

乘性色噪声激励下三稳态 van der Pol-Duffing 振子随机 P-分岔

吴志强 郝颖

Stochastic P-bifurcations in tri-stable van der Pol-Duffing oscillator with multiplicative colored noise

Wu Zhi-Qiang Hao Ying

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 060501 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.060501

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.060501>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I6>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

非对称耦合粒子链在棘齿势中的确定性定向运输

Deterministic directional transport of asymmetrically coupled nonlinear oscillators in a ratchet potential

物理学报.2015, 64(7): 070501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.070501>

群体迁移行为的理论与实证研究

Theoretical and empirical studies on group behaviors

物理学报.2015, 64(3): 030502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.030502>

非对称双稳耦合网络系统的尺度随机共振研究

System size stochastic resonance in asymmetric bistable coupled network systems

物理学报.2014, 63(22): 220503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.220503>

系统非对称性及记忆性对布朗马达输运行为的影响

Influences of the system symmetry and memory on the transport behavior of Brownian motor

物理学报.2014, 63(16): 160502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.160502>

空时非对称分数阶类 Langevin 棘齿

Spatiotemporally asymmetric fractional Langevin-like ratchet

物理学报.2014, 63(16): 160503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.160503>

乘性色噪声激励下三稳态 van der Pol-Duffing 振子随机 P-分岔*

吴志强[†] 郝颖

(天津大学机械工程学院力学系, 天津 300072)

(2014年3月7日收到; 2014年10月18日收到修改稿)

研究了乘性色噪声作用下三稳态 van der Pol-Duffing 振子的随机 P-分岔问题. 首先应用随机平均法得到系统振动幅值稳态概率密度函数的表达式, 进而应用奇异性理论, 得到刻画随机 P-分岔发生的临界参数条件的转迁集以及系统存在的典型稳态概率密度曲线, 并通过 Monte-Carlo 数值模拟进行了验证. 以此为基础讨论了噪声强度、相关时间、系统线性阻尼系数对随机 P-分岔和系统稳态响应行为的影响.

关键词: 稳态概率密度, 随机 P-分岔, 转迁集

PACS: 05.10.Gg, 05.40.Ca, 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.64.060501

1 引言

随机分岔主要是指由随机扰动引起的系统定性性质的变化. 当系统的控制参数变化时, 不变测度密度的分布曲线由单峰变成多峰, 则称之为随机 P-分岔 (stochastic phenomenal bifurcation)^[1]. 随机 P-分岔是随机非线性系统动力学研究的重要问题之一.

关于多个稳定周期解共存系统的随机 P-分岔已有较多研究. 如文献^[2, 3]研究了谐和与宽带噪声联合激励下含分数导数型阻尼 Duffing 振子的平稳响应, 发现分数阶数的变化可以导致系统发生随机 P-分岔; 文献^[4, 5]研究了 Duffing 振子在窄带随机噪声、谐和与随机噪声联合激励下 Duffing 振子的双峰稳态概率密度问题.

关于平衡点与极限环共存系统随机 P-分岔问题的研究还比较少, 已有研究主要针对随机激励下的 Duffing-van der Pol 系统. 文献^[6—8]研究了双稳态情况下 Duffing-van der Pol 系统的随机 P-分岔.

针对三稳态 van der Pol-Duffing 系统, 文献^[9, 10]分别研究了加性白噪声、加性和乘性白噪声联合激励下的随机 P-分岔现象, 发现系统概率密度分布曲线最多能出现三个峰值, 且系统发生随机 P-分岔所对应的转迁集也更为复杂. 目前关于其他形式噪声激励下三稳态系统随机 P-分岔现象的分析还没有报道.

特别值得一提的是, 文献^[11, 12]对具有大展弦比的翼型在低速风洞中发生的颤振现象进行了实验研究, 发现系统存在亚临界 Hopf 分岔, 并且由此产生的极限环会发生二次分岔, 从而导致稳定平衡点和稳定极限环共存的现象. 上述实验研究表明, 研究随机激励下多稳态系统的动力学行为不仅具有理论意义, 同时也具有重要的工程参考价值.

与加性噪声相比, 乘性噪声的作用机理特殊, 现有文献较少考虑其单独作用下多稳态系统随机 P-分岔问题. 本文针对乘性色噪声单独作用下 van der Pol-Duffing 系统随机 P-分岔现象进行研究, 将有助于完善三稳态情况下对随机 P-分岔现象的认识.

