物理学报 Acta Physica Sinica

Chinese Physical Society

Institute of Physics, CAS

相空间中对应量子力学基本对易关系的积分变换及求Wigner函数的新途径

范洪义 梁祖峰

An integral-transformation corresponding to quantum mechanical fundamental commutative relation and its application in deriving Wigner function

Fan Hong-Yi Liang Zu-Feng

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 64, 050301 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.050301

在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.050301

当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I5

相空间中对应量子力学基本对易关系的积分变换及求Wigner函数的新途径*

范洪义 1)† 梁祖峰 2)

1) (宁波大学, 物理系, 宁波 315211)

2) (杭州师范大学, 理学院, 杭州 310036)

(2014 年 7 月 11 日收到; 2014 年 10 月 8 日收到修改稿)

本文指出相空间中存在有对应量子力学基本对易关系积分变换, 其积分核是 $\frac{1}{\pi}\vdots\exp[\pm 2\mathrm{i}(q-Q)\times(p-P)]\vdots$, 其中 $\vdots\ \vdots$ 表示Weyl 排序, Q, P 是坐标算符和动量算符, 其功能是负责算符的三种常用排序 ($P-Q$ 排序、$Q-P$ 排序和 Weyl 排序) 规则之间的相互转化. 此外, 还导出了此积分核与 Wigner 算符之间的关系, 以及 Wigner 函数在这类积分变换下的性质及用途.

关键词: 对易关系, 积分变换, Weyl编序, Wigner 函数

PACS: 03.65.–w, 42.50.–p **DOI:** 10.7498/aps.64.050301

1 引 言

自从普朗克于1900年发现能量子之后, 直到1926年Heisenberg-Born基本对易关系 $[Q,P]=\mathrm{i}\hbar$ 的发现和Schrödinger波动方程的建立, 才标志了量子力学的诞生, 其中 Q, P 是量子力学坐标算符和动量算符. 所以 $[Q,P]=\mathrm{i}\hbar$ 是量子力学理论的核心. 100多年来量子与经典的对应一直是物理学家讨论的话题, 在以往的研究中, 人们已经发现两个领域之间存在着诸多相似关系, 并且这种种相似关系的发现有助于推进两个领域中研究工作的发展 [1]. 例如, 最典型的一个关系莫过于量子力学中的含时薛定谔方程和经典光学中不含时的霍姆赫兹方程之间存在的数学形式上的相似性. 针对这一特性, Dragonman [2] 设计了多层光学结构, 它的传输特性和它的零维、一维或二维的量子对应相同. 与此类似地, Crasser-Mack-Schleich [3] 等人发现量子光学的相空间描述, 即它的Wigner 函数形式同衍射理论中的菲涅耳积分在数学形式上类似. 另外, 量子光学的算符和态矢与经典光学的对应关系也曾被人注意到. Nienhuis 和 Allen [4] 注意到激光光束的高斯-厄米模以及拉盖尔-厄米模可以用量子力学谐振子的算符代数来描述; Wolf 和 Kurmyshev [5] 发现量子光学压缩态的波函数也可以是经典光学旁轴近似霍姆赫兹方程的一个特殊解. 此外, 研究还发现, 经典Fourier 积分变换核对应于量子力学坐标-动量表象变换 [6,7] $\langle q|\, p\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}pq/\hbar}$, $Q\,|q\rangle=q\,|q\rangle$, $P\,|p\rangle=p\,|p\rangle$. 经典Hankel积分变换核 (Bessel 函数) 对应于量子力学新引入的两个互为共轭的双模纠缠态表象 [8,9]. 本文要探讨的问题是: 是否存在对应量子力学基本对易关系的积分变换? 这样的积分变换是什么样的? 在做了肯定的答复之后, 我们引入以积分核为 $\frac{1}{\pi}\vdots\exp[\pm 2\mathrm{i}\,(q-Q)\,(p-P)]\vdots$ 的积分变换, 发现其功能是负责算符的三种常用排序 ($P-Q$ 排序、$Q-P$ 排序和 Weyl 排序) 规则之间的相互转化. 我们还导出了此积分核与 Wigner 算符之间的关系, 以及这类积分变换对于分析 Wigner 函数的用途.

