

基于量子并行粒子群优化算法的分数阶混沌系统参数估计

黄宇 刘玉峰 彭志敏 丁艳军

Research on particle swarm optimization algorithm with characteristic of quantum parallel and its application in parameter estimation for fractional-order chaotic systems

Huang Yu Liu Yu-Feng Peng Zhi-Min Ding Yan-Jun

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), 64, 030505 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.030505

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.030505>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I3>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

参数不确定统一混沌系统的鲁棒分数阶比例微分控制

Robust fractional-order proportional-derivative control of unified chaotic systems with parametric uncertainties

物理学报.2015, 64(5): 050503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.050503>

一种分数阶混沌系统同步的自适应滑模控制器设计

Design of an adaptive sliding mode controller for synchronization of fractional-order chaotic systems

物理学报.2015, 64(4): 040505 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.040505>

永磁同步发电机混沌运动分析及最优输出反馈  $H_8$  控制

Analysis of chaos in permanent magnet synchronous generator and optimal output feedback  $H_8$  control

物理学报.2015, 64(4): 040504 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.040504>

间歇反馈法实现单模 Lorenz-Haken 激光系统的周期镇定与同步

Realization of periodical control and synchronization of single-mode laser Haken-Lorenz system with intermittent feedback

物理学报.2015, 64(3): 030504 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.030504>

基于快速全线性预测控制的混沌系统控制与同步

Control and synchronization in chaotic systems based on fast linear predictive control

物理学报.2015, 64(1): 010502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.010502>

# 基于量子并行粒子群优化算法的分数阶混沌系统参数估计\*

黄宇<sup>1)2)</sup> 刘玉峰<sup>1)</sup> 彭志敏<sup>1)</sup> 丁艳军<sup>1)†</sup>

1)(清华大学热能系, 电力系统与发电设备控制与仿真国家重点实验室, 北京 100084)

2)(华北电力大学控制与计算机工程学院, 保定 071003)

(2014年3月27日收到; 2014年9月2日收到修改稿)

分数阶混沌系统参数估计的本质是多维参数优化问题, 其对于实现分数阶混沌控制与同步至关重要. 提出一种基于量子并行特性的粒子群优化新算法, 用于解决分数阶混沌的系统参数估计问题. 利用量子计算的并行特性, 设计出了一种新的量子编码, 使每代运算的可计算次数呈指数增加. 在此基础上, 构建了由量子当前旋转角、个体最优旋转角和全局最优旋转角共同组成的粒子演化方程, 以约束粒子在量子空间中的运动行为, 使算法的搜索能力得到了较大提高. 以分数阶 Lorenz 混沌系统和分数阶 Chen 混沌系统的参数估计为例, 进行了未知参数估计的数值仿真, 结果显示本算法具有良好的有效性、鲁棒性和通用性.

**关键词:** 分数阶混沌系统, 参数估计, 量子并行计算, 量子粒子群

**PACS:** 05.45.Gg, 05.45.Pq

**DOI:** 10.7498/aps.64.030505

## 1 引言

近年来, 分数阶混沌系统的控制与同步引起了许多学者的关注<sup>[1-4]</sup>. 其中分数阶混沌系统的参数估计是解决分数阶混沌控制与同步的首要问题, 具有非常重要的研究意义. 然而, 由于分数阶的引入以及混沌系统本身的复杂性, 使得对分数阶混沌系统参数的精确估计存在较大难度. 目前, 已有不少针对整数阶混沌系统参数估计的研究<sup>[5-7]</sup>. Parlitz 等通过最小化平均同步误差, 对一个给定的混沌动态系统进行了参数估计<sup>[8]</sup>; Wang 等提出一种基于单纯形的混合差分进化算法, 并应用该算法解决多个混沌系统的参数估计问题<sup>[9]</sup>; 龙文等提出一种混合交叉进化算法来估计混沌系统的未知参数<sup>[10]</sup>; 林剑等提出一种混合生物地理优化算法用以解决混沌系统的参数估计问题<sup>[11]</sup>; 王柳等借助演化算法的自组织、自适应和自学习特征, 提出了基于演化算法的混沌系统参数辨识方案<sup>[12]</sup>. 以上文献都

是针对整数阶混沌系统的参数估计而言的, 但是由于分数阶混沌系统<sup>[13]</sup>参数估计的难度远大于整数阶混沌系统, 普通的优化算法难以获得良好的参数估计效果. 本文提出一种量子并行粒子群优化算法 (quantum parallel particle swarm optimization, QPPSO) 并将其用于分数阶混沌系统的参数估计, 以分数阶 Lorenz 混沌系统和分数阶 Chen 混沌系统的参数估计为例, 进行了仿真实验, 并对结果进行了详细的分析.

