ln(\eta d)}{q + 2\alpha b M_1 M_2} \quad (16)$$

时, 有

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (q + 2\alpha b M_1 M_2) dt + \ln(\eta d) \leq 0.$$

因此, 根据定理 2, 比较系统(15)是全局渐近稳定的, 从而可以得到误差系统(12)的原点是渐近稳定的, 即蔡氏忆阻混沌系统的脉冲同步是全局渐近稳定的. 证毕.

选择系统(9)的参数  $\alpha = 10$ ,  $\beta = 100/7$ ,  $\gamma = 0.1$ ,  $\xi = 9/7$ ,  $a = 1/7$  和  $b = 2/7$ , 脉冲间隔为  $\Delta$ , 脉冲控制矩阵  $\mathbf{B} = \text{diag}\{-k_b, -k_b, -k_b, -k_b\}$ . 这里,  $k_b$  是脉冲耦合强度, 为了满足  $\rho(\mathbf{I} + \mathbf{B}) \leq 1$ ,  $k_b$  仅在  $[0, 2]$  区间取值. 当  $k_b = 1$  时, 驱动系统的状态变量完全强制到响应系统, 此时脉冲耦合强度最强,  $k_b$  距离 1 越远, 耦合强度越弱. 在不同的  $\eta$  取值下, 根据定理3的同步稳定条件绘制的蔡氏忆阻混沌系统的脉冲同步渐近稳定区域边界如图3所示. 相同颜色线条之间的区域为脉冲同步渐近稳定区域, 由此可见, 稳定区域关于  $k_b = 1$  中心对称, 并且随着  $\eta$  取值的增大, 稳定区域逐渐变小.

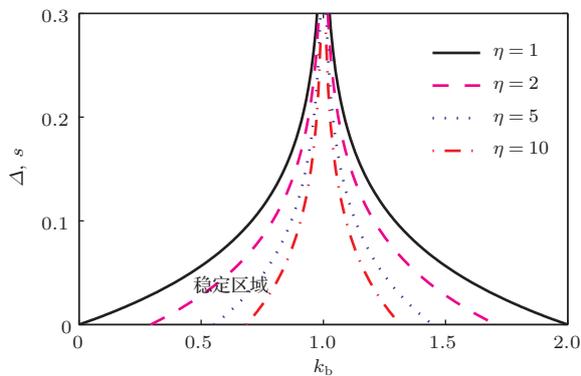


图3 (网刊彩色) 不同  $\eta$  取值时的稳定区域边界估计

基于 Lyapunov 函数稳定性理论所确定的同步条件是脉冲同步的充分条件. 在确定蔡氏忆阻混沌系统渐近稳定条件的过程中, 我们多次对不等式进行了缩放, 使得最终确定的稳定条件较为苛刻, 所获得的稳定区域也远小于实际可同步的稳定区域. 这里仅利用基于 Lyapunov 函数的稳定性理论, 从理论上, 证明同构蔡氏忆阻混沌系统脉冲同步的可行性.

### 3.3 系统初值对脉冲同步性能的影响

从 3.2 节可知, 基于 Lyapunov 稳定性理论获得的脉冲同步条件与忆阻混沌系统的初值无关, 并且该条件过于严格, 提供的最大可同步脉冲间隔可能远小于实际的可同步脉冲间隔. 误差系统的最大条件 Lyapunov 指数 (maximum conditional lyapunov exponent, MCLE) 为负数是混沌脉冲同步的必要条件<sup>[11]</sup>, 由于该条件普遍适用于任意混沌系统, 且可以提供较大的可同步脉冲间隔, 很多时候被当成充分条件来使用. 这里将通过计算误差系统的

MCLE 来研究忆阻混沌系统的脉冲同步, 并讨论忆阻混沌系统初值对脉冲同步性能的影响.