* 国家自然科学基金 (批准号: 11175113, 11275123) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: fanhongyi@nbu.edu.cn; fhym@ustc.edu.cn

 http://wulixb.iphy.ac.cn

2 对应量子力学基本对易关系的积分变换

量子力学基本对易关系明显地反映在Baker-Hausdorff公式上, 观察 $\mathrm{e}^{\lambda Q+\sigma P}$ 的分解为$P-Q$排序的公式(以下我们令$\hbar=1$)

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\lambda Q+\sigma P} &= \mathrm{e}^{\sigma P}\,\mathrm{e}^{\lambda Q}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}[\lambda Q,\sigma P]}\\ &= \mathrm{e}^{\sigma P}\,\mathrm{e}^{\lambda Q}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{i}\lambda\sigma}. \end{aligned}\tag{1}$$

我们发现存在对于 $\mathrm{e}^{\lambda q+\sigma p}$ 的积分变换

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\lambda q+\sigma p} &\to \frac{1}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q'\,\mathrm{d}p'\,\mathrm{e}^{\lambda q'+\sigma p'}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(p-p')(q-q')}\\ &= \mathrm{e}^{\lambda q+\sigma p+\mathrm{i}\lambda\sigma/2},\end{aligned}\tag{2}$$

积分核是 $\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(p-p')(q-q')}$. 另一方面, 观察 $\mathrm{e}^{\lambda Q+\sigma P}$ 的分解为$Q-P$排序的公式

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\lambda Q+\sigma P} &= \mathrm{e}^{\lambda Q}\,\mathrm{e}^{\sigma P}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[\lambda Q,\sigma P]}\\ &= \mathrm{e}^{\lambda Q}\,\mathrm{e}^{\sigma P}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}\lambda\sigma},\end{aligned}\tag{3}$$

我们发现存在另一种积分变换

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\lambda q+\sigma p} &\to \frac{1}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q'\,\mathrm{d}p'\,\mathrm{e}^{\lambda q'+\sigma p'}\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(p-p')(q-q')}\\ &= \mathrm{e}^{\lambda q+\sigma p-\mathrm{i}\lambda\sigma/2},\end{aligned}\tag{4}$$

积分核是 $\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(p-p')(q-q')}$. (4)式可以看做是(2)式的逆变换. 经典函数 $\mathrm{e}^{\lambda q+\sigma p}$ 的的三种常用的量子对应(Weyl 排序, $P-Q$排序和$Q-P$排序)分别是

$$\mathrm{e}^{\lambda Q+\sigma P},\ \mathrm{e}^{\sigma P}\,\mathrm{e}^{\lambda Q},\ \mathrm{e}^{\lambda Q}\,\mathrm{e}^{\sigma P}.$$

把 $\mathrm{e}^{\lambda q+\sigma p}$ 直接量子化为 $\mathrm{e}^{\lambda Q+\sigma P}$ 的方案称为Weyl-Wigner量子化[10−12], $\mathrm{e}^{\lambda Q+\sigma P}$ 是Weyl排序好了的算符,

$$\mathrm{e}^{\lambda Q+\sigma P} = \vdots\,\mathrm{e}^{\lambda Q+\sigma P}\,\vdots,\tag{5}$$

其中 $\vdots\ \vdots$ 表示Weyl排序[13], 所以(1)—(4)式就启发我们确实存在有对应量子力学基本对易关系的积分变换. 据此我们可以定义如下一类积分变换:

$$\begin{aligned}G(p,q) \equiv& \frac{1}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q'\,\mathrm{d}p' h(p',q')\\ &\times \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(p-p')(q-q')},\end{aligned}\tag{6}$$

(它不同于Fourier变换), 并将其推广到量子力学. 当$h(p',q')=1$, 上式变为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q'\,\mathrm{d}p'\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(p-p')(q-q')}\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q'\,\delta(q-q')\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}p(q-q')} = 1.\end{aligned}\tag{7}$$

(6)式存在逆变换

$$\begin{aligned}&\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}q\mathrm{d}p}{\pi}\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(p-p')(q-q')}G(p,q)\\ &= h(p',q').\end{aligned}\tag{8}$$

事实上, 将(6)式代入(8)式的左边给出

$$\begin{aligned}&\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}q\mathrm{d}p}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}q''\mathrm{d}p''}{\pi}h(p'',q'')\\ &\times \mathrm{e}^{2\mathrm{i}[(p-p'')(q-q'')-(p-p')(q-q')]}\\ &= \iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q''\mathrm{d}p'' h(p'',q'')\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(p''q''-p'q')}\\ &\times \delta(p''-p')\,\delta(q''-q') = h(p',q'),\end{aligned}\tag{9}$$

