

由 N - E - V 分布及赝势法研究弱磁场中弱相互作用费米子气体的热力学性质

李鹤龄 王娟娟 杨斌 沈宏君

Investigation of thermodynamic properties of weakly interacting Fermi gas in weakly magnetic field by using the N - E - V distribution and pseudopotential method

Li He-Ling Wang Juan-Juan Yang Bin Shen Hong-Jun

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), 64, 040501 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.040501

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.040501>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I4>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

三维简谐势阱中玻色-爱因斯坦凝聚的边界效应

[Boundary effects of Bose-Einstein condensation in a three-dimensional harmonic trap](#)

物理学报.2014, 63(17): 170501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.170501>

强磁场中弱相互作用费米气体的稳定性

[Stability of a weakly interacting Fermi gas in a strong magnetic field](#)

物理学报.2014, 63(12): 120504 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.120504>

考虑前后车效应的反馈控制跟驰模型

[A car-following model with considering control signals from front and rear](#)

物理学报.2014, 63(11): 110504 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.110504>

亚稳相的纳米尺度稳定化: 热力学模型与实验研究

[Nanoscale stabilization of metastable phase: thermodynamic model and experimental studies](#)

物理学报.2012, 61(20): 200510 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.200510>

强磁场中 Fermi 气体的稳定性及顺磁性

[The stability and paramagnetism of Fermi gas in a strong magnetic field](#)

物理学报.2012, 61(10): 100503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.100503>

由 $N-E-V$ 分布及赝势法研究弱磁场中弱相互作用费米子气体的热力学性质*

李鹤龄 王娟娟 杨斌[†] 沈宏君

(宁夏大学物理电气信息学院, 银川 750021)

(2014年8月11日收到; 2014年9月23日收到修改稿)

基于低温下量子系统的相关实验多是在体积、能量和粒子数都可变的外场束缚下进行的事实, 由体积、能量和粒子数可变的完全开放系统的统计分布 ($N-E-V$ 分布) 研究了弱磁场中弱相互作用费米系统的热力学性质. 首先求出了一般情况下由费米积分表示的内能和热容的解析表达式. 在此基础上, 又给出了在低温极限条件下内能与热容的解析表达式和数值计算结果, 并将 $N-E-V$ 分布 (粒子数密度变化) 的结果与赝势法 (粒子数密度不变) 的结果进行了比较. 结果表明: $N-E-V$ 分布方法的计算结果总是补偿赝势法计算结果的过度偏差. 由 $N-E-V$ 分布方法所得结果最特异之处在于: 在低温条件下, 弱磁场中弱相互作用费米系统存在一相变温度 t_c , 其正处于费米系统发生玻色-爱因斯坦凝聚 (BEC) 和费米原子形成库珀对的超流状态 (BCS) 相变及 BEC-BCS 跨越的温度范围内, 且不随反映弱相互作用大小和特征的散射长度 a ($a < 0$ 引力, $a > 0$ 斥力) 变化, 但随弱磁场的加强而降低, 即弱磁场可调节该相变温度. 磁场为零时, 相变温度最高, 为费米温度的 0.184 倍.

关键词: $N-E-V$ 分布, 费米气体, 热力学性质, 相变

PACS: 05.30.-d, 51.30.+I, 05.70.Fh

DOI: 10.7498/aps.64.040501

1 引言

1995年, 气态原子玻色-爱因斯坦凝聚 (BEC) 被实验证实^[1-3], 激发了人们对超冷原子的研究热情^[4-11]. 近几年, 研究热点之一是费米原子组成分子的凝聚^[12,13]和费米原子库珀对的凝聚^[14,15], 研究的重要工具是 Feshbach 共振^[12]. 磁场 Feshbach 共振的巨大威力在于通过调节磁场强度这一外部参数, 实现人为控制原子间的散射长度, 即调节原子间相互作用的强度及其性质. 运用此方法便于在实验上发现费米原子形成的分子及在多体作用下形成的费米原子配对, 进而在温度足够低的条件下探测到可能出现的费米分子的 BEC^[12,13]和费米原子形成库珀对的超流状态^[14,15] (bardeen-cooper-schrieffer, BCS) 以及二者之间的跨越^[16-18]. 在

Feshbach 共振点附近施加梯度磁场后, 可以实现分子玻色爱因斯坦凝聚体、原子库珀对凝聚体和强相互作用费米气体三种物态同时并存的理论预言^[8]. 这些方法为深入研究量子相变以及理解强关联多体量子问题开拓了新的窗口. 所以, 研究低温下磁场约束对弱相互作用费米气体热力学性质的影响显得尤为重要.

文献^[19]基于赝势法及正则分布和局域密度近似法研究了强磁场中弱相互作用费米气体的热力学性质, 分析了磁场及相互作用对系统热力学性质的影响. 文献^[20]用同样的方法研究了弱磁场中弱相互作用费米气体的热力学性质. 文献^[21, 22]将完全开放系统对应的系综 ($N-E-V$ 分布) 拓宽到了任意大小的系统. 注意到完全开放系统对应的系综是体积、能量和粒子数可变化的系统, 以及低温

* 国家自然科学基金 (批准号: 61167002) 和宁夏自然科学基金 (批准号: NZ14055) 资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: ningxiayclhl@163.com

下量子系统的相关实验也是在外场束缚下进行的(体积、能量和粒子数可变),而不是将量子粒子置于固定体积的容器中(正则系统体积不变).因而由体积、能量和粒子数可变的 N - E - V 分布研究低温条件下量子系统的热力学性质就比基于正则系统的纯赝势法更接近实际.