* 国家自然科学基金(批准号: 11172198)、国家自然科学基金(批准号: 11372211) 和国家重点基础研究发展计划(批准号: 2014CB046805) 资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: zhiqwu@tju.edu.cn

2 三稳态 van der Pol-Duffing 振子的稳态概率密度

考虑如下 van der Pol-Duffing 方程:

$$\ddot{x} - (-\varepsilon + \alpha_1 x^2 - \alpha_2 x^4 + \alpha_3 x^6 - \alpha_4 x^8)\dot{x} + x + \alpha_0 x^3 = xn(t), \quad (1)$$

其中 $n(t)$ 为具有零均值的色噪声. 其相关函数和功率谱密度表达式如下:

$$R(t_1, t_2) = \frac{D}{\tau} e^{-\frac{|t_1 - t_2|}{\tau}},$$

$$S(\omega) = \frac{2D}{2\pi(1 + \tau^2\omega^2)}.$$

系统确定性部分的参数取值为^[1]: $\alpha_0 = 0.2$, $\alpha_1 = 1.51$, $\alpha_2 = 2.85$, $\alpha_3 = 1.693$, $\alpha_4 = 0.312$, 主要基于两点考虑: 1) 使系统(1)在适当的参数范围内存在三稳态; 2) 使系统(1)适用于平均法分析且结果有足够精度.

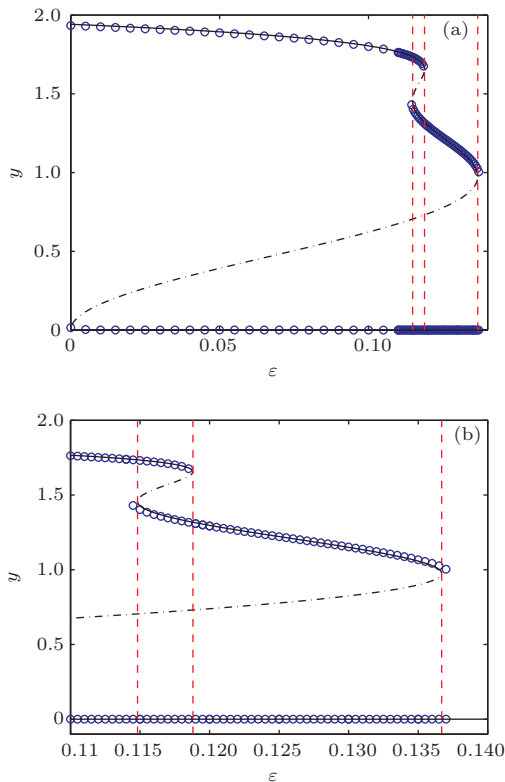


图1 (网刊彩色) 确定性系统定态运动分布

确定性 ($D = 0$) 情况下系统极限环幅值随阻尼系数 ε 变化的分岔图见图 1. 其中蓝色圆点为数值计算结果, 黑色线为平均法得到的近似结果, 二者吻合得很好, 说明平均法是适用的. 从图 1 中可以

看出, 系统最多可有三个吸引子共存, 故称此系统为三稳态系统. $\varepsilon \in [0.1148, 0.1188]$ 区间时, 确定性系统有一个平衡点和四个极限环, 从内向外依次为稳定、不稳定、稳定、不稳定、稳定. $\varepsilon \in [0, 0.1148]$, $\varepsilon \in [0.1188, 0.1367]$ 时确定性系统分别有一个平衡点和两个极限环, 依次为稳定、不稳定、稳定.

为讨论随机激励下 ($D \neq 0$) 系统的分岔问题, 以下应用随机平均法求解乘性色噪声作用下随机系统振动幅值的稳态概率密度函数. 首先引入如下变换:

$$x = y(t) \cos(t + \theta(t)),$$

$$\dot{x} = -y(t) \sin(t + \theta(t)),$$

$$\phi = t + \theta(t). \quad (2)$$

将方程(2)代入方程(1), 可以得到如下形式的标准方程:

$$\dot{a} = a \sin^2 \phi (-\varepsilon + \alpha_1 a^2 \cos^2 \phi - \alpha_2 a^4 \cos^4 \phi + \alpha_3 a^6 \cos^6 \phi - \alpha_4 a^8 \cos^8 \phi) + \alpha_0 a^3 \cos^3 \phi \sin \phi - a \cos \phi n(t) \sin \phi,$$

$$\dot{\theta} = \sin \phi \cos \phi (-\varepsilon + \alpha_1 a^2 \cos^2 \phi - \alpha_2 a^4 \cos^4 \phi + \alpha_3 a^6 \cos^6 \phi - \alpha_4 a^8 \cos^8 \phi) + \alpha_0 a^3 \cos^4 \phi - \cos^2 \phi n(t). \quad (3)$$

