

基于无网格点插值法的旋转悬臂梁的动力学分析

杜超凡 章定国

A meshfree method based on point interpolation for dynamic analysis of rotating cantilever beams

Du Chao-Fan Zhang Ding-Guo

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 034501 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.034501

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.034501>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I3>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

单周期控制三电平 Boost 功率因数校正变换器的慢尺度分岔分析

[Analysis on the slow-scale bifurcation behaviors of one-cycle-controlled three-level Boost power factor correction converter](#)

物理学报.2015, 64(4): 040502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.040502>

脉冲序列控制双断续导电模式 BIFRED 变换器的动力学建模与多周期行为

[Dynamical modeling and multi-periodic behavior analysis on pulse train controlled DCM-DCM BIFRED converter](#)

物理学报.2015, 64(1): 010501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.010501>

基于一阶广义忆阻器的文氏桥混沌振荡器研究

[Wien-bridge chaotic oscillator based on first-order generalized memristor](#)

物理学报.2014, 63(24): 240505 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.240505>

非线性磁式压电振动能量采集系统建模与分析

[Modeling and analysis of piezoelectric vibration energy harvesting system using permanent magnetics](#)

物理学报.2014, 63(24): 240504 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.240504>

旋转柔性悬臂梁动力学的 Bezier 插值离散方法研究

[Bezier interpolation method for the dynamics of rotating flexible cantilever beam](#)

物理学报.2014, 63(15): 154501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.154501>

基于无网格点插值法的旋转悬臂梁的动力学分析*

杜超凡 章定国†

(南京理工大学理学院, 南京 210094)

(2014年8月20日收到; 2014年9月18日收到修改稿)

将基于多项式点插值的无网格方法用于旋转悬臂梁的动力学分析. 利用无网格点插值方法对柔性梁的变形场进行离散, 考虑梁的纵向拉伸变形和横向弯曲变形, 并计入横向弯曲变形引起的纵向缩短, 即非线性耦合项, 运用第二类Lagrange方程推导得到系统刚柔耦合动力学方程. 与有限元法相比, 该方法只需节点信息, 无需定义单元, 具有前处理简单的优势; 构造的形函数采用更多的节点插值, 具有高阶连续性. 将无网格点插值方法的仿真结果与有限元和假设模态法进行比较分析, 验证了该方法的正确性, 并表明其作为一种柔性体离散方法在刚柔耦合多体系统动力学的研究中具有可推广性.

关键词: 柔性梁, 多项式点插值, 无网格法, 固有频率

PACS: 45.10.-b, 05.45.-a, 45.05.+x

DOI: 10.7498/aps.64.034501

1 引言

柔性体的变形场离散问题是柔性多体系统动力学中的基本问题. 按照离散方法选取的不同, 主要有假设模态法、有限元法、有限段法、集中参数法等几类^[1,2]. 假设模态法的突出优点是能用较少的模态获得较好的逼近结果, 计算效率高^[3]. 但当柔性体为不规则形状时, 其振动振型如何表示本身就是难题. 有限元法是通用性很强的一种离散方法, 并在工程分析中得到广泛的应用. 然而由于单元或网格的存在, 使其存在许多固有缺陷^[4]. 有限元法存在的问题主要有: 前处理繁琐, 需要花费大量时间划分网格、不易构造出高阶连续的场函数, 通常只是位移连续而应力应变不连续; 另外, 复杂三维结构的网格生成和重分也是相当困难和费时的^[5]. 国内外已有学者开始寻找新的变形场离散方法^[6,7]. 最近, 范纪华等将B样条插值和Bezier插值方法应用于柔性体变形场的离散, 并将该方法用于旋转悬臂梁的动力学研究中^[8-10].

近年来, 无网格法(meshfree method)作为一

种较新的离散方法得到了迅速发展, 成为了科学和计算方法研究的热点^[11]. 无网格法在建立整个问题域的系统代数方程时, 不需利用预定义的网格信息进行离散. 该方法只需节点信息, 无需划分网格, 克服了有限元法前处理复杂的缺点. 在构造形函数的过程中, 采用更多的节点插值, 通常具有高阶连续性, 从而提高了计算精度. 现有的无网格法有多种, 如无网格点插值法(point interpolation method, PIM)^[12-14]、无网格径向基插值法(radial point interpolation method, RPIM)^[15]、无单元迦辽金法(element-free Galerkin method, EFG)^[16,17]、无网格局部Petrov-Galerkin法(meshless local Petrov-Galerkin method, MLPG)^[18,19]、再生核粒子法(reproducing kernel particle method, RKPM)^[20,21]以及基于边界积分方程的无网格法^[22]等. 文献^[12-14]首次提出PIM, 并成功应用于一维和二维弹性力学的静力学及频率分析中, 获得了与解析解符合很好的结果. 目前, 将无网格法应用于柔性多体系统动力学的研究中鲜有报道.

* 国家自然科学基金(批准号: 11272155, 11132007)、江苏省“333”工程(批准号: BRA2011172)和高校基本科研业务专项资金(批准号: 30920130112009)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zhangdg419@mail.njust.edu.cn

本文采用PIM描述柔性梁变形,并在此基础上对柔性旋转悬臂梁进行动力学分析.考虑柔性梁纵向拉伸变形和横向弯曲变形,并计入由横向弯曲变形引起的纵向缩短,即非线性耦合项^[23].采用浮动坐标系描述系统运动,运用第二类Lagrange方程建立系统的动力学方程,并编制了基于PIM的旋转悬臂梁动力学仿真软件,将仿真结果与假设模态法、有限元法^[24]等传统离散法所得结果进行对比,表明无网格法应用于该领域的正确性.

2 旋转柔性梁动力学模型

图1为水平面内运动的中心刚体-柔性梁系统,中心刚体在平面内绕固定转轴旋转,其上以悬臂方式固结柔性梁,材料均匀且各向同性.

