

单模激光增益模型的能量随机共振

张良英 金国祥 汪志云 曹力

Energetic stochastic resonance in gain-noise model for single-mode laser

Zhang Liang-Ying Jin Guo-Xiang Wang Zhi-Yun Cao Li

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 034210 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.034210

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.034210>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I3>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

非各态历经噪声的产生及其应用

Generation and application of non-ergodic noise

物理学报.2014, 63(24): 240503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.240503>

带有分数阶阻尼的压电能量采集系统相干共振

Coherence resonance of piezoelectric energy harvester with fractional damping

物理学报.2014, 63(22): 220504 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.220504>

色关联噪声驱动下双模激光随机共振

Stochastic resonance in a two-mode laser system driven by colored cross-correlation noises

物理学报.2014, 63(19): 194204 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.194204>

一级近似下的双模激光随机共振

The two-mode laser stochastic resonance under the first-order approximation

物理学报.2014, 63(2): 024203 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.024203>

一级近似下的单模激光增益模型随机共振

Stochastic resonance in a gain-noise model of single-mode laser under the first-order approximation

物理学报.2012, 61(7): 074203 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.074203>

单模激光增益模型的能量随机共振*

张良英^{1)†} 金国祥²⁾ 汪志云¹⁾ 曹力¹⁾

1)(湖北文理学院物理与电子工程学院, 襄阳 441053)

2)(武汉工程大学计算机科学与工程学院, 武汉 430073)

(2014年7月4日收到; 2014年9月1日收到修改稿)

本文研究了周期外力对单模激光增益模型所做的功, 结果表明: 功随周期外力角频率的变化出现一个极大值, 即出现能量随机共振现象, 并详细讨论了系统参数和噪声强度对共振峰的影响.

关键词: 乘法噪声, 周期外力做功, 能量随机共振

PACS: 42.60.Mi, 05.40.-a

DOI: 10.7498/aps.64.034210

1 引言

噪声有两面性, 我们通常看到的是其消极的一面, 噪声的建设性的、积极的一面, 很好地表现在随机共振上. 以往的随机共振研究是从随机动力学的角度, 利用信噪比, 驻留时间分布或周期响应的振幅等随噪声强度变化的非单调行为来表征随机共振^[1-17]. 文献^[18]提出了用外部驱动力所作的功作为双稳系统随机共振的一种度量, 从以“力”为立足点转到以“能量”为研究核心. 近年来随机热力学研究取得不少进展, 主要是揭示热力学量涨落的规律.

热是无序的微观粒子运动能量, 系统与外界交换的是不规则运动的能量, 如果把噪声看做分子热运动, 随机力对系统的作用可看作传热过程. 温度反映了微观粒子热运动的激烈程度, 噪声强度应当与温度成正比. 而功是规则有序的运动能量, 做功使布朗粒子以有序的方式位移, 外界对系统做功的直接后果是使布朗粒子有组织地作定向运动. 功是能量传递的量度, 能量是所有运动形式的共同度量, 引入能量有助于对不同运动形态之间的转换以及同一运动形态在不同物体之间的传递进行定量研究. 将信号加载到激光辐射源上, 使激光作为传

递信息的工具, 激光通讯有广阔的应用前景. 激光器工作时总会伴随涨落的出现, 只要激光器在工作, 抽运噪声和自发辐射的量子噪声就会出现, 激光光强方程是随机微分方程^[11]. 本文先计算出周期外力(输入信号)对单模激光增益模型的瞬时功率, 再计算出周期外力在一个周期内所作的功. 结果说明: 当周期外力的角频率等于随机系统漂移力对应的确定论方程的衰减系数时, 外力在一个周期内作的功最大, 即功随周期外力角频率的变化出现能量随机共振现象. 随机系统漂移力对应的确定论方程的衰减系数 γ' 增大共振峰降低, 在噪声强度取值范围内, 噪声强度增大共振峰增高.