此变换具有保模的性质

$$\begin{aligned}&\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}q\mathrm{d}p}{\pi}|h(p,q)|^2\\ &= \iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}q'\mathrm{d}p'}{\pi}|G(p',q')|^2\\ &\times \iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}p''\mathrm{d}q''}{\pi}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(p''q''-p'q')}\\ &\times \iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}q\mathrm{d}p}{\pi}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}[(-p''p-q''q)+(pp'+q'q)]}\\ &= \iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}q'\mathrm{d}p'}{\pi}|G(p',q')|^2\\ &\times \iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p''\mathrm{d}q''\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(p''q''-p'q')}\\ &\times \delta(q'-q'')\,\delta(p'-p'')\\ &= \iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}q'\mathrm{d}p'}{\pi}|G(p',q')|^2.\end{aligned}\tag{10}$$

3 积分核 $\frac{1}{\pi}\vdots\exp[\pm 2\mathrm{i}(q-Q)(p-P)]\vdots$ 的变换

将函数 $\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(p-p')(q-q')}$ 代之以Weyl排序的算符积分核

$$\frac{1}{\pi}\vdots\exp[2\mathrm{i}(q-Q)(p-P)]\vdots,\tag{11}$$

并做类似于(2)式的新积分变换, 由于在 $\vdots\ \vdots$ 内部Q与P可交换, 所以可用Weyl编序算符内的积分技术[13,14], 得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\mathrm{d}q\,\mathrm{e}^{\lambda q+\sigma p}\vdots\exp[2\mathrm{i}(q-Q)(p-P)]\vdots\\ &= \vdots\,\mathrm{e}^{\lambda Q+\sigma P+\mathrm{i}\lambda\sigma/2}\,\vdots = \mathrm{e}^{\lambda Q+\sigma P}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\sigma/2}\\ &= \mathrm{e}^{\lambda Q}\,\mathrm{e}^{\sigma P},\end{aligned}\tag{12}$$

这就直接把 $\mathrm{e}^{\lambda q+\sigma p}$ 量子化为 $Q-P$ 排序的算符 $\mathrm{e}^{\lambda Q}\,\mathrm{e}^{\sigma P}$, 因此比较

$$\begin{aligned}&\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\mathrm{d}q\,\mathrm{e}^{\lambda q+\sigma p}\delta\left(q-Q\right)\delta\left(p-P\right)\\&=\mathrm{e}^{\lambda Q}\,\mathrm{e}^{\sigma P},\end{aligned}\tag{13}$$

可知

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\vdots\exp[2\mathrm{i}\left(q-Q\right)\left(p-P\right)]\vdots\\&=\delta\left(q-Q\right)\delta\left(p-P\right).\end{aligned}\tag{14}$$

类似的, 以 $\frac{1}{\pi}\vdots\exp[-2\mathrm{i}\left(q-Q\right)\left(p-P\right)]\vdots$ 为积分核做如 (4) 式那样的变换,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\mathrm{d}q\,\mathrm{e}^{\lambda q+\sigma p}\vdots\exp[-2\mathrm{i}\left(q-Q\right)\left(p-P\right)]\vdots\\&=\vdots\mathrm{e}^{\lambda Q+\sigma P-\mathrm{i}\lambda\sigma/2}\vdots=\mathrm{e}^{\sigma P}\,\mathrm{e}^{\lambda Q},\end{aligned}\tag{15}$$

这就直接把 $\mathrm{e}^{\lambda q+\sigma p}$ 量子化为 $P-Q$ 排序的算符 $\mathrm{e}^{\sigma P}\,\mathrm{e}^{\lambda Q}$, 比较

$$\begin{aligned}&\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\mathrm{d}q\,\mathrm{e}^{\lambda q+\sigma p}\delta\left(p-P\right)\delta\left(q-Q\right)\\&=\mathrm{e}^{\sigma P}\,\mathrm{e}^{\lambda Q},\end{aligned}\tag{16}$$

可知

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\vdots\exp[-2\mathrm{i}\left(q-Q\right)\left(p-P\right)]\vdots\\&=\delta\left(p-P\right)\delta\left(q-Q\right),\end{aligned}\tag{17}$$

所以, 以 $\frac{1}{\pi}\vdots\exp[\pm2\mathrm{i}\left(q-Q\right)\left(p-P\right)]\vdots$ 为积分核的变换分别对应算符的 $Q-P$ 排序和 $P-Q$ 排序.