以刚体转动中心 O 为原点建立惯性坐标系 Oij ,在柔性梁上建立浮动坐标系 $O'i'j'$.中心刚体的转动惯量和半径分别为 J_{oh} 和 a ;柔性梁的弹性模量、长度、密度、横截面积、截面惯性矩分别为 E, L, ρ, S, I .

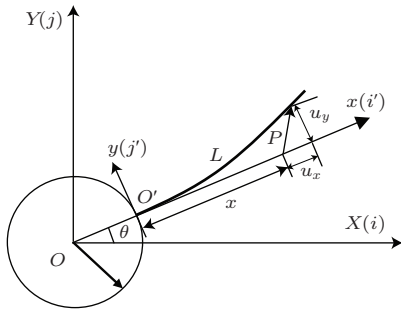


图1 旋转柔性梁物理模型

2.1 系统的动能与势能

如图1所示,柔性梁上任意点 P 变形后的矢径在惯性坐标系 Oij 中可表示为

$$\mathbf{r} = \Theta(\mathbf{r}_A + \boldsymbol{\rho}_0 + \mathbf{u}), \quad (1)$$

式中,

$$\mathbf{r}_A = (a, 0)^T, \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\rho}_0 = (x, 0)^T, \quad (3)$$

$$\mathbf{u} = (u_x, u_y)^T, \quad (4)$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (5)$$

其中, Θ 为浮动坐标系相对于惯性坐标系的方向余弦矩阵.变形矢量 \mathbf{u} 在浮动基下的坐标为

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 + w_c \\ w_2 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

式中, w_1 为柔性梁轴向拉伸量, w_2 为柔性梁横向弯曲挠度, w_c 为柔性梁横向弯曲引起的纵向缩短量,即变形位移的二次耦合项,表达式为

$$w_c = -\frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial w_2}{\partial \zeta} \right)^2 d\zeta. \quad (7)$$

传统的零次混合坐标建模方法中未考虑该项,当大范围运动为高速时,会出现动力柔化效应,梁末端横向变形不收敛,与实际不符.

对(1)式求时间的一阶导数,得到柔性梁上任意点 P 在惯性坐标系下的速度

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\Theta}(\mathbf{r}_A + \boldsymbol{\rho}_0 + \mathbf{u}) + \Theta \dot{\mathbf{u}}. \quad (8)$$

系统动能由中心刚体动能和柔性梁的动能两部分组成,表示为

$$T = \frac{1}{2} J_{oh} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} dV. \quad (9)$$

系统变形势能表示为

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L ES \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right)^2 dx. \quad (10)$$

2.2 无网格点插值法离散

PIM是级数表达式型的函数近似方法之一,是一种实用的生成无网格形函数的方法.设定义在问题域 Ω 中的一个连续函数 $u(\mathbf{x})$ 可由一组场节点表示,在计算点 \mathbf{x} 处 $u(\mathbf{x})$ 可近似表示为

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x}) a_i \\ &= \{p_1(\mathbf{x}) \ p_2(\mathbf{x}) \ \cdots \ p_m(\mathbf{x})\} \begin{Bmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_m \end{Bmatrix} \\ &= \mathbf{p}^T \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (11)$$

式中, $p_i(\mathbf{x})$ 为基函数在空间坐标 $\mathbf{x}^T = [x, y]$ 上的给定单项式, a_i 为 $p_i(\mathbf{x})$ 的待定系数, m 为单项式的个数.对于一维(1D)和二维(2D)空间,(11)式中的线性基函数 \mathbf{p}^T 分别为

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1 \ x], \quad m = 2 \quad (1D), \quad (12)$$

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1 \ x \ y], \quad m = 3 \quad (2D). \quad (13)$$

其二次基函数分别为

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1 \ x \ x^2], \quad m = 3 \quad (1D), \quad (14)$$

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2], \quad m = 6 \quad (2D). \quad (15)$$

完备的 p 阶多项式可由以下一般形式表示为

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1 \ x \ x^2 \ \cdots \ x^{p-1} \ x^p] \quad (1D), \quad (16)$$

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ \cdots \ x^p \ y^p] \quad (2D). \quad (17)$$

为求解得到系数矩阵 \mathbf{a} , 须形成计算点 \mathbf{x} 处的支持域, 如图 2 所示, 其中包含 n 个场节点. 在 PIM 中, 局部支持域中的节点数 n 总是等于基函数个数 m , 即 $n = m$. 对问题域中的任一计算点, 其支持域尺寸 d_s 由下式确定:

$$d_s = \alpha_s d_c, \quad (18)$$

式中, α_s 为该支持域的无量纲尺寸, d_c 为位于计算点附近的节点间距. 如节点是均匀分布的, d_c 即可简单视为相邻两节点的距离; 若节点分布不均匀时, 可视为计算点支持域内的平均节点间距. 文献 [5] 的研究表明, 一般情况下 $\alpha_s = 2.0\text{--}3.0$ 可取得良好的结果.

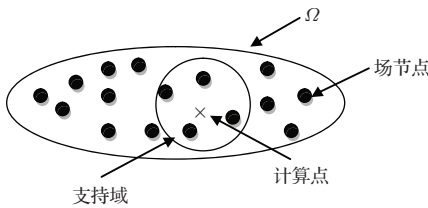


图 2 无网格法中计算点的支持域

(11) 式中系数矩阵 \mathbf{a} 可通过令 $u(\mathbf{x})$ 等于该 n 个节点上的值来确定, 即

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{i=1}^m a_i p_i(x_1), \\ u_2 &= \sum_{i=1}^m a_i p_i(x_2), \\ &\vdots \\ u_n &= \sum_{i=1}^m a_i p_i(x_n). \end{aligned} \quad (19)$$

上式可用如下矩阵表示为

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{P}_m \mathbf{a}, \quad (20)$$

式中,

$$\mathbf{U}_s = \{u_1 \ u_2 \ u_3 \ \cdots \ u_n\}^T \quad (21)$$

是节点变形向量,

$$\mathbf{a} = \{a_1 \ a_2 \ a_3 \ \cdots \ a_n\}^T \quad (22)$$

是未知系数向量,

$$\mathbf{P}_m = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_1) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_1) \\ p_1(\mathbf{x}_2) & p_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_n) & p_2(\mathbf{x}_n) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \quad (23)$$

是所谓的力矩矩阵. 由于在 PIM 中的 $n = m$, 故 \mathbf{P}_m 为维数是 $n \times n$ 或 $m \times m$ 阶的方阵.