## 2 问题描述

考虑如下分数阶混沌系统<sup>[14]</sup>:

$$D^{\alpha_0} X = F(X, X_0, \theta_0), \quad (1)$$

其中  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$  表示原系统的  $n$  维状态变量,  $X_0$  表示系统初值,  $\alpha_0 = (\alpha_{01}, \alpha_{02}, \dots, \alpha_{0n})^T$  为原系统的分数阶阶次,  $\theta_0 = (\theta_{10}, \theta_{20}, \dots, \theta_{D0})^T$  表示系统参数的真实值.

\* 国家自然科学基金 (批准号: 51206086, 51176085) 和中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: 12MS117) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: dyj@tsinghua.edu.cn

若要对(1)式系统的参数进行估计,可假设被估计系统的描述为

$$D^\alpha Y = F(Y, X_0, \theta), \quad (2)$$

其中  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in R^n$  表示估计系统的  $n$  维状态变量,  $X_0$  表示系统初值,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$  表示估计系统的阶次值,  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_D)^T$  表示估计系统的参数值.

则分数阶混沌系统的参数估计问题可以转化为如下优化问题:

$$\min J = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \|X_k - Y_k\|^2, \quad (3)$$

其中,  $M$  表示状态变量序列的长度,  $X_k (k = 1, 2, \dots, M)$  表示混沌系统在其参数的真实值下演化时系统的状态变量序列,  $Y_k (k = 1, 2, \dots, M)$  表示混沌系统在其参数的估计值下演化时系统的状态变量序列.

上述分数阶混沌系统的参数估计问题可以看作一个多维连续优化问题, 决策变量为  $\alpha$  和  $\theta$ , 优化目标为最小化  $J$ . 分数阶混沌系统的参数估计原理如图 1 所示.

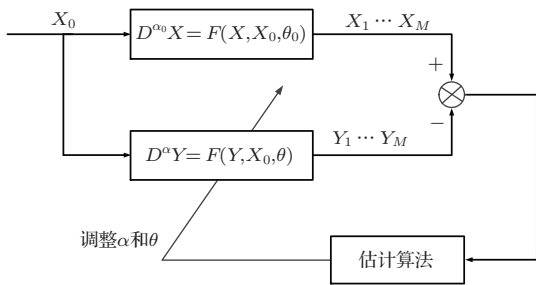


图 1 分数阶混沌系统参数估计原理图

由于分数阶的引入以及混沌系统本身的复杂性, 分数阶混沌系统的参数很难精确估计. 另外, 对于目标函数  $J$ , 存在很多局部极值点, 上述问题用传统的优化算法难以得到全局最优解, 本文提出一种基于量子并行特性的粒子群优化算法用于求解该问题.

### 3 量子并行粒子群优化算法

#### 3.1 量子并行特性

考虑  $m$  个量子比特情况. 将  $m$  个 Hadamard 门分别作用到  $m$  个量子比特状态  $|0\rangle^{\otimes m} = |00\dots 0\rangle$

的每一个比特上, 得到

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= H^{\otimes m} |0\rangle^{\otimes m} \\ &= H \otimes H \otimes \dots \otimes H |00\dots 0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \dots \\ &\quad \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^m}}(|00\dots 0\rangle + |00\dots 1\rangle) + \dots \\ &\quad + |11\dots 1\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{x=0}^{2^m-1} |x\rangle, \end{aligned} \quad (4)$$

其中,  $| \rangle$  为右矢狄拉克符号,  $|\psi\rangle$  为量子态,  $H^{\otimes m}$  表示  $m$  个 Hadamard 的直积,  $|0\rangle^{\otimes m}$  表示  $m$  个量子比特状态  $|0\rangle$  的直积. (4) 式说明: 在量子空间中, 可以通过 Hadamard 门的  $m$  次 (多项式) 作用, 构造出  $2^m$  个量子态, 它是量子计算时代的特征之一 [15].

#### 3.2 基于并行特性的量子粒子群优化算法

若将  $n$  维空间优化问题的解看作  $n$  维空间的点或者向量, 则连续优化问题可描述为  $\min f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . 其中,  $a_i \leq x_j \leq b_i, j = 1, 2, \dots, n, n$  为优化变量的数目;  $[a_j, b_j]$  为  $x_j$  的定义域;  $f$  为目标函数, 其值可以作为粒子的适应度 [16]. 下面给出 QPPSO 的具体操作.

##### 1) 量子编码

本算法采用的量子编码如图 2 所示.