固定  $\Delta = 0.1$ , 选择各个混沌区域内的典型参数, 双涡卷吸引子区域典型值分别为 0, 0.69, -0.69, 单涡卷吸引子区域典型值分别为 0.27, 0.515, -0.515, 图4绘制出了误差系统(12)的最大条件 Lyapunov 指数随脉冲耦合强度  $k_b$  的变化曲线. 为了更加清晰地展示 MCLE 靠近零线附近的情况, 图4(a), (b) 分别给出了  $0 \leq k_b \leq 0.1$  和  $1.9 \leq k_b \leq 2$  之间的 MCLE 曲线, 其他区域即  $0.1 < k_b < 1.9$  的 MCLE 值都为较大的负值, 且  $k_b$  越接近 1, MCLE 值越小. 观察图4可见, 6 条 MCLE 曲线存在一些差异, 且不同混沌状态之间的差异更加明显. 可将图4中的 6 条 MCLE 曲线比较直观地分成两组: 上面的 3 条曲线对应的是 3 个双涡卷吸引子混沌状态的 MCLE 曲线, 另外 3 条对应的则是单涡卷吸引子混沌状态的 MCLE 曲线. 以图4(a) 为例, 随着  $k_b$  减小, 双涡卷吸引子混沌状态的 MCLE 在  $k_b = 0.05$  左右开始变为正值; 而单涡卷吸引子混沌状态的 MCLE 在  $k_b = 0.02$  左右才开始变为正值. MCLE 变为正值意味着驱动系统与响应系统不能达到脉冲同步, 说明单涡卷吸引子混

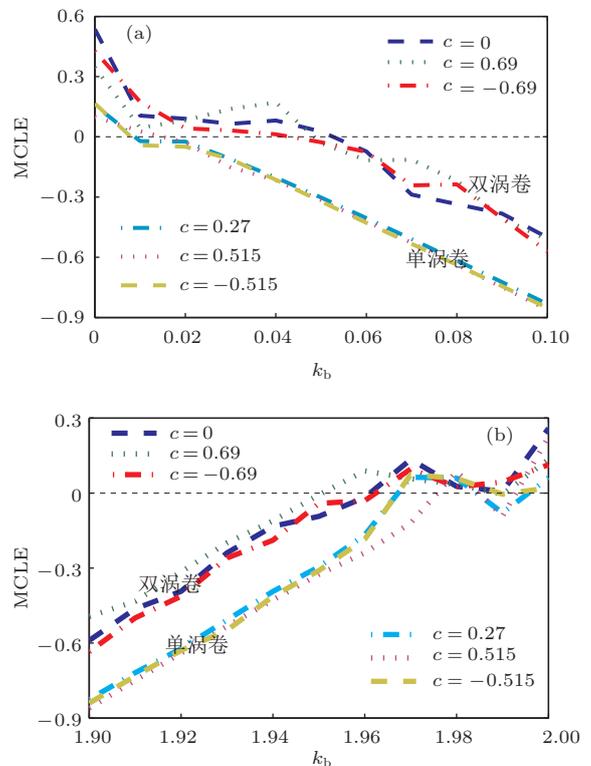


图4 (网刊彩色) 误差系统的最大条件 Lyapunov 指数随  $k_b$  的变化曲线 (a)  $0 \leq k_b \leq 0.1$ ; (b)  $1.9 \leq k_b \leq 2$

沌状态的可同步区间比双涡卷吸引子混沌状态的略大.

图4说明了忆阻混沌系统在不同的混沌状态下的脉冲同步均可实现, 但所需的耦合强度具有一定的差异性; 系统初值对同步性能的影响在耦合强度较弱时比较明显, 为了抑制忆阻混沌系统初值对脉冲同步性能的影响, 可选择较大的耦合强度实现脉冲同步.

### 4 数值仿真与结果

系统初值选定如下: 系统(9)从初值  $(10^{-10}, 0, 0, c)$  出发, 自由运行 1000 s 后, 选取时间差较大的两个时刻所对应的状态变量序列作为驱动系统和响应系统的初值. 驱动系统和响应系统自由运行 50 s 后, 驱动系统开始向响应系统施加脉冲信号. 忆阻混沌系统在不同的脉冲耦合强度和初值  $c$  下的脉冲同步仿真结果如图5和图6所示. 由于相同混沌状态下的仿真结果相似, 实验仅给出了相同混沌

状态时的一组典型初值的仿真结果.