求解 (20) 式可得未知系数矩阵,

$$\mathbf{a} = \mathbf{P}_m^{-1} \mathbf{U}_s. \quad (24)$$

将 (24) 式回代到 (11) 式中得

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P}_m^{-1} \mathbf{U}_s = \sum_{i=1}^m \phi_i u_i \\ &= \Phi^T(\mathbf{x}) \mathbf{U}_s, \end{aligned} \quad (25)$$

式中, $\Phi(\mathbf{x})$ 为形函数向量, 定义为

$$\begin{aligned} \Phi^T(\mathbf{x}) &= \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P}_m^{-1} \\ &= \{\phi_1(\mathbf{x}) \ \phi_2(\mathbf{x}) \ \cdots \ \phi_m(\mathbf{x})\}. \end{aligned} \quad (26)$$

以上是 PIM 形函数的形成过程. 该形函数具有 Kronecker δ 函数性质, 可表示为

$$\begin{aligned} \phi_i(\mathbf{x} = \mathbf{x}_j) &= \begin{cases} 1, & i = j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \\ 0, & i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (27)$$

因此可以用同 FEM 一样的方式处理边界条件. 本文中柔性悬臂梁对应的边界条件为梁固定端纵向变形、横向变形及转角为零.

需要注意的是, PIM 在积分过程中, 不同积分点对应不同的支持域, 即不同的积分点其形成的形函数矩阵可能不同, 这与有限元法是不同的. 在有限元法中, 一个单元内所有的积分点均采用相同的节点进行插值.

如图 3 所示, 在梁轴上沿 x 方向将问题域用 N 个场节点表示, 即

$$0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_N = L. \quad (28)$$

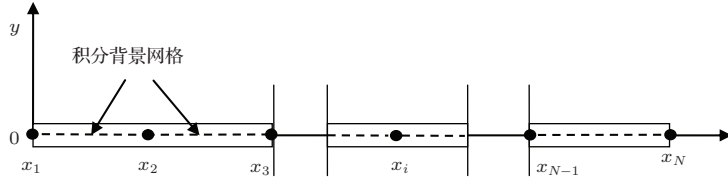


图3 无网格法中柔性梁的离散

取梁轴向和横向变形位移函数

$$w_1 = \sum_{i=1}^n \phi_{xi} u_{xi} = \Phi_x(x) \mathbf{A}(t),$$

$$w_2 = \sum_{i=1}^{2n} \phi_{yi} u_{yi} = \Phi_y(x) \mathbf{B}(t), \quad (29)$$

式中, $\Phi_x(x)$ 和 $\Phi_y(x)$ 分别为梁轴向和横向变形的形函数矩阵; $\mathbf{A}(t)$ 为节点轴向变形随时间变化量的列矢量, $\mathbf{B}(t)$ 为节点横向变形和转角随时间变化量的列矢量. 分别为

$$\Phi_x(x) = (\phi_{x1} \ \phi_{x2} \ \cdots \ \phi_{xn-1} \ \phi_{xn}),$$

$$\mathbf{A}(t) = (u_{x1} \ u_{x2} \ \cdots \ u_{xn-1} \ u_{xn})^T,$$

$$\Phi_y(x) = (\phi_{y1} \ \phi_{y2} \ \cdots \ \phi_{yn-1} \ \phi_{yn}),$$

$$\mathbf{B}(t) = (u_{y1} \ u_{y2} \ \cdots \ u_{yn-1} \ u_{yn})^T, \quad (30)$$

式中, u_{xn} 为第 n 个节点的轴向变形, u_{yn} 为第 n 个节点的横向变形和转角组成的行阵.

将梁的变形位移函数代入 (6) 式中, 得到梁上任意点的变形位移为

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_x \mathbf{A} - \frac{1}{2} \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} \\ \Phi_y \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad (31)$$

其中, $\mathbf{H}(x)$ 为耦合形函数, 表达式如下:

$$\mathbf{H}(x) = \int_0^x \Phi_y'^T(\zeta) \Phi_y'(\zeta) d\zeta, \quad (32)$$

其中, $\Phi_y'(\zeta)$ 表示 $\Phi_y(\zeta)$ 对 ζ 求一阶导数.

对 (31) 式求时间 t 的一阶导数, 可得到梁上任意点的变形速度为

$$\dot{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_x \dot{\mathbf{A}} - \mathbf{B}^T \mathbf{H} \dot{\mathbf{B}} \\ \Phi_y \dot{\mathbf{B}} \end{bmatrix}. \quad (33)$$

2.3 系统的动力学方程

将柔性梁轴向和横向变形位移函数代入系统的动能和变形势能表达式中, 取广义坐标

$\mathbf{q} = (\theta, \mathbf{A}^T, \mathbf{B}^T)^T$, 运用第二类 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{F}_q, \quad (34)$$

式中, $\mathbf{F}_q = (\tau, \mathbf{0}, \mathbf{0})^T$ 为广义力列阵, τ 为刚体上合外力关于转动中心 O 的主矩. 由 (7) 式可以看出横向弯曲引起的纵向缩短量 w_c 是横向变形 w_2 的二阶小量, 作适当的简化, 舍去与 w_c 相关的一些高阶小量, 如 $w_c^2, w_1 w_c, w_2 w_c$ 等, 可得系统的动力学方程为

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & \mathbf{0} \\ M_{31} & \mathbf{0} & M_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\mathbf{A}} \\ \ddot{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_\theta \\ Q_A \\ Q_B \end{pmatrix}, \quad (35)$$