更进一步得到相应的伊藤随机微分方程:

$$dy = \left[-\frac{\varepsilon y}{2} + \frac{\alpha_1 y^3}{8} - \frac{\alpha_2 y^5}{16} + \frac{5\alpha_3 y^7}{128} - \frac{7\alpha_4 y^9}{256} + \frac{3Dy}{8(1+4\tau^2)} \right] dt + \sqrt{\frac{Dy^2}{4(1+4\tau^2)}} dw_1(t),$$

$$d\theta = \frac{3\alpha_0 y^2}{8} - \frac{D\tau}{2(1+4\tau^2)} dt + \sqrt{\frac{2D\tau^2}{1+4\tau^2} + \frac{3D}{4(1+4\tau^2)}} dw_2(t), \quad (4)$$

其中 $w_1(t)$, $w_2(t)$ 是两个独立的单位 Wiener 过程, 因为振动幅值 y 不依赖于 ϕ 的变化, 故由(4)式中的第一式可以得到关于振动幅值 y 的 Fokker-Planck-Kolmogorov 方程 (FPK 方程)

$$\frac{\partial p(y, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left[-\frac{\varepsilon y}{2} + \frac{\alpha_1 y^3}{8} - \frac{\alpha_2 y^5}{16} + \frac{5\alpha_3 y^7}{128} - \frac{7\alpha_4 y^9}{256} + \frac{3Dy}{8(1+4\tau^2)} \right] p(y, t) \right\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\frac{Dy^2}{4(1+4\tau^2)} p(y, t) \right]. \quad (5)$$

其稳态解即为系统振动幅值的稳态概率密度函数:

$$p_s(y) = R(y, D, \tau, \varepsilon) \exp(Q(y, D, \tau, \varepsilon)), \quad (6)$$

其中,

$$R(y, D, \tau, \varepsilon) = \frac{4(1 + 4\tau^2)y^{\frac{D-4\varepsilon-16\varepsilon\tau^2}{D}}}{D},$$

$$Q(y, D, \tau, \varepsilon) = -\frac{(1 + 4\tau^2)}{768D}y^2(21\alpha_4y^6 - 40\alpha_3y^4 + 96\alpha_2y^2 - 384\alpha_1).$$

下文将依据 (6) 式讨论参数变化引起的随机 P-分岔现象.

3 随机 P-分岔奇异性分析

奇异性理论为讨论分岔方程解曲线拓扑类型的变化提供了很好的工具. 为利用此工具分析系统 PDF 曲线拓扑结构的变化, 文献 [13] 引入新的视角解读方程 (6), 并得到了随机 P-分岔临界参数条件的通用表达式. 根据该文方法, (6) 式可以视为以 p_s 为分岔参数 y 为状态变量的分岔方程, 则相应的转迁集就是 P-分岔的临界参数条件. 依据文献 [13] 中的结论, 系统的转迁集包括以下几种类型:

$$H = \{R' + RQ' = 0, R'' + 2R'Q' + RQ'' + RQ'^2 = 0\},$$

$$DL = \{p_s = R(y_i, D, \tau) \exp(Q(y_i, D, \tau, \varepsilon)), R' + RQ' = 0, i = 1, 2, y_1 \neq y_2\}$$

H 代表 PDF 曲线峰值数目变化的条件, DL 代表各峰值相对高度发生逆转的条件. 绝大部分研究工作仅关注峰值数目的变化, 因此下文也只给出转迁集 H 的计算结果. 经计算可以得到系统发生随机 P-分岔的临界参数条件, 如下:

$$D = \frac{(1 + 4\tau^2)}{32}(128\varepsilon - 32\alpha_1y^2 + 16\alpha_2y^4 - 10\alpha_3y^6 + 7\alpha_4y^8), \quad (7)$$

其中稳态响应幅值 y 满足如下方程:

$$128y^2(-16\alpha_1 + 16\alpha_2y^2 - 15\alpha_3y^4 + 14\alpha_4y^6) = 0. \quad (8)$$

根据本文给定的参数值, 可以得到方程 (8) 的四个非负解为 $y = 0, 0.976, 1.456, 1.655$. 将所得 y 的取值代入方程 (7), 即可在 (ε, D) 参数平面上得到 4

条平行线, 它们在 $D = 0$ 轴上的截距依次为 $\varepsilon = 0, 0.1367, 0.1148, 0.1188$. 值得注意的是, 所得四组 (y, ε) 的数值与确定性系统分岔图 (图 1) 中分岔点的值是一致的. 下面利用上述结果来分析系统的随机 P-分岔现象.