脉冲控制参数  $k_b = 0.04$  和  $\Delta = 0.1$  s. 当  $c = 0$  时, 系统(9)生成了双涡卷混沌吸引子, 脉冲信号激励 150 s 后, 驱动系统和响应系统仍然没有达到稳定的脉冲同步, 同步误差曲线与时域波形的同步情况分别如图5(a), (b)所示; 当  $c = 0.27$  时, 系统(9)生成了单涡卷混沌吸引子, 响应系统经历脉冲信号激励 10 s 左右即与驱动系统达到了脉冲同步, 同步误差曲线与时域波形的同步情况如图5(c), (d)所示. 脉冲间隔不变, 脉冲耦合强度变为  $k_b = 0.3$ , 即脉冲耦合强度增大后, 无论是  $c = 0$  或者  $c = 0.27$ , 驱动系统和响应系统都在 2 s 内达到了稳定的脉冲同步, 如图6所示. 图5和图6所示的实验结果表明, 状态初值  $c$  确实对忆阻混沌系统的脉冲同步性能产生了影响, 且在脉冲耦合强度较弱的时候对脉冲同步性能影响较为明显, 随着脉冲耦合强度的增大, 影响将逐渐减小. 数值仿真结果与3.3节中的分析结果基本一致.

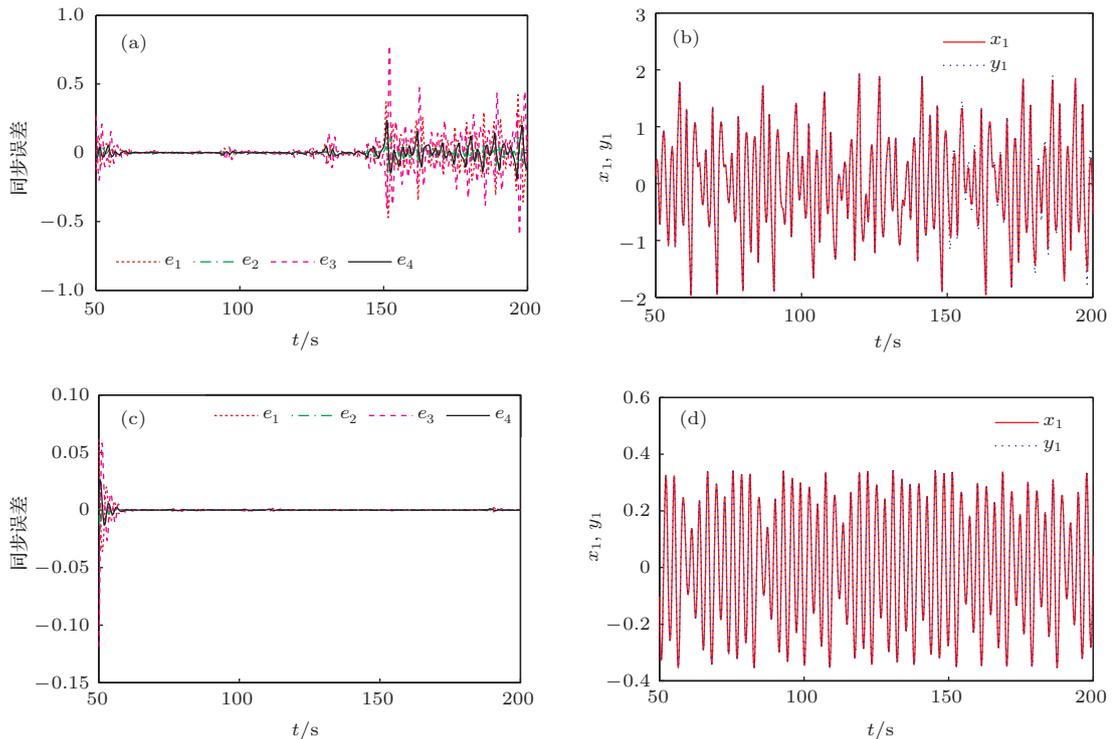


图5 (网刊彩色) 弱脉冲耦合条件下的数值仿真结果 ( $k_b = 0.04, \Delta = 0.1$  s) (a)  $c = 0$  时的同步误差曲线; (b)  $c = 0$  时的时域波形图; (c)  $c = 0.27$  时的同步误差曲线; (d)  $c = 0.27$  时的时域波形图