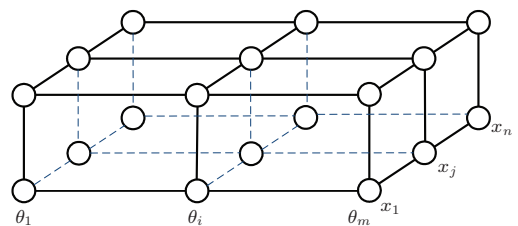


图 2 量子编码形式

在图 2 中, 对于任意  $x_j$  采用的编码方案如下:

$$|x_j\rangle = \begin{bmatrix} \cos \theta_{1j} \cdots \cos \theta_{ij} \cdots \cos \theta_{mj} \\ \sin \theta_{1j} \cdots \sin \theta_{ij} \cdots \sin \theta_{mj} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

其中,  $\theta_{ij} = 2\pi \times \text{random}$ , random 为  $(0, 1)$  之间随机数;  $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ . 则  $|x_j\rangle$  中各量子位  $|x_{ij}\rangle$  的张量积为

$$|A_j\rangle = |x_{1j}\rangle \otimes |x_{2j}\rangle \otimes \dots \otimes |x_{mj}\rangle$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_{1j} \\ \sin \theta_{1j} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \cos \theta_{2j} \\ \sin \theta_{2j} \end{bmatrix} \otimes \dots \\
 &\quad \otimes \begin{bmatrix} \cos \theta_{mj} \\ \sin \theta_{mj} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_{1j} \times \cos \theta_{2j} \times \dots \times \cos \theta_{mj} \\ \cos \theta_{1j} \times \cos \theta_{2j} \times \dots \times \sin \theta_{mj} \\ \dots \\ \sin \theta_{1j} \times \sin \theta_{2j} \times \dots \times \sin \theta_{mj} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ \dots \\ A_{j2^m} \end{bmatrix}. \tag{6}
 \end{aligned}$$

利用(6)式可以将 $x_j$ 的解空间平行划分成 $2^m$ 个子空间,其原理如图3所示.从图3可以看出,只要改变 $x_j$ 所对应的 $m$ 个旋转角 $\theta_{ij}(i = 1, 2, \dots, m)$ ,就可以同时调整 $2^m$ 个平行子空间中的元素,这样大大提高了算法的遍历性,增加了算法全局收敛的可能性.

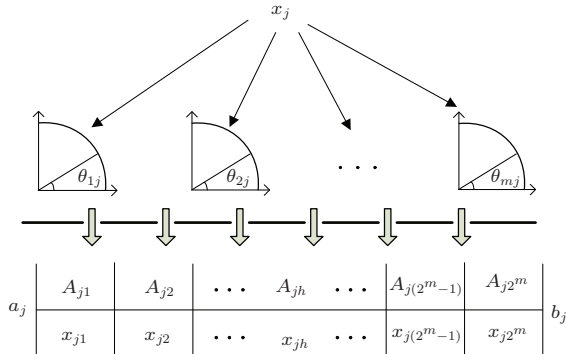


图3  $x_j$  解空间进行量子划分

2) 量子状态更新

在量子空间中,由于坐标和动量之间存在不确定关系,传统粒子群优化算法(PSO)中的运动方程不再适用.本文构建一个由量子的当前旋转角、个体最优旋转角和全局最优旋转角共同构成的量子演化方程,以约束粒子在量子空间中的运动行为.演化方程如下:

$$\begin{aligned}
 \theta_{ijk}(t+1) = & \frac{c_1 r_1 \theta_{P_{ijk}}(t) + c_2 r_2 \theta_{G_{ij}}(t)}{(c_1 r_1 + c_2 r_2)} \\
 & \pm w \cdot \ln[1/u_{ijk}(t)]
 \end{aligned}$$

$$\times \left| \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \theta_{P_{ijk}}(t) - \theta_{ijk}(t) \right|, \tag{7}$$

其中 $k = 1, 2, \dots, L$ ,  $L$ 为粒子种群的大小;  $c_1$ 和 $c_2$ 为常数,一般取2.0;  $w$ 为惯性权重;  $r_1, r_2$ 和 $u_{ijk}(t)$ 均为(0, 1)之间的随机值;  $t$ 为当前迭代步数.

3) QPPSO算法流程

综上所述,本文提出的QPPSO算法主要步骤表述如下:

**步骤1** 设定算法相关的初始参数: 利用(5)式实现量子编码, 利用(3)式实现量子解空间平行分割.

**步骤2** 计算初始粒子的适应度, 将当前各粒子的位置和目标值存储于各粒子的pbest中, 将所有pbest中目标最优的个体位置和目标值存储于gbest中.

**步骤3** 按式(4)实现在各自解空间中的量子状态更新.

**步骤4** 评价种群中的所有粒子.

**步骤5** 比较种群中每个粒子当前目标值与其pbest的目标值. 若当前目标值更优, 则用粒子的当前位置和目标值更新pbest.

**步骤6** 比较当前所有pbest和gbest的目标值, 更新gbest.

**步骤7** 若终止准则满足, 则输出gbest及其目标值并停止算法, 否则转向步骤3.

4 量子并行粒子群优化算法

以典型的分数阶Lorenz和Chen混沌系统为例, 进行未知参数估计仿真, 以验证所提算法的有效性.