式中,

$$M_{11} = J_{oh} + J_{ob} + 2\mathbf{S}_x \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{M}_1 \mathbf{A} + \mathbf{B}^T \mathbf{M}_2 \mathbf{B} - \mathbf{B}^T (a\mathbf{C} + \mathbf{D}) \mathbf{B}, \quad (36)$$

$$M_{21} = M_{12}^T = -\mathbf{M}_3 \mathbf{B}, \quad (37)$$

$$M_{31} = M_{13}^T = -\mathbf{S}_y^T + \mathbf{M}_3^T \mathbf{A}, \quad (38)$$

$$M_{22} = M_1 = \int_0^L \rho S \Phi_x^T \Phi_x dx, \quad (39)$$

$$M_{33} = M_2 = \int_0^L \rho S \Phi_y^T \Phi_y dx, \quad (40)$$

$$Q_\theta = \tau - 2\dot{\theta} [\mathbf{S}_x \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{A}^T \mathbf{M}_1 \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{B}^T \mathbf{M}_2 \dot{\mathbf{B}} - \mathbf{B}^T (a\mathbf{C} + \mathbf{D}) \dot{\mathbf{B}}], \quad (41)$$

$$Q_A = \dot{\theta}^2 \mathbf{S}_x^T + 2\dot{\theta} \mathbf{M}_3 \dot{\mathbf{B}} + (\dot{\theta}^2 \mathbf{M}_1 - \mathbf{K}_1) \mathbf{A}, \quad (42)$$

$$Q_B = \dot{\theta}^2 (\mathbf{M}_2 - a\mathbf{C} - \mathbf{D}) \mathbf{B} - 2\dot{\theta} \mathbf{M}_3 \dot{\mathbf{A}} - \mathbf{K}_2 \mathbf{B}. \quad (43)$$

以上各式中 $J_{ob}, \mathbf{S}_x, \mathbf{S}_y, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{K}_1$ 和 \mathbf{K}_2 为常系数矩阵, 带下划线的项是附加耦合项, 由于在变形位移中考虑了横向变形引起的纵向缩短, 这些附加的耦合项出现在广义质量阵和广义力阵中. 以上各式为定义在全局问题域上的, 为计算上式中的积分需将整个问题域离散成一组不相互重叠的积分背景网格. 取柔性梁相邻两节点的

间距为积分域, 总体积分可表示为

$$\int_{\Omega} \mathbf{G} d\Omega = \sum_k^{n_c} \int_{\Omega_k} \mathbf{G} d\Omega, \quad (44)$$

式中, n_c 为积分背景网格个数, \mathbf{G} 表示被积函数, Ω_k 为第 k 个积分背景网格的域. 采用 Gauss 积分法求解数值积分, 在每个积分背景网格中使用 n_g 个 Gauss 点, (44) 式变为

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{G} d\Omega &= \sum_k^{n_c} \int_{\Omega_k} \mathbf{G} d\Omega \\ &= \sum_k^{n_c} \sum_{i=1}^{n_g} \hat{w}_i \mathbf{G}(\mathbf{x}_{Q_i}) |J_{ik}|, \end{aligned} \quad (45)$$

式中, \hat{w}_i 为第 i 个 Gauss 积分点 \mathbf{x}_{Q_i} 的 Gauss 加权因子, J_{ik} 为对积分背景网格 k 在积分点 \mathbf{x}_{Q_i} 处进行积分的 Jacobi 矩阵.

为得到各常数阵的数值解, 将整个问题域中的场节点从 1 到 N 顺序编号, 以方阵 \mathbf{K}_1 为例, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{IJ} &= \sum_k^{n_c} \sum_{i=1}^{n_g} \underbrace{\rho S \hat{w}_i \phi^T(\mathbf{x}_{Q_i}) \phi_{xJ}(\mathbf{x}_{Q_i}) |J_{ik}|}_{\mathbf{K}_{IJ}^{ik}} \\ &= \sum_k^{n_c} \sum_{i=1}^{n_g} \mathbf{K}_{IJ}^{ik}, \\ I, J &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (46)$$

(46) 式表示节点矩阵 \mathbf{K}_{IJ} 通过局部支持域中包含节点 I 和节点 J 的所用积分点的贡献之和得到的数值结果. 如果节点 I 和节点 J 不同时位于积分点 \mathbf{x}_{Q_i} 的局部支持域中, 则 \mathbf{K}_{IJ}^{ik} 为零. 则 \mathbf{K}_1 的形式为

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \cdots & \mathbf{K}_{1N} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \cdots & \mathbf{K}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{N1} & \mathbf{K}_{N2} & \cdots & \mathbf{K}_{NN} \end{bmatrix}. \quad (47)$$

类似的, 以列阵 \mathbf{S}_y 为例, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_y &= \sum_k^{n_c} \sum_{i=1}^{n_g} \underbrace{\rho S w_i (a + \mathbf{x}_{Q_i}) \phi_{yI}^T(\mathbf{x}_{Q_i}) |J_{ik}|}_{\mathbf{S}_I^{ik}} \\ &= \sum_k^{n_c} \sum_{i=1}^{n_g} \mathbf{S}_I^{ik}, \\ I &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (48)$$

按照以上方阵与列阵的求法, 可得到 (35) 式中各矩阵的形式.

3 悬臂梁的横向弯曲固有频率

当悬臂梁系统在做大范围旋转运动时, 柔性梁的横向弯曲振动通常都比较明显, 而梁的纵向振动相对可以忽略不计. 因此, 本节对不考虑纵向变形影响的横向弯曲振动进行研究. 为了简化分析, 假定大范围转动为匀速, 即 $\ddot{\theta} = 0$. 梁的横向弯曲振动方程可由 (35) 式获得

$$\mathbf{M}_{33} \ddot{\mathbf{B}} + [\dot{\theta}^2 (\mathbf{D} - \mathbf{M}_{33}) + \mathbf{K}_2] \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad (49)$$

式中, \mathbf{M}_{33} 是动力柔化项, \mathbf{D} 是由于考虑了横向弯曲引起的纵向缩短量 w_c 产生的, 称为动力刚化阵, 整体上 $\mathbf{D} - \mathbf{M}_{33}$ 产生动力刚化效应, 而 \mathbf{K}_2 则是结构动力学中的静刚度阵.