4 积分核 $\frac{1}{\pi}\vdots\exp[\pm2\mathrm{i}\left(q-Q\right)\left(p-P\right)]\vdots$ 与 Wigner 算符的关系

把经典量 $\mathrm{e}^{\lambda q+\sigma p}$ 直接量子化为 $\mathrm{e}^{\lambda Q+\sigma P}$ 的方案称为 Weyl-Wigner 量子化, 它们通过以下积分变换相联系

$$\mathrm{e}^{\lambda Q+\sigma P}=\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\mathrm{d}q\,\mathrm{e}^{\lambda q+\sigma p}\Delta\left(q,p\right),\tag{18}$$

$\Delta\left(q,p\right)$ 是 Wigner 算符, 其原始定义为

$$\Delta\left(q,p\right)=\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{4\pi^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q-Q)u+\mathrm{i}(p-P)v}.\tag{19}$$

把 (5) 式代入 (19) 式并用 Weyl 排序算符内的积分技术得到 (注意 P 与 Q 在 $\vdots\ \vdots$ 内部对易)

$$\begin{aligned}\Delta\left(q,p\right)&=\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{4\pi^2}\vdots\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q-Q)u+\mathrm{i}(p-P)v}\vdots\\&=\vdots\delta\left(p-P\right)\delta\left(q-Q\right)\vdots\\&=\vdots\delta\left(q-Q\right)\delta\left(p-P\right)\vdots,\end{aligned}\tag{20}$$

所以

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\vdots\exp[-2\mathrm{i}\left(q-Q\right)\left(p-P\right)]\vdots\\&=\frac{1}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p'\mathrm{d}q'\vdots\delta\left(p-P\right)\delta\left(q-Q\right)\vdots\\&\quad\times\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\left(p-p'\right)\left(q-q'\right)}\\&=\frac{1}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p'\mathrm{d}q'\Delta\left(q',p'\right)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\left(p-p'\right)\left(q-q'\right)},\end{aligned}\tag{21}$$

所以 $\frac{1}{\pi}\vdots\exp[-2\mathrm{i}\left(q-Q\right)\left(p-P\right)]\vdots$ 与 Wigner 算符互为新积分变换.

比较 (21) 式与 (17) 式又得到

$$\begin{aligned}\delta\left(p-P\right)\delta\left(q-Q\right)=&\frac{1}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p'\mathrm{d}q'\Delta\left(q',p'\right)\\&\times\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\left(p-p'\right)\left(q-q'\right)},\end{aligned}\tag{22}$$

取其厄密共轭有

$$\begin{aligned}\delta\left(q-Q\right)\delta\left(p-P\right)=&\frac{1}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p'\mathrm{d}q'\Delta\left(q',p'\right)\\&\times\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\left(p-p'\right)\left(q-q'\right)},\end{aligned}\tag{23}$$

明确地显示了算符排序规则之间的转化可以用变换 (6) 实现. 根据 (6) 式和 (8) 式的互逆关系, 我们从 (22), (23) 式又得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q\mathrm{d}p\delta\left(p-P\right)\delta\left(q-Q\right)\\&\times\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\left(p-p'\right)\left(q-q'\right)}=\Delta\left(q',p'\right),\end{aligned}\tag{24}$$

和

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q\mathrm{d}p\delta\left(q-Q\right)\delta\left(p-P\right)\\&\times\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\left(p-p'\right)\left(q-q'\right)}=\Delta\left(q',p'\right).\end{aligned}\tag{25}$$

以上公式有助于讨论算符排序的相互转换.

5 Wigner 函数的新积分变换及用途

鉴于坐标和动量不能同时精确地测量, 所以在量子力学的相空间中只能定义准概率分布函数 (Wigner 函数), 用以上的积分变换可以可以给出一个求 Wigner 函数的新途径. 事实上, 一个量子态 ρ 的 Wigner 函数为 $W\left(q,p\right)=\mathrm{Tr}\left[\rho\Delta\left(q,p\right)\right]$, 用

$$\delta\left(q-Q\right)=\left|q\right\rangle\left\langle q\right|,\delta\left(p-P\right)=\left|p\right\rangle\left\langle p\right|,\tag{26}$$

$$\langle q|\, p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}pq}, \tag{27}$$

及(25)式得到

$$\begin{aligned} & W(q,p) \\ &= \frac{1}{\pi}\mathrm{Tr}\Big(\rho\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q'\,\mathrm{d}p'\,\delta(q'-Q)\,\delta(p'-P) \\ &\quad \times \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(p-p')(q-q)}\Big) \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}}\mathrm{Tr}\Big(\rho\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q'\,\mathrm{d}p'\,|q'\rangle\langle p'| \\ &\quad \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}p'q'-2\mathrm{i}(p-p')(q-q')}\Big) \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}}\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q'\,\mathrm{d}p'\,\langle p'|\,\rho|q'\rangle \\ &\quad \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}p'q'-2\mathrm{i}(p-p')(q-q')}, \end{aligned} \tag{28}$$