4.1 基于QPPSO的分数阶Lorenz混沌系统参数估计

分数阶Lorenz混沌系统的动态特性可以描述为<sup>[17]</sup>

$$\begin{aligned}
 \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} &= a \cdot (y - x), \\
 \frac{d^\beta y}{dt^\beta} &= c \cdot x - x \cdot z - y, \\
 \frac{d^\gamma z}{dt^\gamma} &= x \cdot y - b \cdot z,
 \end{aligned} \tag{8}$$

其中,  $a, b, c$ 是系统参数,  $\alpha, \beta, \gamma$ 是分数阶次,  $x, y, z$ 为系统的状态变量. 采用四阶龙格库塔算法求解上述方程(取步长 $h = 0.01$ ). 仿真过程中, 先让

Lorenz 系统自由演化, 在经历暂态过程之后任意选取一点作为系统初值, 并以此为零时刻, 分别在参数的真实值和估计值下计算连续  $M$  个状态变量值 (取  $M = 300$ ).

在本文算法中, 设定最大进化代数设为 100, 种群大小  $L = 60$ ,  $c_1 = c_2 = 2$ , 惯性权重  $w$  由初始的 1 减到最后的 0.5. 各待估参数的搜索范围设置如下:  $9 \leq a \leq 11$ ,  $20 \leq b \leq 30$ ,  $2 \leq c \leq 3$ ,  $0.85 \leq \alpha \leq 1$ ,  $0.85 \leq \beta \leq 1$ ,  $0.85 \leq \gamma \leq 1$ . 为了验证算法的有

效性和鲁棒性, 分别对整数阶 Lorenz 混沌系统、分数阶 Lorenz 混沌系统以及在噪声扰动下的分数阶 Lorenz 混沌系统进行参数估计, 过程如下:

1) 令  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ ,  $a = 10$ ,  $b = 28$ ,  $c = 8/3$ , 则系统演化成普通的 Lorenz 混沌系统. 将本文算法独立运行 20 次, 将计算出的平均结果、最好结果和最差结果与 PSO 和 GA 的计算结果相比较, 如表 1 所示, 其中 PSO 和 GA 的估计结果见文献 [18].

表 1 各种算法的整数阶 Lorenz 混沌系统参数估计结果

真实值	平均			最好			最差		
	QPPSO	PSO	GA	QPPSO	PSO	GA	QPPSO	PSO	GA
$a$ 10	10.0000	10.0184	10.1398	10.0000	9.99533	10.0672	10.0001	10.6082	10.9290
$b$ 28	28.0000	27.9934	27.7427	28.0000	28.0071	27.9221	27.9999	27.7044	26.1276
$c$ 8/3	2.6667	2.66628	2.64859	2.6667	2.66701	2.66343	2.6667	2.65723	2.56205
$J$ —	9.8837 $\times 10^{-11}$	4.1800	9.44 $\times 10^2$	3.8498 $\times 10^{-14}$	4.86 $\times 10^{-2}$	4.3100	9.6928 $\times 10^{-10}$	3.49 $\times 10$	6.46 $\times 10^3$

从表 1 可以看出, QPPSO 的参数估计结果和真实值非常接近, 最好的估计精度  $J$  达到了  $10^{-14}$  次方数量级, 与 PSO 和 GA 计算的结果相比, 优势非常明显. 为了验证 QPPSO 算法的搜索效率, 图 4 和图 5 分别给出了目标函数和估计参数的进化收敛过程. 从图 4 可以看出, 目标函数  $J$  收敛速度非常快, 迅速减少到  $10^{-14}$  数量级; 图 5 则表明了估计参数  $a, b, c$  可以迅速收敛到真实值. 两者都显示了本文算法能够迅速、准确地收敛到最优值, 也为其应用到分数阶 Lorenz 混沌系统的参数估计奠定了基础.