本文受文献[20, 22, 23]启发,基于Shannon熵的 N - E - V 分布在赝势法的基础上对弱磁场中弱相互作用费米气体在低温时的热力学性质做了进一步的研讨,结果与文献[20]中由赝势法及正则分布得到的结果进行比较,发现存在一热力学性质发生变化的温度,且其正好处于低温费米系统发生BEC, BCS相变和二者之间跨越的温度范围.

2 弱磁场中弱相互作用费米子系统的 N - E - V 分布配分函数

由文献[19]知,基于Shannon熵的 N - E - V 分布的配分函数为

$$Z(\gamma, \beta, \kappa) = \sum_i \exp(-\gamma N_i - \beta E_i - \kappa V_i), \quad (1)$$

其中, N_i , E_i , V_i 分别为第 i 个微观态或量子态的粒子数、能量和体积; $\gamma = -u/(k_B T)$, $\beta = 1/(k_B T)$, $\kappa = P/(k_B T)$, 这里, u 为化学势, k_B 为玻尔兹曼常数, T 为绝对温度, P 为压强. (1)式的求和为对所有微观态或量子态进行.

2.1 弱磁场中弱相互作用费米子气体的 N - E 分布配分函数(巨配分函数)

考虑一确定体积 V 且处于均匀磁场 $B = B_z$ 中的由 N 个具有弱相互作用、自旋为1/2的费米子所组成的系统,通过赝势法可导出该系统的能谱[24,25]

$$E = \sum_{\mathbf{p}} (n_{\mathbf{p}}^+ + n_{\mathbf{p}}^-) \frac{p^2}{2m} + \frac{\alpha}{V} (N^+ - N^-) - (N^+ - N^-) \mu B, \quad (2)$$

其中, μ 为费米子的磁矩, $\alpha = 4\pi a \hbar^2/m$ 为相互作用参量(a 为粒子间二体相互作用的s波散射波长, \hbar 为约化普朗克常数), m 为单粒子质量, $n_{\mathbf{p}}^+(n_{\mathbf{p}}^-)$ 为处于动量 \mathbf{p} 且自旋向上(向下)的量子态的粒子数, $N^+(N^-)$ 为系统自旋向上(向下)的总粒子数, N 为

系统的总粒子数. N 与 N^+ 和 N^- 的关系为

$$N = \sum_{\mathbf{p}} (n_{\mathbf{p}}^+ + n_{\mathbf{p}}^-) = N^+ + N^-. \quad (3)$$

弱磁场和弱相互作用条件分别为 $\left(\frac{\mu B}{E_{F0}}\right)^2 \ll 1$ 和 $|a|/\lambda \ll 1$. 这里 $E_{F0} = (\hbar^2/(2m)) (3\pi^2 n)^{2/3}$ 为理想费米气体的费米能, $\lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}$ 为热波长, n 为粒子数密度.

正则系综的配分函数为

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{\{n_{\mathbf{p}}^+, n_{\mathbf{p}}^-\}} \exp(-\beta E) \\ &= \sum_{N^+=0}^N \exp \left[\beta \mu B (2N^+ - N) - \frac{\alpha}{V} \beta N^+ (N - N^+) \right] \\ &\quad \times \sum_{N^+} \exp \left(-\beta \sum_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}}^+ \frac{p^2}{2m} \right) \\ &\quad \times \sum_{N^-} \exp \left(-\beta \sum_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}}^- \frac{p^2}{2m} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

式中 $\sum_{\{n_{\mathbf{p}}^+, n_{\mathbf{p}}^-\}}$ 为对所有满足总粒子数为 N 的分布 $\{n_{\mathbf{p}}^+, n_{\mathbf{p}}^-\}$ 求和, 则系统的自由能

$$\begin{aligned} F &= -\frac{1}{\beta} \ln Q \\ &= NB\mu - \frac{1}{\beta} \ln \sum_{N^+} \exp \left\{ -\beta \left[A_0(N^+) + A_0(N - N^+) + \frac{\alpha}{V} N^+ (N - N^+) - 2\mu B N^+ \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

在这里, 参考Huang和Yang[26]处理非理想玻色气体的方法, 引进了

$$A_0(\xi) = -\beta^{-1} \ln \sum_{\{\xi_{\mathbf{p}}\}} \exp \left(-\beta \sum_{\mathbf{p}} \frac{\xi_{\mathbf{p}} p^2}{2m} \right),$$

其表示限定在体积 V 中的 ξ 个无自旋、无相互作用费米子的虚构自由能. 采用大数近似方法, 将(5)式中求和项的对数用最大项的对数代替, 有

$$\begin{aligned} F &= F(N_m^+) \\ &= NB\mu - 2\mu B N_m^+ + \left[A_0(N_m^+) + A_0(N - N_m^+) + \frac{\alpha}{V} N_m^+ (N - N_m^+) \right] N_m^+ \end{aligned}$$

及

$$u_0(N_m^+) - u_0(N - N_m^+) = 2\mu B - \frac{\alpha}{V} (2N - N_m^+), \quad (6)$$

式中, u_0 表示本文所描述虚构系统的化学势, N_m^+ 可由下式决定

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial F(N^+)}{\partial N^+} \right|_{N^+=N_m^+} \\ &= -2\mu B + \left(\left. \frac{\partial A_0(N^+)}{\partial N^+} - \frac{\partial A_0(N - N^+)}{\partial N^+} \right) \right|_{N^+=N_m^+} \\ & \quad + \left. \frac{\alpha}{V} (N - 2N^+) \right|_{N^+=N_m^+} \\ &= 0. \end{aligned}$$

引入 $r = \frac{2N_m^+}{N} - 1$, 因此, $N_m^+ = \frac{1+r}{2}N$, $N - N_m^+ = \frac{1-r}{2}N$, 同时 (6) 式可写为

$$u_0\left(\frac{1+r}{2}N\right) - u_0\left(\frac{1-r}{2}N\right) = 2\mu B + \alpha nr. \quad (7)$$

