物理学报 Acta Physica Sinica
Chinese Physical Society
Institute of Physics, CAS

变分法研究二维光晶格中玻色-爱因斯坦凝聚的调制不稳定性

陈海军

Modulational instability of a two-dimensional Bose-Einstein condensate in an optical lattice through a variational approach

Chen Hai-Jun

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 64, 054702 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.054702
在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.054702
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I5

变分法研究二维光晶格中玻色-爱因斯坦凝聚的调制不稳定性

陈海军†

(陇东学院电气工程学院, 庆阳 745000)

(2014 年 7 月 10 日收到; 2014 年 9 月 21 日收到修改稿)

利用含时变分法研究了二维光晶格中准二维玻色-爱因斯坦凝聚中的调制不稳定性. 在平均场近似下, 由准二维 Gross-Pitaevskii 方程出发, 利用变分法给出了调制波振幅和相位所满足的时间演化方程, 通过求解时间演化方程和能量分析法给出了发生调制不稳定性的条件, 决定于平面波振幅, 晶格强度, 调制波的波矢量和原子之间的两体相互作用.

关键词: 玻色-爱因斯坦凝聚, 光晶格, 调制不稳定性, 二维

PACS: 47.35.Fg, 42.81.Dp, 03.75.Kk **DOI:** 10.7498/aps.64.054702

1 引 言

在非线性系统中, 一个弱干扰调制可使系统激发谱出现虚频率, 从而导致初始平面波振幅无限增加, 使其分解为一系列局域波的现象, 称之为调制不稳定性 [1,2]. 最近, 玻色-爱因斯坦凝聚中的调制不稳定性引起了实验和理论研究的关注 [3−8]. 研究表明, 调制不稳定性是造成退相和凝聚体局域化的原因 [9], 玻色-爱因斯坦凝聚中的调制不稳定性在不同情形下主要受制于原子之间的两体和三体相互作用以及高阶相互作用, 另外受制于外部势场, 包括抛物型势场和光晶格势场, 而理论研究的出发点是含时 Gross-Pitaevskii 方程 (GP 方程), GP 方程把前述影响因素全部包含在内. 通常研究调制不稳定性的理论方法是标准线性稳定性分析方法, 但是当出现光晶格时, 线性稳定性分析方法不是很有效的研究手段, 采用的方法是含时变分法和数值模拟方法 [10,11].

一维体系中调制不稳定性的理论研究有用含时变分法研究非线性薛定谔方程中的调制不稳定性 [12], 高阶非线性相互作用下玻色-爱因斯坦凝聚体系中的调制不稳定性研究 [9], 一维光晶格中玻色爱因斯坦凝聚中含有高阶非线性相互作用时的调制不稳定性研究 [11], 两体和三体相互作用下一维玻色爱因斯坦凝聚体系中的调制不稳定性研究 [13]. 二维体系中调制不稳定性的研究有准二维光学系统中的调制不稳定性分析 [14], 二维玻色-爱因斯坦凝聚中孤立波的调制不稳定性研究 [15]. 另外, 光晶格中双组分玻色-爱因斯坦凝聚系统的调制不稳定性也有理论研究 [16,17].

在上述工作的基础上, 本文利用含时变分法研究了二维光晶格中准二维玻色-爱因斯坦凝聚体系中的调制不稳定性, 根据含时变分法的结果和能量分析法给出了调制不稳定性的条件.

2 变分法分析

描述光晶格中准二维玻色-爱因斯坦凝聚体系的 GP 方程是

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,y,t) = &-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi(x,y,t) \\ &+V_0\left[\cos^2(x)+\cos^2(y)\right]\psi(x,y,t) \\ &+g|\psi(x,y,t)|^2\psi(x,y,t), \end{aligned} \tag{1}$$

† 通信作者. E-mail: ldxychj@163.com

其中 $V_0\left[\cos^2(x)+\cos^2(y)\right]$ 表示二维光晶格, V_0 是晶格强度. g 表示和 s 波散射有关的原子之间的两体非线性相互作用, $g>0$ 表示原子之间具有排斥作用, $g<0$ 表示原子之间具有吸引相互作用.