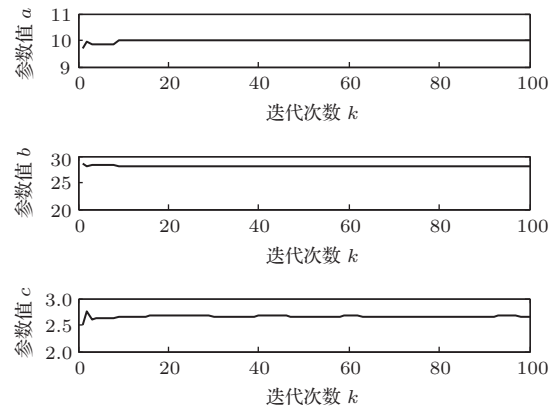


图 5 Lorenz 系统估计参数值进化曲线

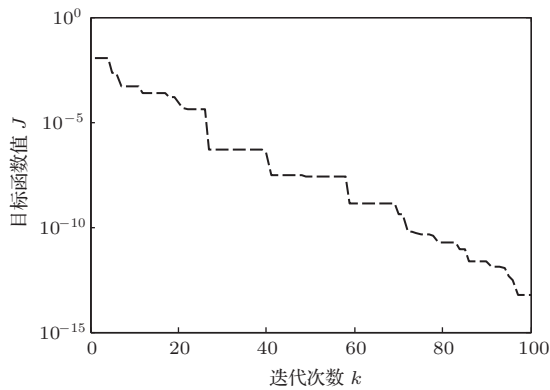


图 4 Lorenz 系统目标函数进化曲线

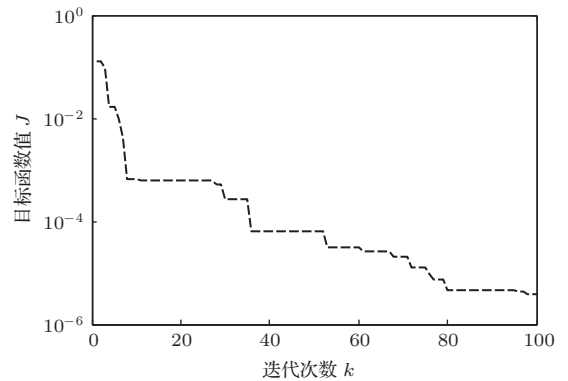


图 6 分数阶 Lorenz 系统目标函数进化曲线

表2 分数阶 Lorenz 系统参数估计结果

	真实值	平均	最好	最差
$a$	10	10.1949	9.9937	10.5599
$b$	28	27.8299	27.9563	27.5601
$c$	8/3	2.6836	2.6702	2.7230
$\alpha$	0.993	0.9963	0.9943	1.0000
$\beta$	0.993	0.9938	0.9914	0.9972
$\gamma$	0.993	0.9928	0.9919	0.9941
$J$	—	$1.0656 \times 10^{-4}$	$1.4657 \times 10^{-6}$	$5.4486 \times 10^{-4}$

2) 令  $\alpha = 0.993$ ,  $\beta = 0.993$ ,  $\gamma = 0.993$ ,  $a = 10$ ,  $b = 28$ ,  $c = 8/3$ , 则系统演化为分数阶 Lorenz 混沌系统. 表2给出了利用本文算法进行独立运行 20

次的参数估计结果, 图6和图7分别给出了目标函数和估计参数的收敛过程. 从结果中可以看出: 本文提出的算法完全适用于分数阶 Lorenz 混沌系统的参数估计, 并且对该系统具有良好的参数估计性能.

3) 考虑到实际过程中噪声对参数估计结果的影响, 为了进一步检验算法的性能, 将系统状态变量  $x, y, z$  叠加上  $[-0.1, 0.1]$  的白噪声. 利用本文算法对带噪声的分数阶 Lorenz 混沌系统进行参数估计, 独立运行 20 次的计算结果如表3所示, 图8和图9分别给出了目标函数和估计参数的收敛过程. 可以看出, 当存在观测噪声时, QPPSO 算法仍然可以对分数阶 Lorenz 系统进行很好的参数估计, 体现了本算法良好的鲁棒性能.