将 (7) 式等号左端进行泰勒级数展开, 并保留至一阶项, 可得

$$r = \frac{2\mu B}{\left. \frac{\partial(xN)}{\partial x} \right|_{x=\frac{1}{2}} - \alpha n}. \quad (8)$$

由此, 系统的自由能表示成参数 r 的形式:

$$F = -N\mu Br + A_0\left(\frac{1+r}{2}N\right) + A_0\left(\frac{1-r}{2}N\right) + \frac{\alpha n N}{4}. \quad (9)$$

将 (9) 式中的 A_0 在 $N/2$ 附近进行泰勒级数展开并忽略 r^2 及高阶项, 可得

$$F = -N\mu Br + 2A_0(N/2) + \frac{\alpha n N}{4}. \quad (10)$$

对于由 $N/2$ 个“无自旋”、无相互作用的费米子组成的“虚构系统”, 其自由能 [26]

$$A_0\left(\frac{N}{2}\right) = \frac{N}{2} k_B T \left(\ln z_0 - \frac{f_{5/2}(z_0)}{f_{3/2}(z_0)} \right), \quad (11)$$

式中 $f_l(x)$ 为费米积分, 其定义和递推关系为

$$\begin{aligned} f_l(x) &= \frac{1}{\Gamma(l)} \int_0^\infty \frac{t^{l-1} dt}{x^{-1} e^t + 1}, \\ x \frac{df_l(x)}{dx} &= f_{l-1}(x). \end{aligned} \quad (12)$$

(11) 式中的 z_0 既可表示 N 个无外势、无相互作用自旋为 $1/2$ 的粒子的逸度, 也可表示 $N/2$ 个无自旋、无外势、无相互作用粒子的逸度, 满足以下关系: [25]

$$n = N/V = 2\lambda^{-3} f_{3/2}(z_0). \quad (13)$$

由公式 $P = -[\partial F/\partial V]_{N,T}$ 得系统的压强

$$P = \frac{nr^2}{2\beta} \left(\frac{2f_{3/2}(z_0)}{f_{1/2}(z_0)} - \frac{2f_{3/2}^2(z_0)f_{-1/2}(z_0)}{f_{1/2}^3(z_0)} - \alpha\beta n \right) + nk_B T \frac{f_{5/2}(z_0)}{f_{3/2}(z_0)} + \frac{\alpha n^2}{4}. \quad (14)$$

由巨热力势与巨配分函数的关系 $\Phi = -PV = -k_B T \ln Z(\gamma, \beta, V)$ 得

$$\begin{aligned} \ln Z(\gamma, \beta, V) &= \beta PV \\ &= \left[\frac{nr^2}{2} \left(\frac{2f_{3/2}(z_0)}{f_{1/2}(z_0)} - \frac{2f_{3/2}^2(z_0)f_{-1/2}(z_0)}{f_{1/2}^3(z_0)} - \beta n \alpha \right) + n \frac{f_{5/2}(z_0)}{f_{3/2}(z_0)} + \frac{\alpha n^2 \beta}{4} \right] V. \end{aligned}$$

令

$$b = \frac{nr^2}{2} \left(\frac{2f_{3/2}(z_0)}{f_{1/2}(z_0)} - \frac{2f_{3/2}^2(z_0)f_{-1/2}(z_0)}{f_{1/2}^3(z_0)} - \alpha\beta n \right) + n \frac{f_{5/2}(z_0)}{f_{3/2}(z_0)} + \frac{\alpha\beta n^2}{4}, \quad (15)$$

则巨配分函数 $Z(\gamma, \beta, V) = e^{bV}$.

2.2 弱磁场中弱相互作用费米子气体 N - E - V 分布配分函数

在体积连续变化时, 由 (1) 式可得 N - E - V 分布描述的完全开放系统的配分函数与巨配分函数间的关系为

$$Z(\gamma, \beta, \kappa) = \int_0^\infty e^{-\kappa V} \frac{\partial Z(\gamma, \beta, V)}{\partial V} dV,$$

由此可得完全开放系统的配分函数

$$Z(\gamma, \beta, \kappa) = b/(\kappa - b). \quad (16)$$

3 由 N - E - V 分布计算弱磁场中弱相互作用费米子气体的内能和热容

粒子数

$$N = -\frac{\partial}{\partial \gamma} \ln Z(\gamma, \beta, \kappa) = -\frac{\kappa}{b(\kappa - b)} \frac{\partial b}{\partial \gamma}, \quad (17)$$

内能

$$\begin{aligned} U &= \frac{-\partial}{\partial \beta} \ln Z(\gamma, \beta, \kappa) = \frac{-\kappa}{b(\kappa - b)} \frac{\partial b}{\partial \beta} \\ &= N \frac{\partial b}{\partial \beta} / \frac{\partial b}{\partial \gamma}, \end{aligned} \quad (18)$$