和方程 (1) 对应的 Lagrangian 密度是

$$\begin{aligned}\mathcal{L}=&\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\psi\psi_t^*-\psi^*\psi_t\right)+\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|^2\\&+V_0\left[\cos^2(x)+\cos^2(y)\right]|\psi|^2+\frac{1}{2}g|\psi|^4.\end{aligned}\quad(2)$$

无光晶格时, 方程 (1) 的二维平面波解是

$$\psi(x,y,t)=A_0\exp[i(k_xx+k_yy-\omega t)],$$

其中 A_0 是平面波的振幅, $\boldsymbol{k}=(k_x,k_y)$ 是波矢量, ω 是圆频率. 假设二维平面波的调制形式是

$$\begin{aligned}&\psi(x,y,t)\\=&\{A_0+a_1(t)\exp[\mathrm{i}(\phi_1(t)+q_xx+q_yy)]\\&+a_2(t)\exp[\mathrm{i}(\phi_2(t)+q_xx-q_yy)]\\&+a_3(t)\exp[\mathrm{i}(\phi_3(t)-q_xx+q_yy)]\\&+a_4(t)\exp[\mathrm{i}(\phi_4(t)-q_xx-q_yy)]\}\\&\times\exp[\mathrm{i}(k_xx+k_yy-\omega t)],\end{aligned}\quad(3)$$

作为变分法的试探波函数, 其中 a_i, $\phi_i(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ 分别是调制波的振幅和相位, $\boldsymbol{q}=(q_x,q_y)$ 是调制波的波矢量. 把 (3) 式代入 (2) 式对空间积分可以得到有效 Lagrangian. 积分过程中利用了周期性边界条件, 考虑到积分区间是 $[0,2\pi]$, 引起 k_x , k_y, q_x, q_y 的量子化, 取值是 k_x, k_y, q_x, $q_y=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$

$$\begin{aligned}L=&\iint\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathcal{L}\\=&2\pi^2\Big[2\sum_{i=1}^4a_i^2\dot\phi_i+g\sum_{i=1}^4a_i^4-gA_0^4\\&+2V_0\left(A_0^2+\sum_{i=1}^4a_i^2\right)\\&+2\left(gA_0^2+2k_xq_x+q_x^2+q_y^2+2k_yq_y\right)a_1^2\\&+2\left(gA_0^2+2k_xq_x+q_x^2+q_y^2-2k_yq_y\right)a_2^2\\&+2\left(gA_0^2-2k_xq_x+q_x^2+q_y^2+2k_yq_y\right)a_3^2\\&+2\left(gA_0^2-2k_xq_x+q_x^2+q_y^2-2k_yq_y\right)a_4^2\\&+4gA_0^2\left(a_1a_4\cos(\phi_1+\phi_4)+a_2a_3\cos(\phi_2+\phi_3)\right)\\&+8ga_1a_2a_3a_4\cos\left(\phi_1-\phi_2-\phi_3+\phi_4\right)\\&+4g\big(a_1^2a_2^2+a_1^2a_3^2+a_1^2a_4^2+a_2^2a_3^2\\&+a_2^2a_4^2+a_3^2a_4^2\big)\Big].\end{aligned}\quad(4)$$

根据振幅 a_i 和相位 ϕ_i 的 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\partial L}{\partial\sigma}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot\sigma}=0,\quad(\sigma=a_i,\phi_i),\quad(5)$$

可以得到诸参数随时间变化的方程是

$$\begin{aligned}\dot\phi_1=&-g(A_0^2+a_1^2+2a_2^2+2a_3^2+2a_4^2)\\&-2k_xq_x-2k_yq_y-q_x^2-q_y^2-V_0\\&-gA_0^2a_4\cos(\phi_1+\phi_4)/a_1-2a_2a_3a_4\\&\times\cos\left(\phi_1-\phi_2-\phi_3+\phi_4\right)/a_1,\\\dot\phi_2=&-g(A_0^2+2a_1^2+a_2^2+2a_3^2+2a_4^2)\\&-2k_xq_x+2k_yq_y-q_x^2-q_y^2-V_0\\&-gA_0^2a_3\cos(\phi_2+\phi_3)/a_2-2a_1a_3a_4\\&\times\cos\left(\phi_1-\phi_2-\phi_3+\phi_4\right)/a_2,\\\dot\phi_3=&-g(A_0^2+2a_1^2+2a_2^2+a_3^2+2a_4^2)\\&+2k_xq_x-2k_yq_y-q_x^2-q_y^2-V_0\\&-gA_0^2a_2\cos(\phi_2+\phi_3)/a_3-2a_1a_2a_4\\&\times\cos\left(\phi_1-\phi_2-\phi_3+\phi_4\right)/a_3,\\\dot\phi_4=&-g(A_0^2+2a_1^2+2a_2^2+2a_3^2+a_4^2)\\&+2k_xq_x+2k_yq_y-q_x^2-q_y^2-V_0\\&-gA_0^2a_1\cos(\phi_1+\phi_4)/a_4-2a_1a_2a_3\\&\times\cos\left(\phi_1-\phi_2-\phi_3+\phi_4\right)/a_4,\\\dot a_1=&-gA_0^2a_4\sin(\phi_1+\phi_4)-2ga_2a_3a_4\\&\times\sin\left(\phi_1-\phi_2-\phi_3+\phi_4\right),\\\dot a_2=&-gA_0^2a_3\sin(\phi_2+\phi_3)-2ga_1a_3a_4\\&\times\sin\left(\phi_1-\phi_2-\phi_3+\phi_4\right),\\\dot a_3=&-gA_0^2a_2\sin(\phi_2+\phi_3)-2ga_1a_2a_4\\&\times\sin\left(\phi_1-\phi_2-\phi_3+\phi_4\right),\\\dot a_4=&-gA_0^2a_1\sin(\phi_1+\phi_4)-2ga_1a_2a_3\\&\times\sin\left(\phi_1-\phi_2-\phi_3+\phi_4\right).\end{aligned}\quad(6)$$