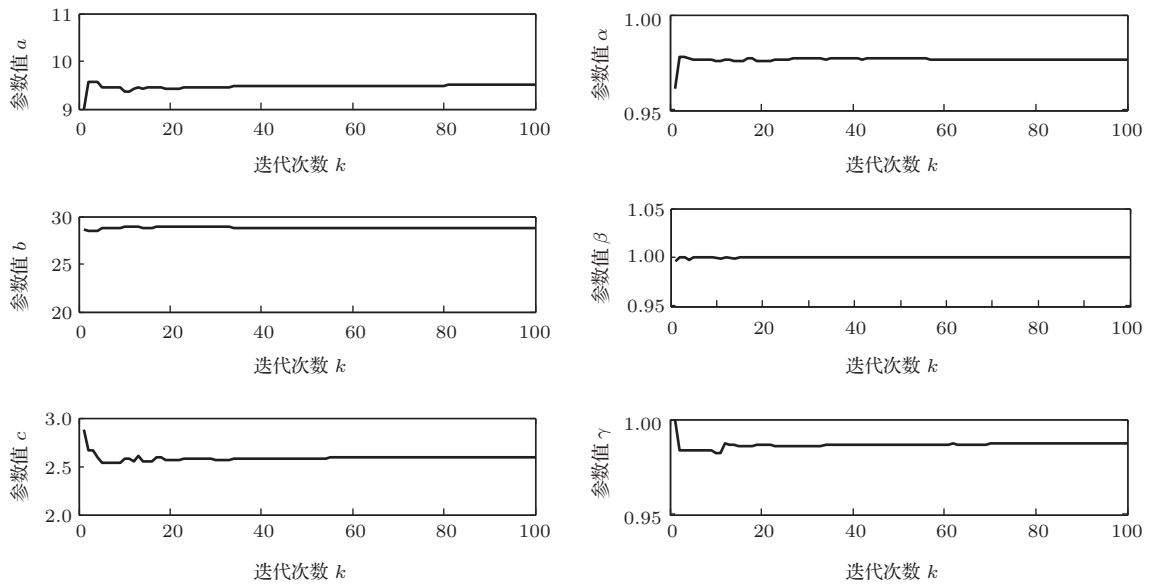


图7 分数阶 Lorenz 系统估计参数值进化曲线

表3 存在噪声时分数阶 Lorenz 系统的参数估计结果

	真实值	平均	最好	最差
$a$	10	9.5847	9.9447	9.0689
$b$	28	28.7419	28.0645	28.7480
$c$	8/3	2.5872	2.6393	2.5867
$\alpha$	0.993	0.9807	0.9962	0.9846
$\beta$	0.993	0.9947	0.9863	0.9772
$\gamma$	0.993	0.9876	0.9937	0.9994
$J$	—	0.0011	$8.0174 \times 10^{-4}$	0.0018

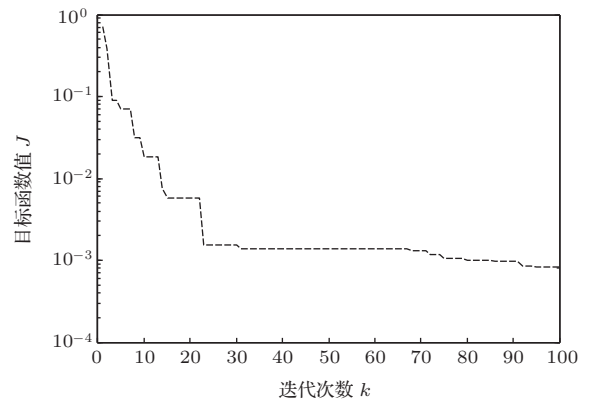


图8 存在噪声时分数阶 Lorenz 混沌系统目标函数的进化曲线

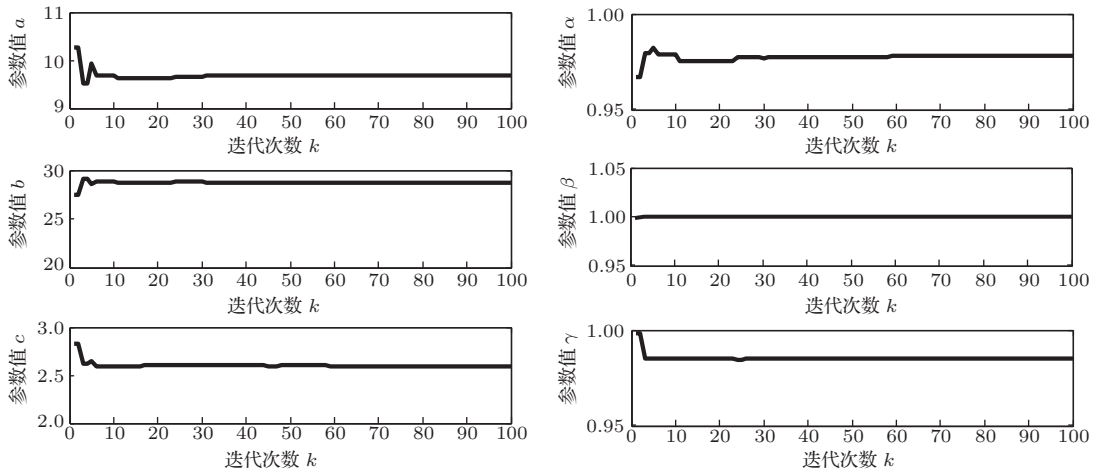


图9 存在噪声时分数阶 Lorenz 混沌系统估计参数值的进化曲线

### 4.2 基于QPPSO的分数阶Chen混沌系统参数估计

分数阶Chen混沌系统的动态特性可以描述为<sup>[19]</sup>

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} &= a \cdot (y - x), \\ \frac{d^\beta y}{dt^\beta} &= (c - a) \cdot x - x \cdot z + c \cdot y, \\ \frac{d^\gamma z}{dt^\gamma} &= x \cdot y - b \cdot z, \end{aligned} \quad (9)$$

其中,  $a, b, c$ 是系统参数,  $\alpha, \beta, \gamma$ 是分数阶次,  $x, y, z$ 为系统的状态变量. 将系统状态变量  $x, y, z$  叠加上  $[-0.1, 0.1]$  的白噪声, 仍然采用四阶龙格库塔算法求解上述方程(取步长  $h = 0.01$ ). 仿真过程中, 先让分数阶Chen混沌系统自由演化, 在经历暂态过程之后任意选取一点作为系统初值, 并以此为零时刻, 分别在参数的真实值和估计值下计算连续  $M$  个状态变量值(取  $M = 300$ ).