对 (49) 式进行无量纲化处理, 引入下列无量纲变量:

$$\begin{aligned} \varsigma &= t/T, \quad \xi = x/L, \quad \kappa_2 = \mathbf{B}/L, \\ \delta &= a/L, \quad \gamma = T\dot{\theta}, \end{aligned} \quad (50)$$

其中, $T = (\rho S L^4 / EI)^{1/2}$.

表 1 为中心刚体半径为 0, 大范围转动速度恒定的情况下, 采用三种不同离散方法得到的悬臂梁横向弯曲的无量纲第一阶固有频率. 假设模态法取横向 3 阶模态、有限元法取 10 个单元、PIM 取 11 个节点. 从表 1 中可以看出, 第一阶固有频率随着转动速度的增大而增大, 假设模态法的结果随着转速

表 1 柔性梁在不同转速下三种离散方法横向弯曲无量纲第一阶固有频率比较

无量纲角速度比率 γ	假设模态法	有限元法	PIM
0	3.51601	3.51601	3.51601
1	3.54323	3.54326	3.54323
2	3.62186	3.62188	3.62180
3	3.74384	3.74369	3.74352
4	3.89879	3.89803	3.89774
5	4.07656	4.07434	4.07393
6	4.26880	4.26384	4.26328
7	4.46949	4.45995	4.45926
8	4.67468	4.65818	4.65734
9	4.88202	4.85565	4.85466
10	5.09025	5.05060	5.04946
20	7.20237	6.78681	6.78400

的增大与有限元法的误差越来越大,说明在高速旋转下,假设模态法的精度会降低;而PIM与有限元法的结果在不同转速下基本一致,说明PIM能满足精度要求及该方法的正确性.图4表示在不同无量纲角速度比率下,三种方法横向弯曲无量纲第一阶固有频率对比.从图中更能形象的说明假设模态法的仿真结果随着转速的提高误差越来越大.而PIM的仿真结果则与有限元法基本一致.

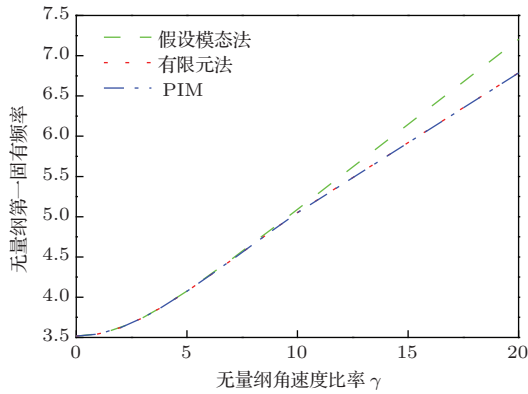


图4 (网刊彩色)不同转速下三种离散方法横向弯曲无量纲第一阶固有频率比较

4 大范围运动已知的动力学仿真

大范围运动已知时,(35)式转化为

$$\begin{pmatrix} M_{22} & 0 \\ 0 & M_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{A} \\ \ddot{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_A - M_{21}\ddot{\theta} \\ Q_B - M_{31}\ddot{\theta} \end{pmatrix}. \quad (51)$$

为了验证无网格点插值法的正确性及分析大范围运动变形位移,令中心刚体半径 $a = 0$,梁的参数取与文献[25]中相同,分别为:长度 $L = 8$ m,横截面积 $S = 7.2968 \times 10^{-5}$ m²,截面惯性矩 $I = 8.2189 \times 10^{-9}$ m⁴,体积密度 $\rho = 2766.7$ kg/m³,弹性模量 $E = 68.952$ GPa.

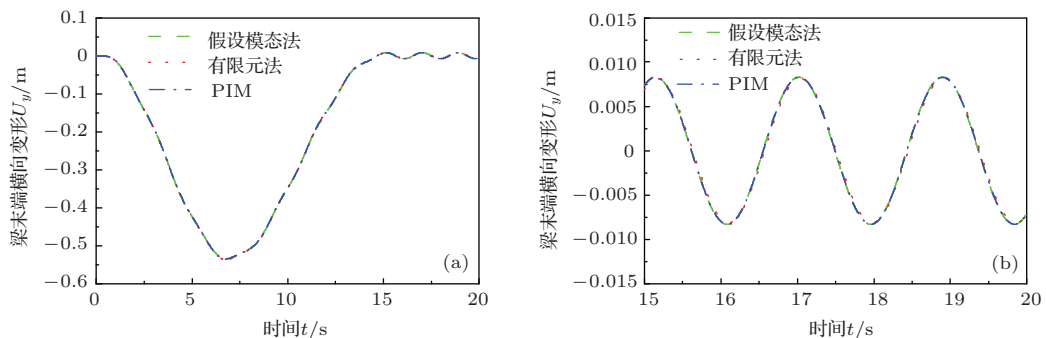


图5 (网刊彩色)柔性梁末端横向变形($\Omega_0 = 4$ rad/s) (a) 0—20 s 梁末端横向变形; (b) 15—20 s 梁末端横向变形

假定悬臂梁由静止开始作大范围旋转运动,大范围运动展开角速度规律为

$$\dot{\theta} = \begin{cases} \frac{\Omega_0}{T}t - \frac{\Omega_0}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right), & 0 \leq t \leq T, \\ \Omega_0, & t > T, \end{cases} \quad (52)$$

式中, $T = 15$ s, 15 s后转速到达 Ω_0 , 然后以该速度匀速旋转. Ω_0 分别取为 $\Omega_0 = 4$ rad/s, $\Omega_0 = 10$ rad/s和 $\Omega_0 = 20$ rad/s.