为了简化分析过程, 假定 $a_i=a$, $\phi_1+\phi_4=\phi_2+\phi_3=\phi$, 方程 (6) 简化为

$$\begin{aligned}\dot a=&-gA_0^2a\sin\phi,\\\dot\phi=&-2(9ga^2+gA_0^2+q_x^2+q_y^2+V_0+gA_0^2\cos\phi).\end{aligned}\quad(7)$$

做线性近似分析, 即只保留 $O(a)$ 项, 为了进一步简化计算, 引入 α, β, 方程 (7) 简化为

$$\begin{aligned}\dot a=&-\alpha a\sin\phi,\\\dot\phi=&-2(\alpha+\beta+\alpha\cos\phi),\end{aligned}\quad(8)$$

其中 $\alpha = gA_0^2$, $\beta = q_x^2 + q_y^2 + V_0$, 方程 (8) 的解是

$$\phi(t) = -2\arctan\left[\sqrt{1+\frac{2\alpha}{\beta}}\tan\left(\sqrt{\beta(\beta+2\alpha)}t\right)\right] \tag{9}$$

和

$$\begin{aligned} a(t) &\sim \sqrt{1+\frac{2\alpha}{\beta}\sin\left[\sqrt{\beta(\beta+2\alpha)}t\right]^2}, \\ &\quad (\beta+2\alpha>0), \\ a(t) &\sim \sqrt{1-\frac{2\alpha}{\beta}\sinh\left[\sqrt{\beta(\beta+2\alpha)}t\right]^2}, \\ &\quad (\beta+2\alpha<0). \end{aligned} \tag{10}$$

可以看出, 当 $\beta+2\alpha>0$ 时, $a(t)$ 有界, 当 $\beta+2\alpha<0$ 时, $a(t)$ 无界, 因此调制不稳定条件是 $\beta+2\alpha<0$, 而产生调制不稳定性的临界条件是 $\beta+2\alpha=0$.

3 能量方法分析

另一种研究的方法是能量分析的方法, 从有效拉格朗日函数 (4) 可以看出, 在简化条件 $a_i = a$, $\phi_1+\phi_4=\phi_2+\phi_3=\phi$ 下, $A \equiv 2a^2(\dot{A}=2\sqrt{2A}\dot{a})$ 和 ϕ 正则共轭, 满足正则方程

$$\frac{\partial H_{\rm eff}}{\partial \phi} = -\dot{A},\ \frac{\partial H_{\rm eff}}{\partial A} = \dot{\phi}. \tag{11}$$

积分可以求出有效 Hamiltonian 是

$$H_{\rm eff} = -2\left[\alpha A + \beta A + \frac{g}{4}A^2 + \alpha A\cos(\phi)\right]. \tag{12}$$

当无光晶格时, 哈密顿量是运动积分, 不失一般性, 假定

$$H_{\rm eff}^0 = H_{\rm eff}[A(t=0)=0] = 0. \tag{13}$$

而当出现光晶格时, 哈密顿量不再是运动积分, 哈密顿量中不守恒的部分对应的能量记为 $E_{\rm com}$, 有

$$H_{\rm eff}^0 = H_{\rm eff}(A) + E_{\rm com}, \tag{14}$$

(14) 式总可以写成 $\dot{A}^2/2 + V_{\rm eff} = 0$ 的形式, 其中 $V_{\rm eff}$ 表示有效作用势能为

$$\begin{aligned} V_{\rm eff} =& \frac{1}{8}\{4E_{\rm com}^2 - 4E_{\rm com}A[9gA+4(\alpha+\beta)] \\ &+ A^2[81g^2A^2 + 72gA(\alpha+\beta) \\ &+ 16\beta(\beta+2\alpha)]\}, \end{aligned} \tag{15}$$

可以看出 $V_{\rm eff}$ 是 A 的函数, 可以根据 $V_{\rm eff}$ 曲线的弯曲性质判断体系的稳定性, 当势能有局域最小值时, 体系有稳定解. 当势能没有局域最小值时, 体系没有稳定解, 即调制不稳定性的临界条件是

$$\left.\frac{\partial^2 V_{\rm eff}}{\partial A^2}\right|_{A=0} = -9gE_{\rm com} + 4\beta(\beta+2\alpha) = 0, \tag{16}$$

由于 $-9gE_{\rm com}$ 项很小, 可以忽略不计, 因此临界条件是 $\beta+2\alpha=0$, 和变分法结果一致.