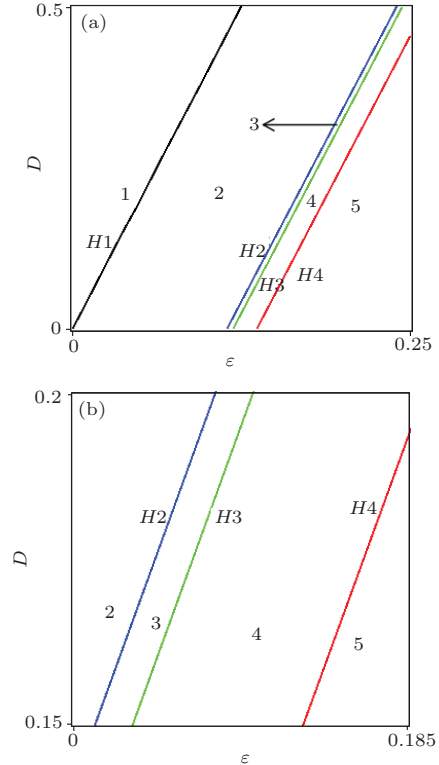


图 2 (网刊彩色) $\tau = 0$ 时 P-分岔的临界条件, (b) 为 (a) 的局部放大图

图 2 给出了色噪声相关时间为 $\tau = 0$ 时系统在 (ε, D) 参数平面内的转迁集曲线. 可以看出转迁集曲线包括 4 条平行线, 且这四条平行线把 (ε, D) 参数平面划分为 5 个区域. 从每个区域中各取一点 (ε, D) , 依据 (6) 式可得到对应的 PDF 曲线, 如图 3 所示. 图 3 中蓝色星号线表示 Monte Carlo 数值模拟得到的结果, 黑色实线为理论计算结果, 二者符合较好, 说明随机平均法求解此系统的 PDF 有较高的精度, 以此为基础进行奇异性分析是可靠的.

奇异性理论指出, 当 (ε, D) 在图 2 中同一参数区域取值时, PDF 曲线拓扑结构不会发生本质的变化. 也就是说图 3 给出的结果代表了 (ε, D) 变化时系统可能出现的所有 PDF 曲线类型.

现在分析各类 PDF 曲线对应的系统稳态动力学行为的特点. 当参数在 (ε, D) 参数平面中区域 1 内选取时, 系统的稳态响应主要表现为幅值较大的振动, PDF 曲线在距离原点较远处有一个明

显的峰值,如图3(a)所示.当参数在区域2内选取时,PDF曲线虽然在距离原点较远处仍有明显峰值,但在原点处概率明显不为0,此时系统的稳态响应存在类似于确定性系统中幅值为0的响应,如图3(b)中所示.当参数在区域3内选取时,PDF曲线在原点以外还存在两个区分不明显的峰值,系统除了存在幅值为0的稳态响应外,也存在大幅振动.当参数在区域4内选取时,系统的PDF曲线(见图3(d))与图3(b)定性相同,但是PDF曲线偏离原点的峰值所对应的 y 值要小于图3(b)中峰值所对应的 y 值,这两种情况下系统稳态响应出现大幅振动时振动幅值的大小有明显差别.当参数在区域5内选取时,PDF曲线以 δ 函数形式出现,系统的稳态响应幅值恒为0,系统响应类似确定性系统中出现的稳定的平衡点,这说明此时系统的随机性已经完全被抑制.