$\langle p|\,\rho\,|q\rangle$ 是密度算符 ρ 在坐标-动量表象中的转换矩阵元, 其逆变换为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p'\,\mathrm{d}q'\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(p-p')(q-q')}W(q',p') \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle p|\,\rho\,|q\rangle\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}pq}, \end{aligned} \tag{29}$$

该新关系有利于分析Wigner函数的结构. 特别地, 当 ρ 是纯态, $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, 上式变为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p'\,\mathrm{d}q'\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(p-p')(q-q')}W(q',p') \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}pq}}{\sqrt{2\pi}}\psi(p)\,\psi^*(q) \end{aligned} \tag{30}$$

以及

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(p-p')(q-q')}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}pq}}{\sqrt{2\pi}}\psi(p)\,\psi^*(q) \\ &= W(q',p'), \end{aligned} \tag{31}$$

表明Wigner 函数 $W(q',p')$ 是波函数

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}pq}}{\sqrt{2\pi}}\psi(p)\psi^*(q)$$

的积分变换, 积分核是 $\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(p-p')(q-q')}$. (31)式实际上也指出了求Wigner函数的一个新方法. 例如当 $\rho = |n\rangle\langle n|$ 是一个纯粒子数态, $|n\rangle = a^{\dagger}|0/\sqrt{n!}$, 已知[6]

$$\langle p|\, n\rangle = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}H_n(p)\,\mathrm{e}^{-p^2/2}, \tag{32}$$

$$\langle n|\, q\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}H_n(q)\,\mathrm{e}^{-q^2/2}, \tag{33}$$

把(32)式, (33)式代入式(31)并积分就得到Wigner函数

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi 2^n n!\pi}}\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q H_n(p)\,H_n(q) \\ & \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}pq-p^2/2-q^2/2}\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(p-p')(q-q')} \\ =& \frac{(-1)^n}{\pi}\,\mathrm{e}^{-p'^2-q'^2}L_n\left[2\left(p'^2+q'^2\right)\right], \end{aligned} \tag{34}$$

其中 L_n 是 n 阶Laguerre多项式, 故

$$\begin{aligned} & W_{|n\rangle\langle n|}(q,p) \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi}\,\mathrm{e}^{-p^2-q^2}L_n\left[2\left(p^2+q^2\right)\right]. \end{aligned} \tag{35}$$

由于 $(-1)^n$ 的存在, 该Wigner函数非正定, 所以 $|n\rangle\langle n|$ 是一个非经典态. (34)式的反变换直接给出

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^n}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p'\,\mathrm{d}q'\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(p-p')(q-q')}\,\mathrm{e}^{-p'^2-q'^2} \\ & \times L_n\left[2\left(p'^2+q'^2\right)\right] \\ =& \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi 2^n n!}}H_n(q)\,H_n(p)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}pq-q^2/2-p^2/2}, \end{aligned} \tag{36}$$

这是一个新的积分公式. 又如混沌光场(混合态)的密度算符为

$$\rho_c = \left(1-\mathrm{e}^{\lambda}\right)\mathrm{e}^{\lambda a^{\dagger}a}, \tag{37}$$

用 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n| = 1$ 和厄密多项式的母函数公式

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n n!}H_n(x)\,H_n(y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\exp\left[\frac{2txy-t^2\left(x^2+y^2\right)}{1-t^2}\right], \end{aligned} \tag{38}$$

得到

$$\begin{aligned} & \langle p'|\,\rho_c\,|q'\rangle\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'q'} \\ &= \langle p'|\,\rho_c\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n\,|q'\rangle\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'q'} \\ &= \left(1-\mathrm{e}^{\lambda}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{\lambda n}\langle p'|\, n\rangle\langle n\,|q'\rangle\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'q'} \\ &= \left(1-\mathrm{e}^{\lambda}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{\lambda n}\frac{(-1)^n}{2^n n!\sqrt{\pi}}H_n(p')\,H_n(q') \\ &\quad \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}p'q'-p'^2/2-q'^2/2} \\ &= \frac{1-\mathrm{e}^{\lambda}}{\sqrt{\pi}\sqrt{1+\mathrm{e}^{2\lambda}}}\exp\Big\{\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2\lambda}}[\mathrm{i}q'p'\left(\mathrm{e}^{\lambda}-1\right)^2 \\ &\quad \left(\mathrm{e}^{2\lambda}-1\right)\left(q'^2+p'^2\right)/2]\Big\}, \end{aligned} \tag{39}$$