其中,

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial \beta} = \left(\frac{\partial b}{\partial \beta} \right)_{\gamma, \kappa} &= \frac{nr^2}{4\beta} \left(\frac{2f_{3/2}(z_0)f_{1/2}^2(z_0) - 2f_{3/2}^2(z_0)f_{-1/2}(z_0) - \alpha\beta n f_{1/2}^3(z_0)}{f_{1/2}^3(z_0)} \right) \\ &+ \frac{n^2\alpha r^2}{4} \left(\frac{4f_{3/2}^2(z_0)f_{-1/2}(z_0) - 2f_{3/2}(z_0)f_{1/2}^2(z_0) + \alpha\beta n f_{1/2}^3(z_0)}{2f_{3/2}(z_0)f_{1/2}^2(z_0) - \alpha\beta n f_{1/2}^3(z_0)} \right) \\ &- \frac{1}{4\beta f_{3/2}(z_0)} (6nf_{5/2}(z_0) + 2n^2\alpha\beta f_{3/2}(z_0)), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial \gamma} = \left(\frac{\partial b}{\partial \gamma} \right)_{\beta, \kappa} &= \left\{ \left(-\frac{r^2 n}{2} \right) \left[4f_{3/2}^5(z_0)f_{-1/2}^2(z_0) - 4f_{3/2}^5(z_0)f_{-3/2}(z_0)f_{1/2}(z_0) \right. \right. \\ &+ \alpha\beta n \left(2f_{1/2}^5(z_0)f_{3/2}^2(z_0) - 2f_{1/2}^5(z_0)f_{3/2}(z_0) + 2f_{3/2}^4(z_0)f_{1/2}^2(z_0)f_{-3/2}(z_0) \right. \\ &- \left. \left. 6f_{3/2}^4(z_0)f_{-1/2}^2(z_0)f_{1/2}(z_0) \right) \right] - nf_{1/2}^4(z_0)f_{3/2}(z_0) \left(2f_{3/2}^2(z_0) - \alpha\beta n f_{1/2}(z_0)f_{3/2}(z_0) \right) \\ &- \left. \frac{\alpha\beta n^2}{2} f_{1/2}^5(z_0) \left(2f_{3/2}^2(z_0) - \alpha\beta n f_{1/2}(z_0)f_{3/2}(z_0) \right) \right\} \\ &\times \left[f_{1/2}^4(z_0)f_{3/2}(z_0) \left(2f_{3/2}^2(z_0) - \alpha\beta n f_{1/2}(z_0)f_{3/2}(z_0) \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (20)$$

在弱磁场 $\left(\left(\frac{\mu B}{E_{F0}} \right)^2 \ll 1 \right)$ 和弱相互作用 $\left(\frac{|a|}{\lambda} \ll 1 \right)$ 条件下, 可得内能和热容分别为

$$\begin{aligned} U = -N \frac{r^2}{2\beta} &\left(\frac{f_{3/2}(z_0)}{f_{1/2}(z_0)} - \frac{f_{3/2}^2(z_0)f_{-1/2}(z_0)}{f_{1/2}^3(z_0)} + \frac{3f_{5/2}(z_0)f_{3/2}(z_0)f_{-1/2}^2(z_0)}{f_{1/2}^4(z_0)} \right. \\ &\left. - \frac{3f_{5/2}(z_0)f_{3/2}(z_0)f_{-3/2}(z_0)}{f_{1/2}^3(z_0)} \right) + \frac{3Nf_{5/2}(z_0)}{2\beta f_{3/2}(z_0)} + \frac{Nn\alpha}{2} - \frac{3n\alpha N f_{1/2}(z_0)f_{5/2}(z_0)}{4f_{3/2}^2(z_0)}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} C_V = \frac{Nr^2 k_B}{2\beta} &\left(\frac{5f_{3/2}}{2f_{1/2}} - \frac{13f_{3/2}^2 f_{-1/2}}{4f_{1/2}^3} - \frac{15f_{5/2} f_{3/2} f_{-1/2}^2}{2f_{1/2}^4} - \frac{15f_{5/2} f_{3/2} f_{-3/2}}{2f_{1/2}^3} - \frac{6f_{3/2}^3 f_{-3/2}}{f_{1/2}^4} - \frac{9f_{3/2}^3 f_{-1/2}^2}{2f_{1/2}^5} \right. \\ &- \frac{9f_{5/2} f_{3/2}^2 f_{-3/2} f_{-1/2}}{2f_{1/2}^5} - \frac{18f_{5/2} f_{3/2}^2 f_{-1/2}^3}{f_{1/2}^6} - \frac{9f_{5/2} f_{3/2}^2 f_{-5/2}}{2f_{1/2}^4} \left. \right) - \frac{Nk_B}{4} \left(\frac{9f_{3/2}}{f_{1/2}} - \frac{11f_{5/2}}{f_{3/2}} \right) \\ &- \frac{Nn\alpha r^3}{4\mu B} \left(\frac{f_{3/2}}{f_{1/2}} - \frac{f_{3/2}^2 f_{-1/2}}{f_{1/2}^3} + \frac{3f_{5/2} f_{3/2} f_{-1/2}^2}{f_{1/2}^4} - \frac{3f_{5/2} f_{3/2} f_{-3/2}}{f_{1/2}^3} \right) \\ &+ \frac{9N\alpha n}{8T} \left(1 + \frac{f_{-1/2} f_{5/2}}{f_{3/2} f_{1/2}} - \frac{2f_{5/2} f_{1/2}}{f_{3/2}^2} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

(22) 式中所有 f_l 都是 z_0 的函数. 当温度很低时, z_0 可能很大, 这时可应用 Sommerfeld 引理将费米积分对大宗量 $\ln z_0$ 展开并保留至 $(T/T_{F0})^2$ 项^[24,25], 即

$$f_l(z_0) = \frac{(\ln z_0)^l}{\Gamma(l+1)} \left[1 + \frac{\pi^2 l(l-1)}{6(\ln z_0)^2} + \frac{7\pi^2 l(l-1)(l-2)(l-3)}{360(\ln z_0)^4} + \dots \right].$$