图5表示 $\Omega_0 = 4$ rad/s时柔性梁末端横向弯曲变形.右图为匀速转动时的局部变形放大图.如图所示,PIM、假设模态法和有限元法的振幅及频率基本一致.图6表示 $\Omega_0 = 4$ rad/s时柔性梁末端横向变形速度,如图所示,三种离散方法的仿真结果基本一致.图7表示 $\Omega_0 = 10$ rad/s时柔性梁末端横向弯曲变形,图8表示 $\Omega_0 = 10$ rad/s时柔性梁末端横向弯曲变形速度,如图所示,三种离散方法的仿真结果同样非常相似,但相对而言,有限元法与PIM仿真结果更为接近,而假设模态法在高速时仿真结果略不同于其他两种方法.图9表示 $\Omega_0 = 20$ rad/s时柔性梁末端横向弯曲变形,图10表示 $\Omega_0 = 20$ rad/s时柔性梁末端横向弯曲变形速度,从图中可更明显的看出,PIM和有限元法的仿真结果基本一致,但假设模态法的仿真结果已经与另两种方法出现较大的差别,进一步说明在高速转动下,假设模态法的精度会降低.图11表示 $\Omega_0 = 4$ rad/s, $E = 6.8952$ GPa时柔性梁末端横向弯曲变形.如图所示,梁的最大变形超过了5 m,属于大变形,PIM与有限元法结果仍然基本一致,而假设模态法已经发散,说明源于结构力学中固有振型的假设模态法,适用范围局限于小变形情况,不能处理大变形问题,而本文方法和有限元法适用于大变形问题.

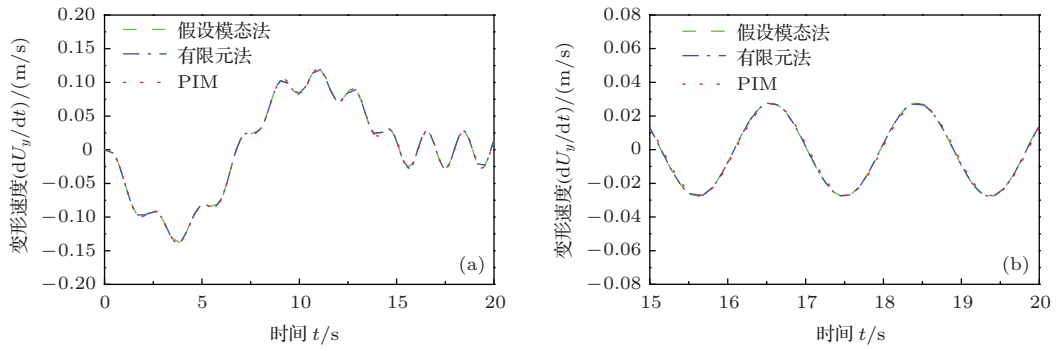


图6 (网刊彩色) 柔性梁末端横向变形速度 ($\Omega_0 = 4 \text{ rad/s}$) (a) 0—20 s 梁末端横向变形速度; (b) 15—20 s 梁末端横向变形速度

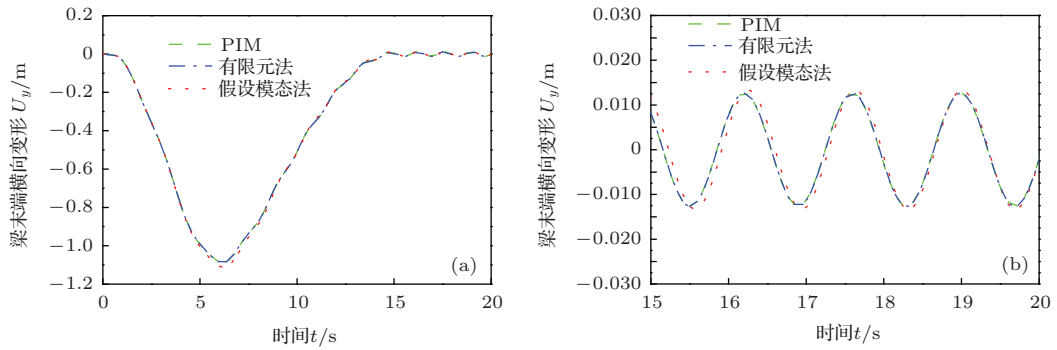


图7 (网刊彩色) 柔性梁末端横向变形 ($\Omega_0 = 10 \text{ rad/s}$) (a) 0—20 s 梁末端横向变形; (b) 15—20 s 梁末端横向变形

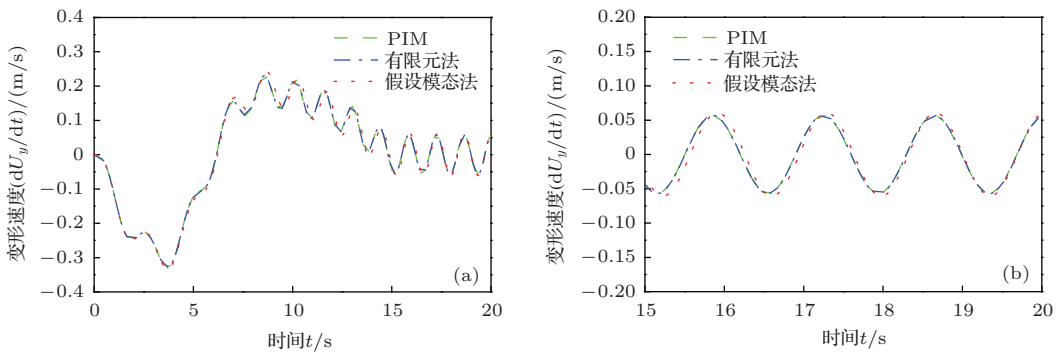


图8 (网刊彩色) 柔性梁末端横向变形速度 ($\Omega_0 = 10 \text{ rad/s}$) (a) 0—20 s 梁末端横向变形速度; (b) 15—20 s 梁末端横向变形速度