2 一级近似下的单模激光增益模型

把周期外力加到单模激光增益模型后的光强方程为^[1]

$$\frac{dI}{dt} = -2KI + \frac{2\Gamma}{1+\beta I}I + D + \frac{2I}{1+\beta I}\xi(t) + 2\sqrt{I}\eta(t) + A\cos(\Omega t). \quad (1)$$

噪声 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的统计性质为

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle &= \langle \eta(t) \rangle = 0, & \langle \xi(t)\xi(s) \rangle &= Q\delta(t-s), \\ \langle \eta(t)\eta(s) \rangle &= D\delta(t-s), \end{aligned}$$

* 国家自然科学基金(批准号: 11045004)和湖北省教育厅科研基金重点项目(批准号: D20132603)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: ly850@sohu.com

$$\langle \xi(s)\eta(t) \rangle = \langle \xi(t)\eta(s) \rangle = \lambda\sqrt{DQ}\delta(t-s),$$

$$(-1 \leq \lambda \leq 1). \quad (2)$$

(1) 式中 I 为激光光强; λ 为噪声关联强度; Q , D 分别为抽运噪声强度和量子噪声强度; $\beta = \frac{A}{\Gamma}$, \tilde{A} 和 Γ 分别为自饱和系数和增益系数; K 为损失系数; A 为信号振幅; Ω 为信号频率. 为了解析求解 (1) 式, 我们采用一级近似下的单模激光增益模型, 将 (1) 式的确定论部分 (即右边头两项) 在确定论定态光强

$$I_0 = \frac{\Gamma - K}{\beta K}$$

附近线性化, 即令

$$I = I_0 + \varepsilon(t),$$

代入 (1) 式中的确定论部分和随机部分, 保留 $\varepsilon(t)$ 的一级项, 则 (1) 式近似为

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = -\gamma\varepsilon(t) + D + \xi'(t) + \varepsilon(t)\eta'(t) + A \cos(\Omega t), \quad (3)$$

式中 $\varepsilon(t)$ 为微扰项, $\gamma = 2K(\Gamma - K)/\Gamma$.

(3) 式中的复合噪声 $\eta'(t)$ 和 $\xi'(t)$ 是高斯噪声 $\eta(t)$ 和 $\xi(t)$ 的线性组合, 故也是高斯噪声, 具体表达式为

$$\eta'(t) = \frac{2}{(1 + \beta I_0)^2} \xi(t) + \frac{1}{\sqrt{I_0}} \eta(t),$$

$$\xi'(t) = \frac{2I_0}{1 + \beta I_0} \xi(t) + 2\sqrt{I_0} \eta(t),$$

噪声 $\xi'(t)$ 和 $\eta'(t)$ 的统计性质由 (2) 式可算出为

$$\langle \xi'(t) \rangle = \langle \eta'(t) \rangle = 0, \quad \langle \eta'(t)\eta'(s) \rangle = D_0\delta(t-s),$$

$$\langle \xi'(t)\xi'(s) \rangle = Q_0\delta(t-s),$$

$$\langle \xi'(t)\eta'(s) \rangle = \langle \eta'(t)\xi'(s) \rangle = Q'\delta(t-s). \quad (4)$$

其中

$$D_0 = \frac{4Q}{(1 + \beta I_0)^4} + \frac{4\lambda\sqrt{DQ}}{\sqrt{I_0}(1 + \beta I_0)^2} + \frac{D}{I_0},$$

$$Q_0 = \frac{4QI_0^2}{(1 + \beta I_0)^2} + \frac{8I_0^{\frac{3}{2}}\lambda\sqrt{DQ}}{(1 + \beta I_0)} + 4I_0D,$$

$$Q' = \frac{4QI_0}{(1 + \beta I_0)^3} + \frac{2(I_0^{\frac{1}{2}} + \beta I_0^{\frac{3}{2}})\lambda\sqrt{DQ}}{(1 + \beta I_0)^2} + 2D.$$

虽然 (3) 式的确定论部分是线性的, 但因为乘法噪声项引起非线性效应, 方程 (3) 作为随机微分方程是非线性的.