当温度 $T < T_{F0}$ 时 (这里 $T_{F0} = E_{F0}/k_B$, 为费米温度), 有

$$\begin{aligned} U = \frac{3}{5} N E_{F0} &\left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_{F0}} \right)^2 \right] - \frac{11N E_{F0} \mu^2 B^2}{20 E_{F0}^2} \left[1 + \frac{37\pi^2}{66} \left(\frac{T}{T_{F0}} \right)^2 \right] \\ &+ \frac{1}{20} N \alpha n \left\{ \left[1 - 3\pi^2 \left(\frac{T}{T_{F0}} \right)^2 \right] - \frac{33 \mu^2 B^2}{2 E_{F0}^2} \left[1 + \frac{63\pi^2}{122} \left(\frac{T}{T_{F0}} \right)^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} C_V = N \frac{3\pi^2 k_B}{6} &\left(\frac{T}{T_{F0}} \right) - \frac{11Nk_B \mu^2 B^2}{20 E_{F0}^2} \left\{ \frac{37\pi^2}{33} \left(\frac{T}{T_{F0}} \right) + \frac{3}{2} \frac{\alpha n}{E_{F0}} \left[\frac{63\pi^2}{61} \left(\frac{T}{T_{F0}} \right) \right] \right\} \\ &- \frac{3\pi^2 Nk_B \alpha n}{10 E_{F0}} \left(\frac{T}{T_{F0}} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

由(23)式可得系统的基态能

$$U_0 = \frac{3}{5}NE_{F0} + \frac{1}{20}N\alpha n - \frac{11N}{20} \frac{\mu^2 B^2}{E_{F0}} - \frac{33N\alpha n}{40} \frac{\mu^2 B^2}{E_{F0}^2}. \quad (25)$$

为便于下文比较,这里列出了在 $T < T_{F0}$ 时由基于正则系综的赝势法计算的内能、热容和基态能^[20]:

$$U^{\text{pseud}} = \frac{3}{5}NE_{F0} \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_{F0}} \right)^2 - \frac{3N}{2} \frac{\mu^2 B^2}{E_{F0}} \left[1 + \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_{F0}} \right)^2 \right] + \frac{\alpha}{4} n N \left\{ 1 - \frac{9}{2} \left(\frac{\mu B}{E_{F0}} \right)^2 \times \left[1 + \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{T}{T_{F0}} \right)^2 \right] \right\}, \quad (26)$$

$$C_V^{\text{pseud}} = \frac{\pi^2}{2} \frac{Nk_B T}{T_{F0}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu B}{E_{F0}} \right)^2 \times \left[1 + \frac{3}{2} \frac{\alpha n}{E_{F0}} \right] \right\}, \quad (27)$$

$$U_0^{\text{pseud}} = \frac{3}{5}NE_{F0} + \frac{1}{4}N\alpha n - \frac{3N}{2} \frac{\mu^2 B^2}{E_{F0}} - \frac{9\alpha n N}{8} \left(\frac{\mu B}{E_{F0}} \right)^2. \quad (28)$$

4 结果与讨论

4.1 $N-E-V$ 分布与纯赝势法计算的零点能的比较

对比用 $N-E-V$ 分布计算得到的弱磁场中弱相互作用费米系统的基态能(25)式和用赝势法计算的基态能(28)式,可以得到如下结果.

1) 两式的第一项相同,都是理想费米气体的基态能.

2) 第二项是弱相互作用对系统基态能的贡献.用 $N-E-V$ 分布计算的结果较用赝势法计算的值偏大(散射长度 $a < 0$ 时)或偏小($a > 0$ 时),这是因为赝势法使用的是粒子数 N 和体积 V 确定不变的正则配分函数,没有粒子数密度变化的影响;而且在求正则配分函数时,本应在粒子数 N 一定时对各种可能的自旋态求和,但只是取最大($a > 0$ 时)或最小($a < 0$ 时)值代替了求和,即取最大值(或最小值)代替了平均值.本文在求 $N-E-V$ 分布配分函数时,考虑了体积的变化,虽然是在赝势法计算结果

的基础上算出的,但以对体积积分的形式部分补充了应有的求和或平均.因而由 $N-E-V$ 分布计算的结果比由赝势法计算的结果在 $a > 0$ ($a < 0$) 时要小(大).

由以上分析可知, $N-E-V$ 分布方法的计算结果总是补偿赝势法计算结果的过度偏差,这也是如下其他差异的原因.

3) 第三项是外部弱磁场对基态能的贡献.由于赝势法是用最值代替了平均值,并且磁矩与磁场的相互作用能为 μB 的负值,故 $N-E-V$ 分布计算的外部弱磁场对基态能的贡献比由赝势法计算的值要大.

4) 第四项是弱相互作用与弱磁场相互耦合对系统基态能的影响.此项有“负号”,故当 $a > 0$ ($a < 0$) 时由 $N-E-V$ 分布计算的结果比由赝势法计算的结果大(小).

由以上讨论可知, $a < 0$ (引力)时,用 $N-E-V$ 分布计算弱磁场中弱相互作用费米系统的基态能比用赝势法计算的基态能大; $a > 0$ (斥力)时,用 $N-E-V$ 分布计算弱磁场中弱相互作用费米系统的基态能与用赝势法计算的基态能相比,其大小与 a 和 $(\mu B/E_{F0})^2$ 的相对大小有关,可大也可能小.

4.2 用 $N-E-V$ 分布与纯赝势法计算的低温段热力学函数的比较

弱磁场中用 $N-E-V$ 分布计算的内能和用赝势法计算的内能随温度的变化如图1—图3所示.图中 $f = \frac{m}{4\pi\hbar^2} \frac{\alpha}{\lambda_{F0}} = \frac{a}{\lambda_{F0}}$, $H = \left(\frac{\mu B}{E_{F0}} \right)^2$, 图1和图3中 $a > 0$, 图2中 $a < 0$.