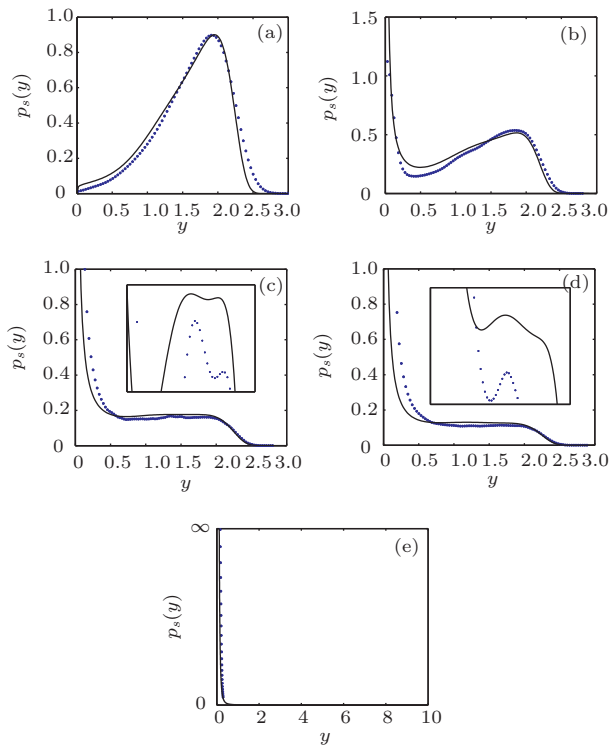


图3 (网刊彩色) 典型PDF曲线 (a) $\varepsilon = 0.08, D = 0.4$; (b) $\varepsilon = 0.16, D = 0.31$; (c) $\varepsilon = 0.236, D = 0.475$; (d) $\varepsilon = 0.246, D = 0.475$; (e) $\varepsilon = 0.4, D = 0.4$

综合上述分析,图2中任意相邻的两个参数区域所对应的系统PDF曲线有本质的不同,说明 (ε, D) 参数的取值只要穿越图2中任意一条直线,系统都会发生随机P-分岔,因此变迁集曲线就是随机P-分岔发生的临界参数条件.这也验证了文献[13]提出的方法是正确的.

下面讨论 $\tau \neq 0$ 时的随机P分岔问题.为此,图4给出了 $\tau = 0.5$ 时系统的变迁集计算结果,相应的PDF曲线与图3中对应图形等价,因受篇幅限制此处省略;图5给出了变迁集曲线之斜率 k 随 τ 的变化情况.

先分析给定相关时间 τ 时, D 和 ε 变化对系统的影响(参图4).保持噪声强度 D 不变,阻尼系数 ε 增加,稳态响应中大幅振动出现的概率逐渐减小,直至概率变为0,稳定在原点处;不论 D 取何值,P-分岔的序列都相同,PDF曲线类型依序从图3(a)到图3(e).保持 ε 不变,只要随机激励强度 D 的取值超越某临界值,响应PDF曲线都会变成图3(a)中所示的形式,系统大幅振动的概率随 D 的取值增加而增加.上述特点主要取决于系统变迁集曲线所包含的四条平行线,这与加性噪声激励的情况有显著不同.加性噪声激励下,变迁集曲线在参数平面内围成近似三角形区域,只要 D 取值足够大,就可以抑制系统发生随机P-分岔[10].

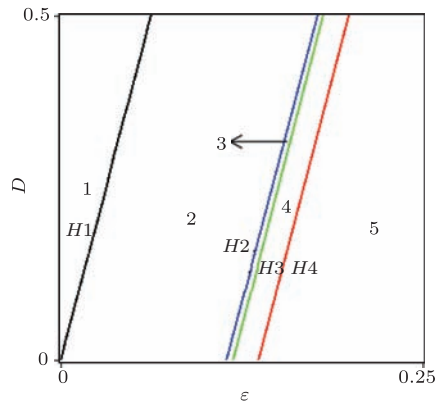


图4 (网刊彩色) $\tau = 0.5$ 时变迁集曲线

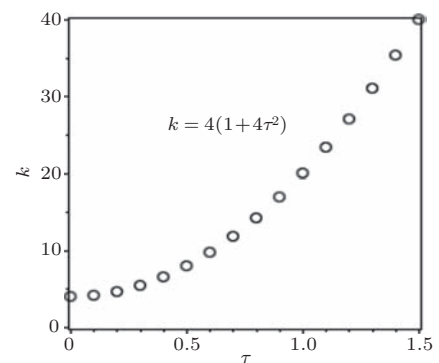


图5 τ 变化对P-分岔的影响

再看相关时间 τ 变化的影响.从图5可以看出,变迁集直线的斜率随着相关时间 τ 的增加而增大,

因而,保持 ε 不变,发生随机P-分岔所对应的噪声强度 D 的临界值也随之增大.换言之,相关时间增大,可以减弱乘性噪声激励的影响.特别地,相关时间 τ 的增加会使得参数区域 Ω 扩大, (ε, D) 在此参数区域内取值时,系统的随机性是完全被抑制的,响应趋向于稳定的平衡点.也就是说,相关时间的增加增强了系统平衡点的稳定性.