4 调制不稳定性条件

从上述计算可以看出, 调制不稳定性条件是 $\beta+2\alpha<0$, 还原为原始参数有

$$q_x^2 + q_y^2 + V_0 + 2gA_0^2 < 0. \tag{17}$$

调制不稳定性条件由二维光晶格强度 V_0 和原子之间的两体非线性相互作用 g, 调制波的波矢量 $\boldsymbol{q}$ 和平面波的振幅 A_0 共同决定, 为了在晶格中心有势阱结构, 取 $V_0<0$, 此时 g 可以取正负值, 也就是有光晶格存在时, 原子之间存在吸引和排斥相互作用均可以存在调制不稳定性.

5 结 论

本文利用含时变分法和能量分析方法研究了二维光晶格中准二维玻色-爱因斯坦凝聚体系中的调制不稳定性. 由于是二维情形, 变分法分析过程中的数学计算很复杂, 对振幅和相位进行简化处理, 给出了发生调制不稳定性的条件, 决定于平面波的振幅, 调制波的波矢量, 光晶格强度和原子之间的两体相互作用强度. 结果表明, 在排斥和吸引相互作用下体系均可以发生调制不稳定性.

参考文献

[1] Sulem C, Sulem P L 1999 *The Nonlinear Schrödinger Equation* (Spinger-Verlag,New York)

[2] Gross M C, Hohenberg P C 1993 *Rev. Mod. Phys.* **65** 851

[3] Yang X X, Wu Y 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 1413

[4] Wu L, Zhang J F 2007 *Chin. Phys. Lett.* **24** 1471

[5] Li S C, Duan W S 2009 *Chin. Phys. B* **18** 4177

[6] Baizakov B B, Bouketir A, Messikh A 2009 *Phys. Rev. E* **79** 046605

[7] Li L, Li Z D, Malomed B A, Mihalache D, Liu W M 2005 *Phys. Rev. A* **72** 033611

[8] Zhao X D, Xie Z W, Zhang W P 2007 *Phys. Rev. B* **76** 214408

[9] 2012 *Phys Rev. E* **86** 017601

[10] Yu D S, Chen J B 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 1792
[11] 2014 *Phys Rev. E* **89** 052917
[12] Rapti Z, Kevrekidis P G, Smerzi A, Bishop A R 2004 *Phys. Rev. E* **69** 017601
[13] 2008 **77** 046216 (in Chinese) [Wamba E, Mohamadou A, Kofané T C, 2008 Phys Rev. E **77** 046216]
[14] Jia L L, Sun S L, Li J H 2012 *Acta Sinica Quantum Optica* **18** 65 (in Chinese) [贾磊磊, 孙山林, 李精华 2012 量子光学学报 **18** 65]
[15] Zhang H, Duan W S 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 044703 (in Chinese) [张恒, 段文山 2013 物理学报 **62** 044703]
[16] Huang J S, Chen H F, Xie Z W 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3435 (in Chinese) [黄劲松, 陈海峰, 谢征微 2008 物理学报 **57** 3435]
[17] Teng F, Xie Z W 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 026701 (in Chinese) [藤斐, 谢征微 2013 物理学报 **62** 026701]

Modulational instability of a two-dimensional Bose-Einstein condensate in an optical lattice through a variational approach

Chen Hai-Jun†

(*Electrical Engineering College, Longdong University, Qingyang 745000, China*)

(Received 10 July 2014; revised manuscript received 21 September 2014)

Abstract

We investigate the modulational instability of a two-dimensional Bose-Einstein condensate in a two-dimensional optical lattice using a time-dependent variational approach. Within this framework, we derive the ordinary differential equations for time evolution of the amplitude and phase of modulational perturbations. Analyzing these equations and the Hamiltonian of the system, we obtain the modulational instability criterion.

Keywords: Bose-Einstein condensate, optical lattice, modulational instability, two-dimensional

PACS: 47.35.Fg, 42.81.Dp, 03.75.Kk **DOI:** 10.7498/aps.64.054702

† Corresponding author. E-mail: ldxychj@163.com