### 5 结论

本文研究了同构忆阻混沌系统的脉冲同步, 采用驱动系统与响应系统间的状态变量误差作为脉

冲信号, 并以一定的耦合强度反馈到响应系统中. 研究表明, 在不同的系统初值下, 同构忆阻混沌系统均可实现脉冲同步, 只是耦合强度存在一定的差异性. 为了减小系统初值对脉冲同步性能的影响

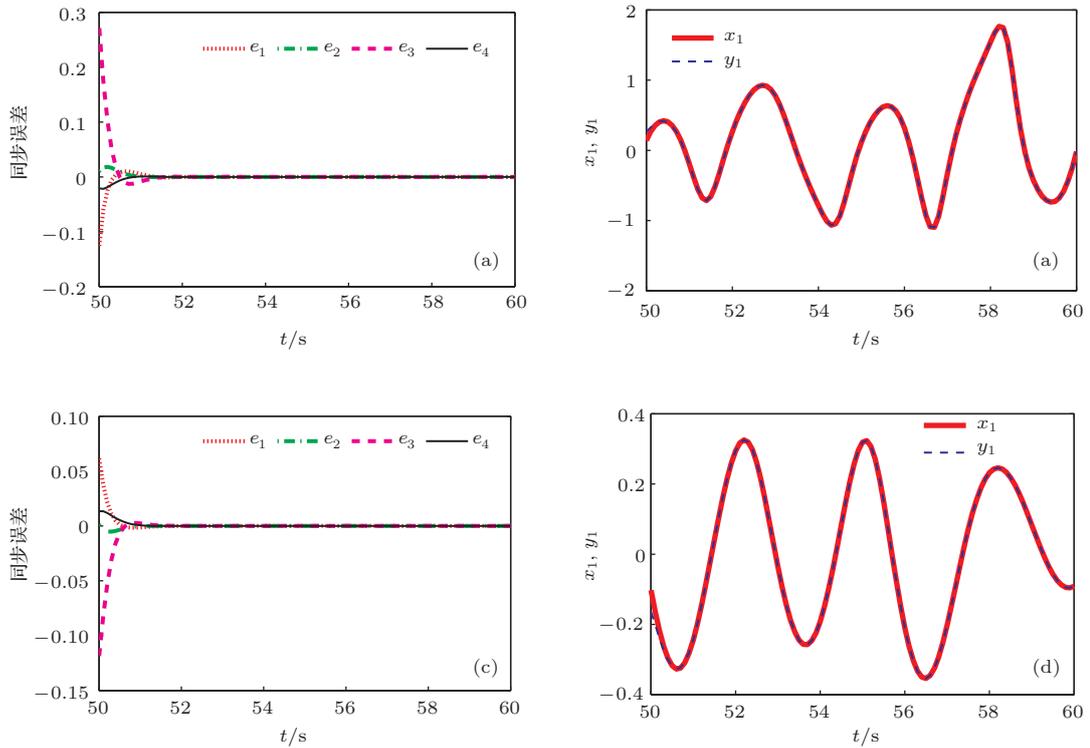


图6 (网刊彩色) 较强脉冲耦合条件下的数值仿真结果 ( $k_b = 0.3, \Delta = 0.1 \text{ s}$ ) (a)  $c = 0$  时的同步误差曲线; (b)  $c = 0$  时的时域波形图; (c)  $c = 0.27$  时的同步误差曲线; (d)  $c = 0.27$  时的时域波形图

响, 可以选择较大的脉冲耦合强度. 本文所研究  
的同构蔡氏忆阻混沌系统的脉冲控制同步方法是可  
行的, 在混沌雷达、混沌保密通信以及混沌压缩感  
知等领域有着潜在的应用前景.