设 $t = 0$ 时 $\varepsilon(0) = 0$, (3) 式的形式解为

$$\varepsilon(t) = \int_0^t [D + \xi'(s) + A \cos(\Omega s)] \times e^{\int_s^t (-\gamma + \eta'(s')) ds'} ds. \quad (5)$$

3 周期外力对单模激光增益模型作功的瞬时功率

周期外力对单模激光增益模型作功的功率 $p(t)$ 是对噪声 $\xi'(t)$ 和 $\eta'(t)$ 的单一实现来定义的, 即

$$p(t) = \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \cdot A \cos(\Omega t). \quad (6)$$

把 (3) 式代入 (6) 式得到

$$p(t) = [-\gamma\varepsilon(t) + D + \xi'(t) + \varepsilon(t)\eta'(t) + A \cos(\Omega t)] A \cos(\Omega t). \quad (7)$$

由于上式中的噪声 $\xi'(t)$ 和 $\eta'(t)$ 的实现是随机的且服从高斯分布, 故我们观测到的瞬时功率 $P(t)$ 应是 $p(t)$ 按 $\xi'(t)$ 和 $\eta'(t)$ 的分布所取的平均, 即瞬时功率 $P(t) = \langle p(t) \rangle$.

由 (7) 式得到

$$P(t) = \left\langle \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right\rangle A \cos \Omega t$$

$$= \langle -\gamma\varepsilon(t) + D + \xi'(t) + \varepsilon(t)\eta'(t) + A \cos(\Omega t) \rangle A \cos(\Omega t). \quad (8)$$

把 (5) 式代入 (8) 式, 设 $\gamma > \frac{D_0}{2}$, 利用公式 [19,20]

$$\langle \eta'(t)\xi'(s) e^{\int_s^t \eta'(s') ds'} \rangle = Q'[\delta(t-s) + D_0] e^{\frac{1}{2}D_0(t-s)},$$

经过运算, 得到瞬时功率的表达式

$$P(t) = \left[\frac{2(Q'D_0 - \gamma D) + DD_0 - \gamma Q'}{2(\gamma - D_0/2)} + Q' \right] \times A \cos(\Omega t) + \frac{A^2(D_0\Omega - 2\gamma D)}{2((\gamma - D_0/2)^2 + \Omega^2)} \times \sin(\Omega t) \cos(\Omega t) + \left[\frac{(\gamma - D_0/2)(D_0 - 2\gamma)}{2((\gamma - D_0/2)^2 + \Omega^2)} + 1 \right] \times A^2 \cos^2(\Omega t). \quad (9)$$

图 1 (a) 是噪声关联强度 $\lambda = 1$ 时根据 (9) 式计算得到的 $P(t)-t$ 曲线, 图中显示瞬时功率随时间做周期振动, 周期为 $2\pi/\Omega$. 图 1 (c) 是 $\lambda = -1$ 时的 $P(t)-t$ 曲线, 瞬时功率随时间做周期振动, 周期

也是 $2\pi/\Omega$, 但是相位和振幅与 $\lambda = 1$ 的曲线不同. 图1(b)是 $\lambda = 0$ 时的 $P(t)-t$ 曲线, 图中显示瞬时功率随时间作不对称的周期变化, 周期为 π/Ω , 相邻峰值一高一低, 而相邻谷值也一高一低. 图1的三条曲线有一个共同特点就是瞬时功率在一个周期内有时是作正功有时是作负功, 正功大于负功.