代入 (28) 式积分得到混沌光场的 Wigner 函数

$$W_{\rho_c} = \frac{1 - \mathrm{e}^{\lambda}}{\pi\left(1 + \mathrm{e}^{\lambda}\right)} \exp\left[\frac{\mathrm{e}^{\lambda} - 1}{1 + \mathrm{e}^{\lambda}}\left(q^2 + p^2\right)\right]. \quad (40)$$

6 结　论

本文指出了对应量子力学基本对易关系存在有积分变换, 当取积分核是

$$\frac{1}{\pi} \vdots \exp[\pm 2\mathrm{i}\,(q - Q)\,(p - P)] \vdots$$

时, 用这类积分变换就可实现算符的三种常用排序规则的相互转化. 此外, 还导出了此积分核与 Wigner 算符之间的关系, 以及密度算符 ρ 的 Wigner 函数与 $\langle p|\,\rho\,|q\rangle$ 的关系, 相信 Wigner 函数的这类积分变换对于发展相空间量子力学理论会有进一步的用处[15,16].

参考文献

[1] Dragoman D 2002 *Progress In Optics* **42** 424

[2] Dragoman D, Dragoman M 1999 *Prog. Quantum Electron.* **23** 131

[3] Crasser O, Mack H, Schleich W P 2004 *Fluct. Noise Lett.* **04** L43

[4] Nienhuis G, Allen L 1993 *Phys. Rev. A* **48** 656

[5] Wolf K B and Kurmyshev E V 1993 *Phys. Rev. A* **47** 3365

[6] Dirac P A M 1930 *The Principle of Quantum Mechanics* (Oxford: Clarendon Press)

[7] Lü C H, Fan H Y, Jiang N Q 2010 *Chin. Phys. B* **19** 120303

[8] Fan H Y 2003 *Phys. Lett. A* **313** 343

[9] Meng X G, Wang J S, Liang B L 2011 *Chin. Phys. B* **20** 014204

[10] Weyl H 1927 *Z. Phys.* **46** 1

[11] Wigner E 1932 *Phys. Rev.* **40** 749

[12] Wang J S, Fan H Y, Meng X G 2012 *Chin. Phys. B* **21** 064204

[13] Fan H Y 1992 *J. Phys. A* **25** 3443

[14] Fan H Y 1997 *Representation and Transformation Theory in Quantum Mechanics—Progress of Dirac's Symbolic Method* (Shanghai: Shanghai Scientific & Technical Publishers) (in Chinese) [范洪义 1997 量子力学表象与变换论-狄拉克符号法进展 (上海: 上海科技出版社)

[15] Fan H Y 2008 *Commun. Theor. Phys.* **50** 935

[16] Fan H Y 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 020302 (in Chinese) [范洪义 2013 物理学报 **62** 020302]

An integral-transformation corresponding to quantum mechanical fundamental commutative relation and its application in deriving Wigner function*

Fan Hong-Yi[1)†] Liang Zu-Feng[2)]

1) (*Department of Physics, Ningbo University, Ningbo 315211, China*)

2) (*College of Science, Hangzhou Normal University, Hangzhou 310036, China*)

(Received 11 July 2014; revised manuscript received 8 October 2014)

Abstract

In this paper, it can be found that there is a type of integra-transformation which corresponds to a quantum mechanical fundamental commutative relation, with its integral kernel being $\frac{1}{\pi} \vdots \exp[\pm 2\mathrm{i}\,(q-Q)\,(p-P)] \vdots$, here $\vdots\ \vdots$ denotes Weyl ordering, and Q and P are the coordinate and the momentum operator, respectively. Such a transformation is responsible for the mutual-converting among three ordering rules($P-Q$ ordering, $Q-P$ ordering and Weyl ordering). We also deduce the relationship between this kernel and the Wigner operator, and in this way a new approach for deriving Wigner function in quantum states is obtained.

Keywords: commutative relation, integral transformation, Weyl ordering, Wigner function

PACS: 03.65.–w, 42.50.–p **DOI:** 10.7498/aps.64.050301

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11175113,11275123).

† Corresponding author. E-mail: fanhongyi@nbu.edu.cn; fhym@ustc.edu.cn