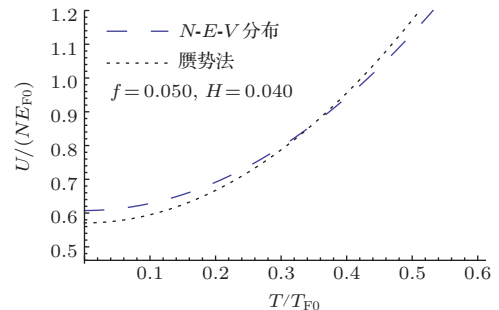


图1 弱磁场中 $N-E-V$ 分布和赝势法所计算的内能与温度之间的关系 ($f = 0.050$, $H = 0.040$, $N-E-V$ 分布的基态能大于赝势法的基态能)

图4是用 $N-E-V$ 分布计算的热容和用赝势法计算的热容随温度变化的比较.由图4可知:当弱

磁场强度一定, 弱相互作用为排斥 ($f > 0$) 时, 由 N - E - V 分布计算的热容比由赝势法计算的热容小; 而弱相互作用为吸引 ($f < 0$) 时, 由 N - E - V 分布计算的热容比由赝势法计算的热容大, 且差值随温度的增加而增大。

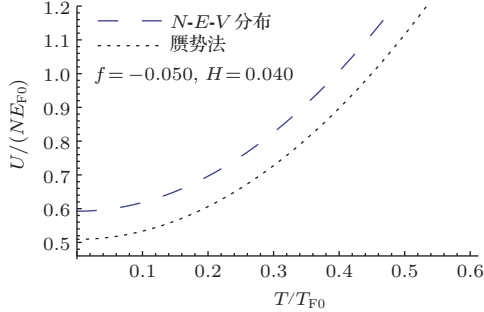


图2 弱磁场中 N - E - V 分布和赝势法所计算的内能与温度之间的关系 ($f = -0.050$, $H = 0.040$, N - E - V 分布的基态能大于赝势法的基态能)

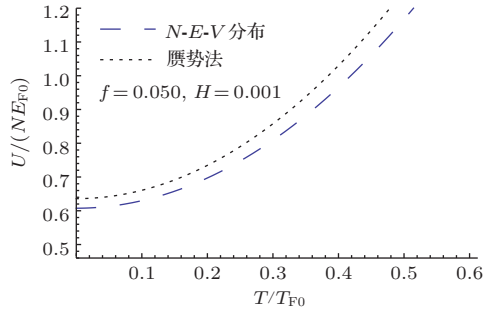


图3 弱磁场中 N - E - V 分布和赝势法所计算的内能与温度之间的关系 ($f = 0.050$, $H = 0.001$, N - E - V 分布的基态能小于赝势法的基态能)

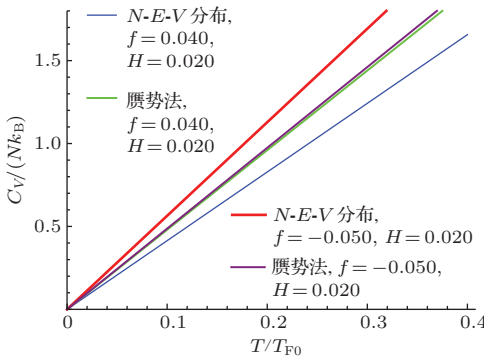


图4 (网刊彩色) 弱磁场中 N - E - V 分布和赝势法所计算的热容与温度之间的关系

4.3 N - E - V 分布对低温弱磁场及弱相互作用系统内能的影响

4.3.1 N - E - V 分布和赝势法所计算的内能偏差的数值分析

N - E - V 分布计算的内能与赝势法结果的相对

偏差为

$$\begin{aligned} \delta U &= \frac{U - U^{\text{pseud}}}{U^{\text{pseud}}} \\ &= \left\{ \frac{\mu^2 B^2}{E_{F0}^2} \left[\frac{19}{20} - \frac{11\pi^2}{60} \left(\frac{T}{T_{F0}} \right)^2 \right] \right. \\ &\quad - \frac{\alpha n}{E_{F0}} \left[\frac{1}{5} + \frac{3\pi^2}{20} \left(\frac{T}{T_{F0}} \right)^2 \right] \\ &\quad + \frac{n\alpha}{E_{F0}} \frac{\mu^2 B^2}{E_{F0}^2} \left[\frac{3}{10} - \frac{291\pi^2}{1220} \left(\frac{T}{T_{F0}} \right)^2 \right] \left. \right\} \\ &\quad \times \left(\left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_{F0}} \right)^2 \right] \right. \\ &\quad - \frac{3\mu^2 B^2}{2E_{F0}^2} \left[1 + \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_{F0}} \right)^2 \right] \\ &\quad + \frac{1}{4} \frac{\alpha n}{E_{F0}} \left\{ 1 - \frac{9}{2} \left(\frac{\mu B}{E_{F0}} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left[1 + \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{T}{T_{F0}} \right)^2 \right] \right\} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (29)$$

当 $f = 0.050$, $H = 0.040$, $0 \leq T/T_{F0} \leq 0.6$ 时, $-0.0708 \leq \delta U \leq 0.0170$; 当 $f = 0.030$, $H = 0.007$, $0 \leq T/T_{F0} \leq 0.6$ 时, $0.0432 \leq \delta U \leq 0.0472$. 上述结果表明, 由 N - E - V 分布计算的内能相对于赝势法计算的结果偏差很小。