表4 存在噪声时分数阶Chen系统的参数估计结果

	真实值	平均	最好	最差
$a$	35	35.1778	35.2243	35.7454
$b$	3	2.9955	2.9969	2.9707
$c$	28	28.0097	28.0322	28.0371
$\alpha$	0.93	0.9315	0.9318	0.9367
$\beta$	0.92	0.9203	0.9207	0.9213
$\gamma$	0.91	0.9094	0.9094	0.9069
$J$	—	$7.0722 \times 10^{-4}$	$2.0 \times 10^{-4}$	$22 \times 10^{-4}$

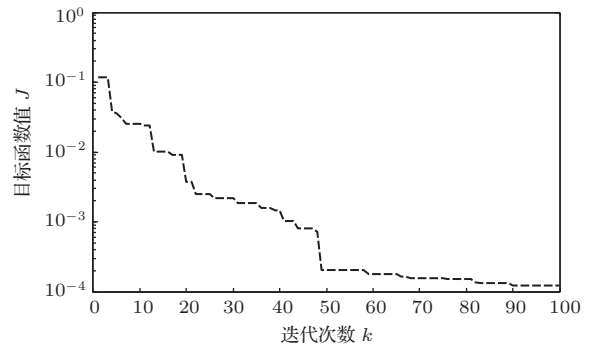


图10 存在噪声时分数阶Chen混沌系统目标函数的进化曲线

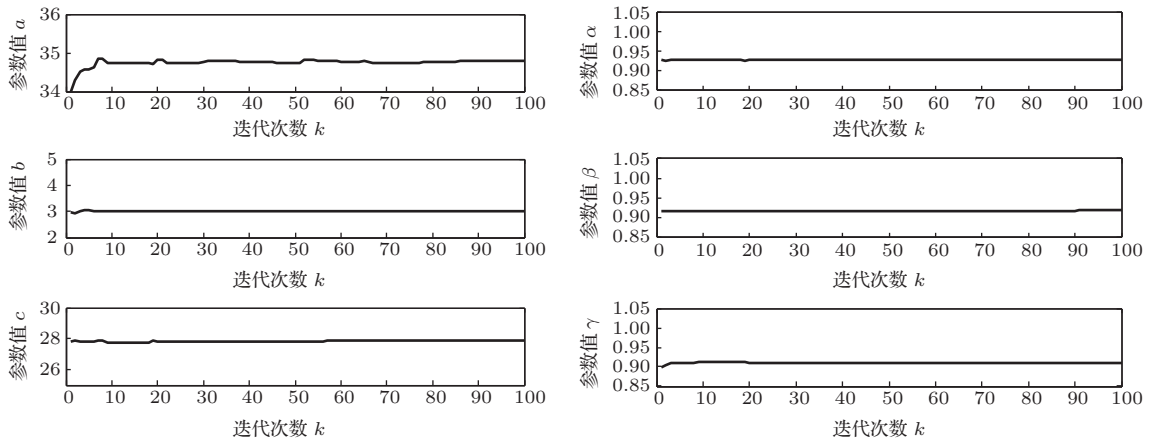


图11 存在噪声时分数阶Chen混沌系统估计参数值的进化曲线

利用 QPPSO 对带噪声的分数阶 Chen 混沌系统进行参数估计, QPPSO 的参数设置与 4.1 节中的参数设置相同. 各待估参数的搜索范围设置如下:  $33 \leq a \leq 37$ ,  $1 \leq b \leq 5$ ,  $26 \leq c \leq 30$ ,  $0.85 \leq \alpha \leq 1$ ,  $0.85 \leq \beta \leq 1$ ,  $0.85 \leq \gamma \leq 1$ . 独立运行 20 次的计算结果如表 4 所示, 图 10 和图 11 分别给出了最好情况下目标函数和估计参数的收敛过程. 可以看出, QPPSO 算法仍然能对分数阶 Chen 混沌系统进行良好的参数估计, 体现了本算法具有的良好通用性能.

## 5 结 论

本文提出了一种新的 QPPSO 算法并应用于分数阶混沌系统的未知参数估计. 该算法利用量子计算的并行特性, 使每代运算的计算次数呈指数增加; 构建了由量子的当前旋转角、个体最优旋转角和全局最优旋转角共同构成的粒子演化方程, 以约束粒子在量子空间中的运动行为, 使算法的搜索能力得到了较大提高. 以典型分数阶 Lorenz 混沌系统和分数阶 Chen 混沌系统的参数估计为例进行了数值仿真. 结果表明, 在无噪声和含噪声条件下, QPPSO 算法计算出的参数估计值都非常接近系统的真实值, 显示了本算法的有效性、鲁棒性和通用性.