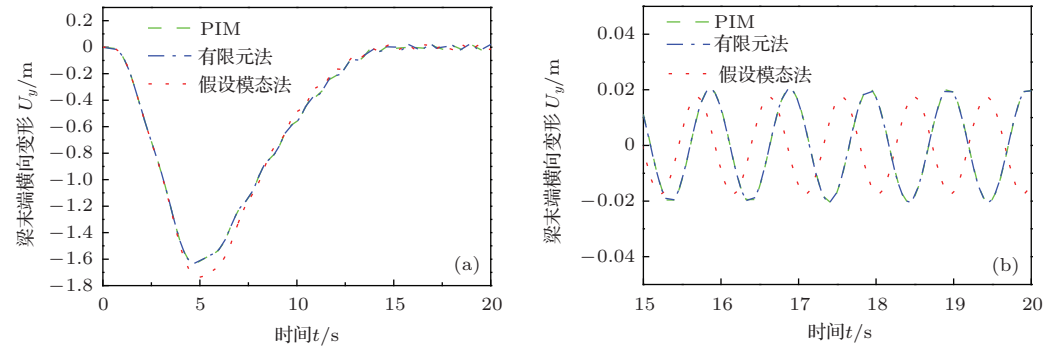


图9 (网刊彩色) 柔性梁末端横向变形 ($\Omega_0 = 20 \text{ rad/s}$) (a) 0—20 s 梁末端横向变形; (b) 15—20 s 梁末端横向变形

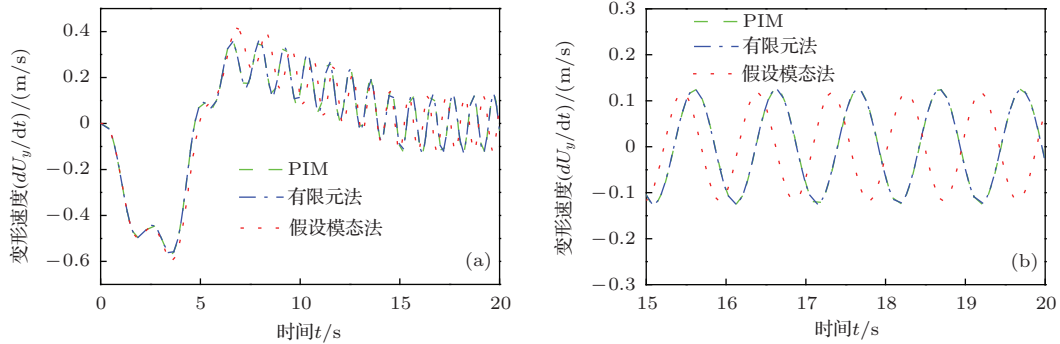


图10 (网刊彩色) 柔性梁末端横向变形速度 ($\Omega_0 = 20 \text{ rad/s}$) (a) 0—20 s 梁末端横向变形速度; (b) 15—20 s 梁末端横向变形速度

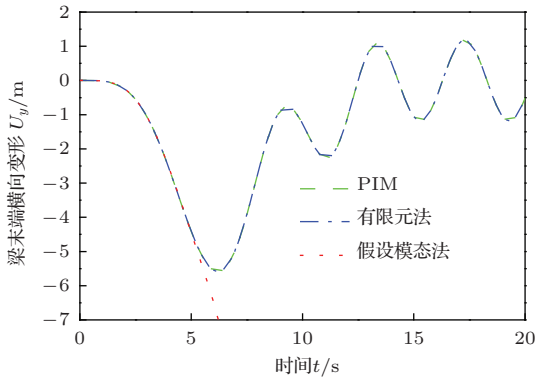


图11 (网刊彩色) 柔性梁末端横向变形 ($\Omega_0 = 4 \text{ rad/s}$, $E = 6.8952 \text{ GPa}$)

表2 三种离散方法的计算相对时间、相对误差、旋转角速度恒定时响应振幅 ($\Omega_0 = 4 \text{ rad/s}$)

离散方法	计算相对时间	旋转角速度恒定时响应振幅/m	计算相对误差/%
有限元法	1.59	0.00830	—
假设模态法(3阶)	1.00	0.00813	2.05
假设模态法(4阶)	10.69	0.00814	1.93
假设模态法(5阶)	19.05	0.00814	1.93
假设模态法(6阶)	32.63	0.00814	1.93
假设模态法(7阶)	50.90	0.00814	1.93
PIM	1.48	0.00829	0.12

表2, 3, 4分别表示 $\Omega_0 = 4 \text{ rad/s}$, $\Omega_0 = 10 \text{ rad/s}$ 和 $\Omega_0 = 20 \text{ rad/s}$ 时三种离散方法的计算相对时间、相对误差及大范围旋转角速度恒定时的响应振幅。其中, 假设模态法纵、横模态截断数分别各取3—7阶。计算相对时间以3阶模态截断数为标准, 相对误差以有限元法为标准。有限元法将梁离散为10个单元, PIM将梁离散为11个节点。从表中可以看出, 模态截断数为3阶的假设模态法计算效率最高, 但随着转动速度的增加, 大范围旋转角

速度恒定时的振幅与有限元法对比误差越来越大, 当 $\Omega_0 = 20 \text{ rad/s}$ 时, 误差达到13.86%; 同一转动角速度下, 假设模态法的模态截断数越多, 计算效率越低, 但精度并没有明显提高; PIM与有限元法计算效率相当, 且大范围恒定时的振幅基本一致。

表3 三种离散方法的计算相对时间、相对误差、旋转角速度恒定时响应振幅 ($\Omega_0 = 10 \text{ rad/s}$)

离散方法	计算相对时间	旋转角速度恒定时响应振幅/m	计算相对误差/%
有限元法	1.86	0.0126	—
假设模态法(3阶)	1.00	0.0133	5.56
假设模态法(4阶)	10.73	0.0132	4.76
假设模态法(5阶)	19.13	0.0131	3.97
假设模态法(6阶)	32.74	0.0131	3.97
假设模态法(7阶)	50.98	0.0131	3.97
PIM	1.62	0.0126	0.00

表4 三种离散方法的计算相对时间、相对误差、旋转角速度恒定时响应振幅 ($\Omega_0 = 20 \text{ rad/s}$)

离散方法	计算相对时间	旋转角速度恒定时响应振幅/m	计算相对误差/%
有限元法	2.13	0.0202	—
假设模态法(3阶)	1.00	0.0174	13.86
假设模态法(4阶)	10.82	0.0185	8.41
假设模态法(5阶)	19.26	0.0186	7.92
假设模态法(6阶)	33.21	0.0186	7.92
假设模态法(7阶)	51.94	0.0186	7.92
PIM	2.04	0.0202	0.00

5 结 论

1) 梁的横向弯曲第一固有频率随着恒定角速度的增大而增大, 假设模态法随着转速的增大误差

越来越大. 无论转速高低, PIM与有限元法仿真结果基本一致, 说明无网格法应用于旋转悬臂柔性梁系统的正确性及相对于假设模态法的优越性.