4.3.2 N - E - V 分布计算的低温条件下弱磁场、弱相互作用费米气体内能与相同弱磁场条件下理想费米气体内能偏差的数值分析

用 ΔU 表示由 N - E - V 分布计算的低温条件下弱磁场、弱相互作用的费米气体内能与在相同外磁场情况下理想费米气体内能之间的差值, 可由 (23) 式和理想气体内能得

$$\begin{aligned} \Delta U &= U - U^{\text{idea}} \\ &= -\frac{11NE_{F0}}{20} \frac{\mu^2 B^2}{E_{F0}^2} \left\{ \frac{8}{\sqrt{\pi}} \frac{a}{\lambda_{F0}} \right. \\ &\quad \left. \times \left[1 + \frac{63\pi^2}{122} \left(\frac{T}{T_{F0}} \right)^2 \right] \right\} \\ &\quad + \frac{4NE_{F0}}{15\sqrt{\pi}} \frac{a}{\lambda_{F0}} \left[1 - 3\pi^2 \left(\frac{T}{T_{F0}} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

ΔU 随温度的变化如图5所示。

由图5可知, 在弱相互作用范畴内, 无论散射波长 $a > 0$ ($f > 0$, 相互作用为斥力) 还是 $a < 0$ ($f < 0$, 相互作用为引力), 费米气体的内能曲线都会与 $a = 0$ ($f = 0$, 没有相互作用) 时理想费米气体

的内能曲线相交于同一点(用赝势法计算的结果无类似交点, 见图6). 若记约化温度 T/T_{F0} 为 t , 交点处约化温度为 t_c , 由图5知 t_c 随外磁场的增强而减小, 当外磁场为零时 $t_c = 0.184$.

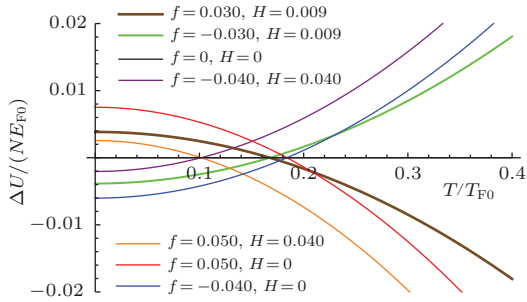


图5 (网刊彩色) 弱磁场中弱相互作用费米气体 $N-E-V$ 分布计算的内能与理想费米气体内能之差随温度的变化 ($H = 0$ 时, $t_c = 0.184$; $H = 0.009$ 时, $t_c = 0.171$; $H = 0.040$ 时, $t_c = 0.102$)

注意到外磁场是匀强的以及理想气体是无相互作用的, 有弱相互作用的系统的内能与理想系统的内能随温度变化的曲线相交, 意味着相互作用的特征——“引力”或“斥力”发生了转换, 即在弱相互作用范畴内、在均匀弱外磁场(也可以没有外磁场, $H=0$)中的费米系统, 当散射长度 $a(f)$ 一定时, 多粒子费米系统总能量特征仅随温度发生“斥力”与“引力”的互换, 这意味着发生了“相变”. 此相变温度(交点温度) t_c 不随散射长度 $a(f)$ 变化, 但随均匀弱外磁场的加强而降低. 当外磁场 $H=0$ 时, 最高温度 $t_c = 0.184$. 因而均匀弱外磁场可调节此相变温度 t_c . 此外, t_c 的数值处在被实验证实的费米系统发生 BEC 和 BCS 相变的温度范围之内, 故 t_c 具有 BEC, BCS 相变和二者之间跨越温度的特征.

为了进一步说明出现“相变”点 t_c 为 $N-E-V$ 分布方法所特有, 下面分析基于正则分布的赝势法结果. 记 ΔU^{pseud} 为由赝势法计算的低温条件下弱磁场、弱相互作用费米气体的内能与受同样外磁场作用时理想费米气体的内能之差, 可由(26)式和理想气体内能得

$$\begin{aligned} \Delta U^{\text{pseud}} &= U^{\text{pseud}} - U^{\text{idea}} \\ &= \frac{\alpha}{4} nN \left\{ 1 - \frac{9}{2} \left(\frac{\mu B}{E_{F0}} \right)^2 \left[1 + \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{T}{T_{F0}} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

图6显示了这一差值随温度的变化. t 在 0—1 之间, 图6中无交点, 即不会发生“引力”与“斥力”的相互转换.

$N-E-V$ 分布描述的情形比正则分布(E 分布)和巨正则分布($N-E$ 分布)更接近量子系统的实验环境, 由其计算的热力学性质更接近于实验结果; 但在其预示的相变点附近, 能量等物理量连续过渡, 并没发生跳跃或出现尖峰, 这不同于熟知的相变特征. 此现象是多种混合态共存^[8]的结果, 还是费米系统的 BEC 和 BCS 相变本身就是多粒子系统的统计关联或熵力^[27]的结果? 正像引力可由统计热力学来解释^[28]一样, 尚有待于进一步探讨.

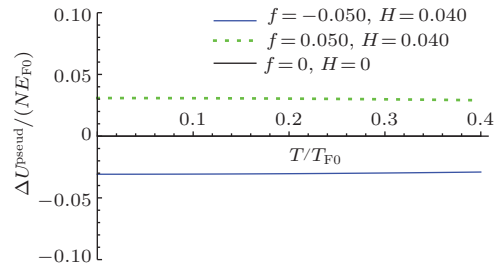


图6 (网刊彩色) 赝势法计算的弱磁场中弱相互作用费米气体内能与理想费米气体内能之差随温度的变化

5 结 论

本文基于量子系统的低温实验是在体积、能量和粒子数都可变的外场束缚下进行的事实, 由统计力学的方法, 使用比其他常用分布更贴近实验条件的完全开放系统的统计分布研究了弱磁场中具有弱相互作用费米系统的热力学性质. 数值计算结果显示: 在弱磁场中具有弱相互作用的费米气体, 在低温时会发生 BEC, BCS 相变和二者之间跨越的相变; 理论预示的相变温度范围与实验结果相符; 外磁场具有调节相变温度的作用, 弱外磁场增强, 相变温度降低. 由于统计力学中惯常使用的正则分布、巨正则分布要求体积不变, 这与实验事实有偏离, 故使用这两种分布得不出本文上述结果. 完全开放系统的统计分布在此不仅显示出特有的实用价值, 同时也由此具体实例证明: 不取热力学极限也能研究相变.