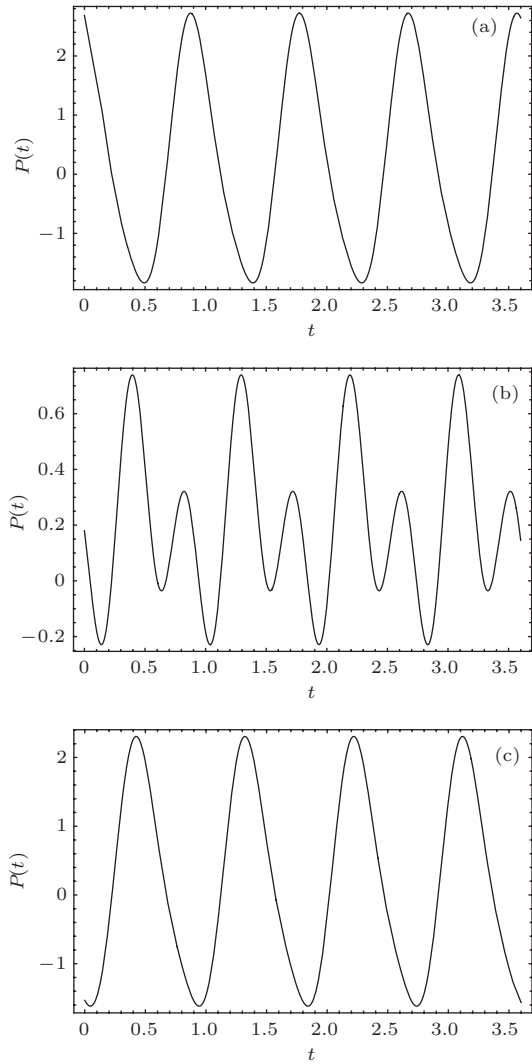


图1 瞬时功率随时间变化的曲线 ($\Omega = 7, D = 3, A = 1, \beta = 1, \gamma = 10, I_0 = 1, Q = 1$) (a) $\lambda = 1$; (b) $\lambda = 0$; (c) $\lambda = -1$

4 能量随机共振

在 t 充分大的渐进情况下, 周期外力在一个驱动周期($2\pi/\Omega$)内所做的功为

$$W = \int_0^{2\pi/\Omega} P(t) dt = \left\{ 1 + \frac{(\gamma - D_0/2)(D_0 - 2\gamma)}{2((\gamma - D_0/2)^2 + \Omega^2)} \right\} \frac{\pi A^2}{\Omega}. \quad (10)$$

图2是根据(10)式计算得到的 $W-\Omega$ 曲线, 可

以看出: 功随输入信号频率 Ω 的变化出现一个共振峰. 图2(a)是系统参数 γ 分别取5, 7, 10时的 $W-\Omega$ 曲线, 图中显示共振峰随 γ 增大而降低, 峰的位置向右移动. 图2(b)是当量子噪声强度 D 分别取0.5, 5, 10时的 $W-\Omega$ 曲线, 图中显示 D 增大峰值增高, 峰的位置向左移动. 以抽运噪声强度 Q 为参数的 $W-\Omega$ 曲线与以 D 为参数的 $W-\Omega$ 曲线相似, 故省略. D 和 Q 的取值范围必须满足条件 $\gamma > D_0/2$, 否则会使瞬时功率的值发散, 系统处于不稳定状态.

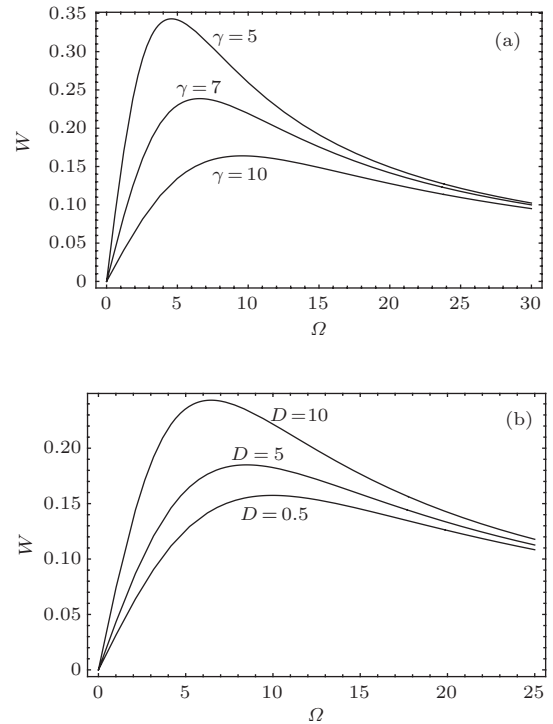


图2 功随周期外力角频率变化的曲线 ($\lambda = -1, A = 1, \beta = 1, I_0 = 1, Q = 1$) (a) $D = 2$; (b) $\gamma = 10$

为了更清楚地揭示能量随机共振的本质, 我们对(3)式做进一步的深入研究.