4 结 论

本文应用随机平均法和奇异性理论研究了乘性噪声作用下三稳态 van der Pol-Duffing 振子的随机P-分岔问题,得到以下结论:

1) 利用确定性系统奇异性分析的理论可以得到随机系统的转迁集,转迁集曲线也就是系统发生随机P-分岔的临界参数条件,并且可用稳态响应幅值的参数方程解析表示;

2) 与加性噪声的影响一样,乘性噪声激励和线性阻尼系数同样可以导致系统发生随机P-分岔;

3) 不同于加性噪声的影响,在阻尼系数 ε 和噪声强度 D 平面上的得到的随机P-分岔发生的临界参数条件为几条平行线,并且这些平行线的斜率随着噪声相关时间的增加而增大;

4) 乘性噪声激励的存在降低了系统平衡点的稳定性,但在其他参数不变的情况下,相关时间的增大有利于提高系统平衡点的稳定性.

参考文献

- [1] Zhu W Q 1998 *Random Vibration* (Beijing: Science Press) p465 (in Chinese) [朱位秋 1998 随机振动(北京:科学出版社)第465页]
- [2] Chen L C, Zhu W Q 2010 *Chin. J. Appl. Mech.* **3** 517 (in Chinese) [陈林聪,朱位秋 2010 应用力学学报 **3** 517]
- [3] Chen L C, Zhu W Q 2011 *Int. J. Non-Linear Mech.* **46** 1324
- [4] Rong H W, Wang X D, Xu W, Meng G, Fang T 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2557 (in Chinese) [戎海武,王向东,徐伟,孟光,方同 2005 物理学报 **54** 2557]
- [5] Rong H W, Wang X D, Meng G, Xu W, Fang T 2006 *Chin. J. Appl. Mech.* **27** 1373 (in Chinese) [戎海武,王向东,孟光,徐伟,方同 2006 应用数学和力学 **27** 1373]
- [6] Zakharova A, Vadivasova T, Anishchenko V, Koseska A, Kurths J 2010 *Phys. Rev. E* **81** 011106
- [7] Xu Y, Gu R C, Zhang H Q, Xu W, Duan J Q 2011 *Phys. Rev. E* **83** 056215
- [8] Gu R C, Xu Y, Hao M L 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 060513 (in Chinese) [顾仁财,许勇,郝孟丽 2011 物理学报 **60** 060513]
- [9] Wu Z Q, Hao Y 2013 *Sci. Sin.: Physica, Mechanica & Astronomica* **43** 524 (in Chinese) [吴志强,郝颖 2013 中国科学:中国科学:物理学 力学 天文学 **43** 524]
- [10] Hao Y, Wu Z Q 2013 *Chin. J. Theor. Appl. Mech.* **43** 257 (in Chinese) [郝颖,吴志强 2013 力学学报 **43** 257]
- [11] Christiansen L E, Lehn-Schioler T, Mosekilde E, Gránásy P, Matsushita H 2002 *Math. Comput. Simulat.* **58** 385
- [12] Dimitriadis G, Li J 2009 *AIAA J.* **47** 2577
- [13] Wu Z Q 2012 *Proceedings of the 23rd International Congress of Theoretical and Applied Mechanics* Beijing August 19–24, 2012

Stochastic P-bifurcations in tri-stable van der Pol-Duffing oscillator with multiplicative colored noise*

Wu Zhi-Qiang[†] Hao Ying

(Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

(Received 7 March 2014; revised manuscript received 18 October 2014)

Abstract

This article aims at studying the stochastic P-bifurcation of tri-stable van der Pol-Duffing oscillator subjected to multiplicative colored noise. First, the stationary probability density of amplitude is derived by using the stochastic averaging method. Then the critical parameter conditions of stochastic P-bifurcation are obtained based on the singularity theory. And the different types of stationary probability densities of amplitude are also obtained, which are in good agreement with the results from Monte-Carlo numerical simulation. Based on these results, the effects of the noise correlation time, noise intensity and linear damping coefficient on the P-bifurcation and the stable response behavior of the system are studied.

Keywords: stationary probability density function, stochastic P-bifurcation, transition sets

PACS: 05.10.Gg, 05.40.Ca, 05.45.-a

DOI: [10.7498/aps.64.060501](https://doi.org/10.7498/aps.64.060501)

* Project supported by the National Science Foundation of China (Grant Nos. 11172198, 11372211), and the National Basic Research Program of China (Grant No. 2014CB046805).

[†] Corresponding author. E-mail: zhiqwu@tju.edu.cn