参考文献

- [1] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R, Wieman C E, Cornell E A 1995 *Science* **269** 198
- [2] Davis K B, Mewes M -O, Andrews M R, van Druten N J, Durfee D S, Kurn D M, Ketterle W 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3969
- [3] Bradley C C, Sackett C A, Tollett J J, Hulet R G 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 1687

- [4] Semczuk M, Gunton W, Bowden W, Madison K W 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 055302
- [5] Palestini F, Strinati G C 2014 *Phys. Rev. B* **89** 224508
- [6] Dong H, Ma Y L 2009 *Chin. Phys. B* **18** 0715
- [7] Su G Z, Chen L X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 984 (in Chinese) [苏国珍, 陈丽璇 2004 物理学报 **53** 984]
- [8] Xiong H W, Liu S J, Zhang W P, Zhan M S 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 120401
- [9] Wu F, Zhang R, Deng T S, Zhang W, Yi W, Guo G C 2014 *Phys. Rev. A* **89** 063610
- [10] Gou X Q, Meng H J, Wang W Y, Duan W S 2013 *Chin. Phys. B* **22** 080307
- [11] Men F D, Fan Z L 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030502
- [12] Jochim S, Bartenstein M, Altmeyer A, Hendl G, Riedl S, Chin C, Hecker Denschlag J, Grimm R 2003 *Science* **302** 2101
- [13] Greiner M, Regal C A, Jin D S 2003 *Nature* **426** 537
- [14] Bartenstein M, Altmeyer A, Riedl S, Jochim S, Chin C, Hecker Denschlag J, Grimm R 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 120401
- [15] Regal C A, Greiner M, Jin D S 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 040403
- [16] Ejima S, Kaneko T, Ohta Y, Fehske H 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 026401
- [17] Yamaguchi M, Kamide K, Nii R, Ogawa T, Yamamoto Y 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 026404
- [18] Shen Z C, Radzihovsky L, Gurarie V 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 245302
- [19] Men F D, Wang B F, He X G, Wei Q M 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 080501 (in Chinese) [门福殿, 王炳福, 何晓刚, 魏群梅 2011 物理学报 **60** 080501]
- [20] Men F D 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1622 (in Chinese) [门福殿 2006 物理学报 **55** 1622]
- [21] Li H L, Xiong Y, Li Y Y 2011 *Physica A* **390** 2769
- [22] Li H L 2008 *J. Wuhan Univ. (Nat. Sci.)* **54** 37 (in Chinese) [李鹤龄 2008 武汉大学学报 **54** 37]
- [23] Li H L, Ma Y, Yang B, Yang T, Xiong Y 2013 *J. Southwest Normal Univ. (Nat. Sci.)* **38** 33 (in Chinese) [李鹤龄, 马燕, 杨斌, 杨涛, 熊英 2013 西南师范大学学报(自然科学版) **38** 33]
- [24] Huang K 1987 *Statistical Mechanics* (New York: Wiley) pp272–276
- [25] Pathria R K 1977 *Statistical Mechanics* (London: Pergamon Press)
- [26] Huang K, Yang C N 1956 *Phys. Rev.* **105** 767
- [27] Padmanabhan T 2010 *Rep. Prog. Phys.* **73** 046901
- [28] Jacobson T 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 1260

Investigation of thermodynamic properties of weakly interacting Fermi gas in weakly magnetic field by using the N - E - V distribution and pseudopotential method*

Li He-Ling Wang Juan-Juan Yang Bin[†] Shen Hong-Jun

(School of Physics and Electrical Information Science, Ningxia University, Yinchuan 750021, China)

(Received 11 August 2014; revised manuscript received 23 September 2014)

Abstract

Based on the fact that most of low temperature experiments of quantum systems are explored in an external field on condition that the particle numbers, volumes and energies of systems may be changed, the thermodynamic properties of weakly interacting Fermi systems in weak magnetic field are studied by using the statistical distribution of the completely open system with variable particle number, volume, and energy (N - E - V distribution). Firstly, the analytical expressions of internal energy and heat capacity, which are in the Fermi integral form, are obtained in the general case, and the analytical expressions and numerical results of energy and heat capacity are given under the extreme condition of super-low temperature. The calculation results by the N - E - V distribution (with particle number density being variable) are compared with those by a pseudopotential method (with particle number density being unchanged). It can be found that the deviations of the internal energy and heat capacity calculated by the two different methods are very small, and the N - E - V distribution method can partially compensate for the error caused by the pseudo potential method. The most interesting point of the results obtained by the N - E - V distribution method is that there is a phase transition temperature in the weakly interacting Fermi system in weak magnetic field under the low temperature condition. The phase transition temperature is just in the range where occur the Fermi systems, Bose-Einstein condensation (BEC), Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) phase transition, and BEC-BCS crossover, and does not vary with strength nor characteristic (attraction or repulsion) of the weak interaction, but it decreases with the strengthening of the external magnetic. When there is no external magnetic, the phase transition temperature is highest (more than 0.184 times Fermi temperature).

Keywords: the N - E - V distribution, Fermi gas, thermodynamic property, phase transition

PACS: 05.30.-d, 51.30.+I, 05.70.Fh

DOI: 10.7498/aps.64.040501

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61167002) and the Natural Science Foundation of Ningxia, China (Grant No. NZ14055).

[†] Corresponding author. E-mail: ningxiayclhl@163.com