无周期外力时(3)式可写为

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = -\gamma\varepsilon(t) + D + \xi'(t) + \varepsilon(t)\eta'(t). \quad (11)$$

由随机等价规则^[8], 上述方程可以转换为下列随机等价的单噪声方程:

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = -\gamma\varepsilon(t) + \sqrt{D_0\varepsilon^2 + 2Q'\varepsilon + Q_0}\zeta + D, \quad \langle \zeta(t) \rangle = 0, \quad \langle \zeta(t)\zeta(s) \rangle = \delta(t-s). \quad (12)$$

(12)式的FPE方程为

$$\frac{dP(\varepsilon, t)}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[-\gamma\varepsilon(t) + D + \frac{1}{2}(D_0\varepsilon + Q') \right] \times P(\varepsilon, t) + \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} [D_0\varepsilon^2 + 2Q'\varepsilon + Q_0]$$

$$\times P(\varepsilon, t). \quad (13)$$

上式的漂移力为

$$-\gamma\varepsilon(t) + D + \frac{1}{2}(D_0\varepsilon + Q').$$

漂移力对应的确定论方程为

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = -\gamma'\varepsilon(t) + \frac{Q'}{2} + D, \quad (14)$$

上式中的 $\gamma' = \gamma - D_0/2$, γ 为确定论方程的衰减系数, γ' 为随机系统漂移力对应的确定论方程的衰减系数, 由于噪声的影响 γ' 比确定论衰减系数小. $1/\gamma$ 是确定论系统的弛豫时间, $1/\gamma'$ 是随机系统漂移力对应的确定论方程的弛豫时间, 由于噪声的影响 $1/\gamma'$ 比确定论系统的弛豫时间长.

(10) 式可写为

$$W = \left\{ 1 - \frac{\gamma'^2}{\gamma'^2 + \Omega^2} \right\} \frac{\pi A^2}{\Omega}. \quad (15)$$

图 3 是根据 (15) 式得到的功随周期外力角频率变化的 $W-\Omega$ 曲线, 图中显示: 当周期外力角频率等于随机系统漂移力对应的确定论方程的衰减系数时出现一个共振峰, 共振峰随着 γ' 增大而降低, 峰的位置向右移动. 对 (15) 式求导也可得出 $\Omega = \gamma'$ 时功最大, 或是 $T = 2\pi \frac{1}{\gamma'}$ 时功最大, 即外力的周期等于随机系统漂移力对应的确定论方程的弛豫时间的 2π 倍时外力做功最大.

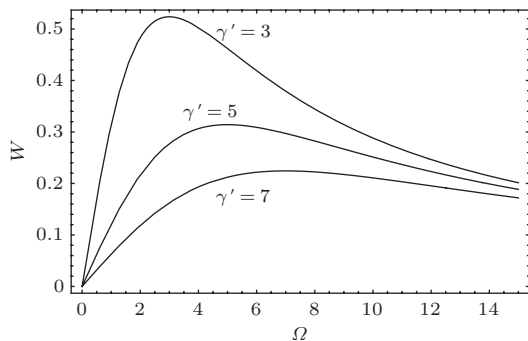


图 3 以随机系统漂移力对应的确定论方程的衰减系数 γ' 为参数时功随周期外力角频率变化的曲线 ($A = 1$)

5 结 论

本文研究了单模激光增益模型的能量随机共振, 首先计算了周期外力对单模激光增益模型的瞬

时功率, 又进一步计算了周期外力在一个驱动周期内所作的功. 结果说明周期外力角频率等于随机系统漂移力对应的确定论方程的衰减系数时做功最大, 即出现能量随机共振现象. 共振峰随确定论方程的衰减系数 γ 或随机系统漂移力对应的确定论方程的衰减系数 γ' 增大而降低; 在量子噪声强度 D 和抽运噪声强度 Q 的取值范围内, 共振峰随 D 和 Q 增大而升高.