参考文献

[1] Strukov D B, Snider G S, Stewart D R, Williams R S 2008 *Nature* **453** 80  
 [2] Bao B C, Xu J P, Liu Z 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 070504  
 [3] Bao B C, Liu Z, Xu J P 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3785 (in Chinese) [包伯成, 刘中, 许建平 2010 物理学报 **59** 3785]  
 [4] Yang F Y, Leng J L, Li Q D 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 080502 (in Chinese) [杨芳艳, 冷家丽, 李清都 2014 物理学报 **63** 080502]  
 [5] Wang G Y, He J L, Yuan F, Peng C J 2013 *Chin. Phys. Lett.* **30** 110506  
 [6] Li Z J, Zeng Y C 2013 *Chin. Phys. B* **22** 040502

[7] Bao B C, Zou X, Liu Z, Hu F W 2013 *Int. J. Bifurc. Chaos* **23** 1350135  
 [8] Li Z J, Zeng Y C, Li Z B 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 010502 (in Chinese) [李志军, 曾以成, 李志斌 2014 物理学报 **63** 010502]  
 [9] Wang B X, Jian J G, Yu H 2014 *Syst. Sci. and Control Eng.: An Open Access J.* **2** 291  
 [10] El-Sayed A M A, Elsaid A, Nour H M, Elsonbaty A 2013 *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.* **18** 148  
 [11] Wen S P, Zeng Z G, Huang T W, Chen Y R 2013 *Phys. Lett. A* **377** 2016  
 [12] Liu Z, Chen S Y, Xi F 2012 *Int. J. Bifurc. Chaos* **22** 1250151  
 [13] Xi F, Chen S Y, Liu Z 2013 *Int. J. Bifurc. Chaos* **23** 1350198  
 [14] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821  
 [15] Pyragas K 1993 *Phys. Lett. A* **181** 203  
 [16] Huang D 2005 *Phys. Rev. E* **71** 037203  
 [17] Yang T, Chua L O 1997 *IEEE Trans. Circuits Syst. I: Fund. Theor. and Appl.* **44** 976  
 [18] Liu D F, Wu Z Y, Ye Q L 2014 *Nonlin. Dyn.* **75** 209

# Impulsive synchronization and initial value effect for a memristor-based chaotic system\*

Wu Hua-Gan<sup>1)</sup> Chen Sheng-Yao<sup>1)</sup> Bao Bo-Cheng<sup>2)†</sup>

1) (School of Electronic and Optical Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

2) (School of Information Science and Engineering, Changzhou University, Changzhou 213164, China)

( Received 18 August 2014; revised manuscript received 6 September 2014 )

## Abstract

Taking Chua's circuit with a smooth cubic flux-controlled memristor as an example, the impulsive control synchronization method for two identical memristor-based chaotic systems is studied. Based on the Lyapunov stability theory, the asymptotic stability condition for the impulsive synchronization of the memristor-based chaotic systems is given. Combining with the maximum conditional Lyapunov exponent spectrum of the error system, effects of the system initial values on the performances of impulsive synchronization are discussed, and corresponding simulation experiments are performed. Results indicate that using impulsive synchronization for the two identical memristor-based chaotic systems is feasible and effective with appropriate impulsive control parameters; the initial values of the memristor-based chaotic systems have some effects on the performances of impulsive synchronization, which can be inhibited by increasing the impulsive coupling strength.

**Keywords:** impulsive synchronization, Lyapunov function, memristor-based chaotic system, initial values

**PACS:** 05.04.Gg, 05.04.Pq, 05.04.Xt

**DOI:** [10.7498/aps.64.030501](https://doi.org/10.7498/aps.64.030501)

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51277017), and the Natural Science Foundations of Jiangsu Province, China (Grant No. BK2012583).

† Corresponding author. E-mail: [mervinbao@126.com](mailto:mervinbao@126.com)