## 参考文献

- [1] Sheikhan M, Shahnazi R, Garoucy S 2013 *Neural Computing and Application* **22** 361
- [2] Gandomi A H, Yun G J, Yang X S, Talatahari S 2013 *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **18** 327
- [3] Yassi M, Yassi A, Yaghoobi M 2014 *Iranian Conference on Intelligent Bam*, Iran, February 4-6 2014 p1
- [4] Gao X 2007 *Ph. Dissertation D* (Xian: Xidian University) (in Chinese) [高心 2005 博士学位论文 (西安: 电子科技大学)]
- [5] Ho W H, Chou J H, Guo C Y 2010 *Nonlinear Dyn.* **61** 29
- [6] Yang K Q, Maginu K J, Nomura H 2009 *International Journal of Computer Mathematics* **86** 2225
- [7] Chang, W D. 2007 *Chaos Soliton. Fract.* **32** 1469
- [8] Parlitz U, Junge L 1996 *Phys. Rev. E* **54** 6253
- [9] Wang L, Ye X, Ling P L 2011 *Expert System with Applications* **38** 3238
- [10] Long W, Jiao J J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 110507 (in Chinese) [龙文, 焦建军 2012 物理学报 **61** 110507]
- [11] Lin J, Xu L 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 030505 (in Chinese) [林剑, 许力 2013 物理学报 **62** 030505]
- [12] Wang L, He W P, Wan S Q, Liao J L, He T 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 019203 (in Chinese) [王柳, 何文平, 万仕全, 廖乐健, 何涛 2014 物理学报 **63** 019203]
- [13] Wang D F, Zhang J Y, Wang X Y 2013 *Chin. Phys. B* **22** 100504
- [14] Li A P, Liu G R, Shen X Q 2013 *Computer Engineering and Applications* **49** 4 (in Chinese) [李安平, 刘国荣, 沈细群 2013 计算机工程应用 **49** 4]
- [15] Nielsen M, Chuang I 2010 *Quantum Computation and Quantum Information* (London: Cambridge University Press) pp 61-75
- [16] Li S Y, Li P C 2007 *Chinese Journal of Quantum Electronics* **24** 569 (in Chinese) [李士勇, 李盼池 2007 量子电子学报 **24** 569]
- [17] Caponetto R 2010 *Fractional order systems: modeling and control applications* (World Scientific) pp 62-65
- [18] He Q, Wang L, Liu B 2007 *Chaos Soliton. Fract.* **34** 645
- [19] Li C, Chen G 2004 *Chaos Soliton. Fract.* **22** 549



# Research on particle swarm optimization algorithm with characteristic of quantum parallel and its application in parameter estimation for fractional-order chaotic systems\*

Huang Yu<sup>1)2)</sup> Liu Yu-Feng<sup>1)</sup> Peng Zhi-Min<sup>1)</sup> Ding Yan-Jun<sup>1)†</sup>

1) (State Key Laboratory of Power Systems, Department of Thermal Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

2) (School of Control and Computer Engineering, North China Electric Power University, Baoding 071003, China)

( Received 27 March 2014; revised manuscript received 2 September 2014 )

## Abstract

Parameter estimation for fractional-order chaotic systems is a multi-dimensional optimization problem, which is one of the important issues in fractional-order chaotic control and synchronization. With the characteristic of quantum parallel, a new quantum parallel particle swarm optimization algorithm is proposed for solving the problem of parameter estimation in fractional-order chaotic systems. A new method of quantum coding is presented with quantum parallel characteristic which can make the calculation number of each generation increase exponentially. On the basis of this method, a particle evolution equation composed of quantum current rotation angle, individual optimal rotation angle, and global optimum rotation angle is proposed, which can restraint the behavior of particles in quantum space, and also can improve the search capability of the algorithm. Numerical simulations of the fractional-order Lorenz system and the fractional-order Chen system are conducted and the results demonstrate the effectiveness, robustness and versatility of the proposed algorithm.

**Keywords:** fractional-order chaotic systems, parameter estimation, quantum parallel computation, quantum particle swarm optimization

**PACS:** 05.45.Gg, 05.45.Pq

**DOI:** 10.7498/aps.64.030505

---

\* Project supported by the National Science Foundation of China (Grant Nos. 51206086, 51176085), and the Fundamental Research Funds for the Central Universities (Grant No. 12MS117).

† Corresponding author. E-mail: [dyj@tsinghua.edu.cn](mailto:dyj@tsinghua.edu.cn)