参考文献

- [1] Zhang L Y, Cao L, Wu D J, Wang J 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 25
- [2] Jin G X, Zhang L Y, Cao L 2009 *Chin. Phys. B* **18** 952
- [3] Yang M, Li X L, Wu D J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 160502 (in Chinese) [杨明, 李香莲, 吴大进 2012 物理学报 **61** 160502]
- [4] Wang Z Y, Cheng P J, Zhang L Y 2013 *Chin. Phys. Lett.* **30** 099801
- [5] Luo X Q, Zhu S Q 2004 *Chin. Phys.* **13** 1201
- [6] Liu L, Wu D J 2009 *College Physics* **16** 28 (in Chinese) [刘立, 吴大进 2009 大学物理 **16** 28]
- [7] Li J L, Xu B H 2006 *Chin. Phys.* **15** 2867
- [8] Wu D J, Cao L 1994 *Phys. Rev. E* **50** 2496
- [9] Zhang L, Cao L 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 060504
- [10] Zhang L Y, Jin G X, Cao L, Wang Z Y 2012 *Chin. Phys. B* **21** 120502
- [11] Chen L M, Cao L, Fu H X, Qiu J L 1999 *Chinese Journal of Lasers* **26** 352 (in Chinese) [陈黎梅, 曹力, 傅海翔, 丘军林 1999 中国激光 **26** 352]
- [12] Liu L, Zhang L Y, Cao L 2009 *Chin. Phys. B* **18** 4182
- [13] Li J L, Xu B H 2006 *Chin. Phys.* **15** 2867
- [14] Fulinski A, Gora P F 2000 *Journal of Statistical Physics.* **101** 483
- [15] Hernandez-Garcia E, Toral R, San Miguel M 1990 *Phys. Rev. A* **42** 6823
- [16] Zang L Y, Cao L, Wu D J 2009 *Commun. Theoret. Phys.* **52** 143
- [17] Ye Q, Li J X, Yang M, Cao L 2010 *Commun. Theoret. Phys.* **54** 875
- [18] Lin M, Zang M L, Huang Y M 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 080509 (in Chinese) [林敏, 张美丽, 黄咏梅 2011 物理学报 **60** 080509]
- [19] Cao L, Wu D J 2007 *Physica A* **376** 191
- [20] Zang L Y, Cao L, Wu D. J 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 190502 (in Chinese) [张良英, 曹力, 吴大进 2013 物理学报 **62** 190502]

Energetic stochastic resonance in gain-noise model for single-mode laser*

Zhang Liang-Ying^{1)†} Jin Guo-Xiang²⁾ Wang Zhi-Yun¹⁾ Cao Li¹⁾

1) (*School of Physics and Electronic Engineering, Xiangfan University, Xiangyang 441053, China*)

2) (*Hubei Province Key Laboratory of Intelligent Robot, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430073, China*)

(Received 4 July 2014; revised manuscript received 1 September 2014)

Abstract

This paper studies the work which is done by periodical external force to the gain-noise model for a single-mode laser. Result shows that the work exhibits a maximum as the angular frequency of the periodical external force varies, and the energetic stochastic resonance occurs; and the influence of system parameter and noise intensity on the resonance peak is discussed in detail.

Keywords: multiplication noise, work done by a periodical external fore, energetic stochastic resonance

PACS: 42.60.Mi, 05.40.-a

DOI: [10.7498/aps.64.034210](https://doi.org/10.7498/aps.64.034210)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11045004), and the Key project Scientific Research Foundation from the Education Department of Hubei Province of China (Grant No. D20132603).

† Corresponding author. E-mail: ly850@sohu.com