2) 模态截断数取3阶的假设模态法计算效率最高, 模态截断数越多, 计算效率越低; PIM与有限元法计算效率相当. 随着转速的增大, 假设模态法精度降低, 即使增加模态阶数, 精度也不会明显提高, 而PIM与有限元法仿真结果基本一致.

3) 在处理大变形问题研究中, 假设模态法结果发散, 不能用于求解大变形问题. PIM与有限元法结果收敛且基本一致, 说明这两种方法适用于求解大变形问题.

参考文献

- [1] Hong J Z, You C L 2004 *Journal of Dynamics and Control* **2** 1 (in Chinese) [洪嘉振, 尤超蓝 2004 动力学与控制学报 **2** 1]
- [2] Dwivedy S K, Eberhard P 2006 *Mechanism and Machine Theory* **41** 749
- [3] Fang J S, Zhang D G 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 044501 (in Chinese) [方建士, 章定国 2013 物理学报 **62** 044501]
- [4] Zhang X, Liu Y 2004 *Meshless Method* (Beijing: Tsinghua University Press) pp1-6 (in Chinese) [张雄, 刘岩 2004 无网格法 (北京: 清华大学出版社) 第1—6页]
- [5] Liu G R, Gu Y T (translated by Wang J M, Zhou X J) 2007 *An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming* (Shandong: Shandong University Press) pp24-40 (in Chinese) [刘桂荣, 顾元通著 (王建明, 周学军译) 2004 无网格法理论及程序设计 (山东: 山东大学出版社) 第24—40页]
- [6] Sanborn G G, Shabana A A 2009 *Multibody Syst. Dyn.* **22** 181
- [7] Sanborn G G, Shabana A A 2009 *Nonlinear Dyn.* **58** 565
- [8] Fan J H, Zhang D G 2012 *Journal of Mechanical Engineering* **48** 59 (in Chinese) [范纪华, 章定国 2012 机械工程学报 **48** 59]
- [9] Fan J H, Zhang D G 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 154501 (in Chinese) [范纪华, 章定国 2014 物理学报 **63** 154501]
- [10] Fan J H, Zhang D G, Hong J Z 2012 *Journal of Dynamics and Control* **10** 347 (in Chinese) [范纪华, 章定国, 洪嘉振 2012 动力学与控制学报 **10** 347]
- [11] Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, Fleming M, Krysl P 1996 *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **19** 3
- [12] Liu G R, Gu Y T 1999 *Proceedings of 4th Asia-Pacific Conference on Computational Mechanics Singapore*, Dec, 1999 p1009
- [13] Liu G R, Gu Y T 2001 *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **50** 937
- [14] Liu G R, Dai K Y, Lim K M, Gu Y T 2002 *Computational Mechanics* **29** 510
- [15] Wang J G, Liu G R 2003 *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **54** 1623
- [16] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L 1994 *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **37** 229
- [17] Cheng R J, Ge H X 2009 *Chin. Phys. B* **18** 4059
- [18] Atluri S N, Zhu T L 1998 *Comput. Mech.* **22** 117
- [19] Chen L, Liew K M 2010 *Comput. Mech.* **47** 455
- [20] Liu W K, Jun S, Zhang Y F 1995 *Int. J. Numer. Meth. Fluids* **20** 1081
- [21] Cheng R J, Liew K M 2009 *Comput. Mech.* **45** 1
- [22] Li X G, Dai B D, Wang L H 2010 *Chin. Phys. B* **19** 120202
- [23] Liu J Y, Li B, Hong J Z 2006 *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics* **38** 276 (in Chinese) [刘锦阳, 李彬, 洪嘉振 2006 力学学报 **38** 276]
- [24] Chung J, Yoo H H 2002 *Journal of Sound and Vibration* **249** 147
- [25] He X S, Li X H, Deng F Y 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 024502 (in Chinese) [和兴锁, 李雪华, 邓峰岩 2011 物理学报 **60** 024502]

A meshfree method based on point interpolation for dynamic analysis of rotating cantilever beams^{*}

Du Chao-Fan Zhang Ding-Guo[†]

(School of Sciences, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

(Received 20 August 2014; revised manuscript received 18 September 2014)

Abstract

A meshfree method based on polynomial point interpolation method (PIM) is proposed for dynamic analysis of a rotating cantilever beam; PIM is used to describe the deformation of the flexible beam. Its longitudinal and transverse deformations are both taken into consideration, and the coupling term of the deformation which is caused by the transverse deformation is included in the longitudinal deformation of the beam. The rigid-flexible coupling dynamic equations of the system are derived via employing Lagrange's equations of the second kind. Compared with the finite element method (FEM), only individual nodal data are required in the current method so that its preprocessor is easier, and the shape functions constructed have high-order continuities due to more nodes to be interpolated. Simulation results of the meshfree method are compared with those obtained by using FEM and assumption of modes method. It is demonstrated that the meshfree method can be extended to the field of multibody system dynamics.

Keywords: flexible beam, point interpolation method, meshfree method, natural frequency

PACS: 45.10.-b, 05.45.-a, 45.05.+x

DOI: [10.7498/aps.64.034501](https://doi.org/10.7498/aps.64.034501)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11272155, 11132007), the 333 Project of Jiangsu Province, China (Grant No. BRA2011172), and the Fundamental Research Funds for the Central Universities of China (Grant No. 30920130112009).

† Corresponding author. E-mail: zhangdg419@mail.njust.edu.cn