

一种用保角变换求解带电 Kelvin 电容器边缘效应所产生静电力的解析模型

李世松 张钟华 赵伟 黄松岭 傅壮

Analytical model of electrostatic force generated by edge effect of a Kelvin capacitor based on conformal transformation

Li Shi-Song Zhang Zhong-Hua Zhao Wei Huang Song-Ling Fu Zhuang

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 060601 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.060601

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.060601>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I6>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

开孔矩形腔体电磁泄漏特性的解析研究

[Analytical formulation for electromagnetic leakage from an apertured rectangular cavity](#)

物理学报.2014, 63(21): 214103 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.214103>

含泡沫面元模型的海面电磁散射研究

[Research on the facet model of electromagnetic scatterings from rough sea surface with foams](#)

物理学报.2014, 63(21): 214104 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.214104>

早期乳腺肿瘤的超宽带微波稳健波束形成成像检测系统

[Ultra-wideband microwave robust Capon beamforming imaging system for early breast cancer detection](#)

物理学报.2014, 63(19): 194102 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.194102>

含卷浪 Pierson-Moscovitz 谱海面电磁散射研究

[Modeling and electromagnetic scattering from the overturning wave crest](#)

物理学报.2014, 63(16): 164102 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.164102>

激光诱导叶绿素荧光寿命的测量及其特性分析

[Laser-induced chlorophyll fluorescence lifetime measurement and characteristic analysis](#)

物理学报.2013, 62(19): 190601 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.190601>

# 一种用保角变换求解带电Kelvin电容器边缘效应 所产生静电力的解析模型\*

李世松<sup>1)2)†</sup> 张钟华<sup>2)</sup> 赵伟<sup>1)</sup> 黄松岭<sup>1)</sup> 傅壮<sup>1)</sup>

1)(清华大学电机系, 北京 100084)

2)(中国计量科学研究院, 北京 100029)

(2014年9月24日收到; 2014年10月13日收到修改稿)

提出了一种用于弱力测量的带电Kelvin电容器产生静电力的新型工作方式. 该工作方式的优点是在机械上可明显简化静电力的实现, 避免了带电Kelvin电容器在传统工作方式下需要同步移动中心电极和保护电极的困难; 缺点是因Kelvin电容器的边缘效应, 会不可避免地随之产生一个小的静电力分量, 需要准确建立它的数学模型, 方可清晰地评估它对测量结果的影响. 为解决此问题, 本文采用部分电容模拟和保角变换, 将二维电场的计算转换为一维电场计算问题, 并基于此, 得到了一种合理表征Kelvin电容器边缘效应所产生静电力分量的解析模型. 通过与一个具体计算实例的有限元计算求解结果相比较, 分析了所建立的解析模型的准确性.

**关键词:** 电场分析, 保角变换, 解析模型, 弱力测量

**PACS:** 06.20.f-, 41.20.-q, 45.20.da

**DOI:** 10.7498/aps.64.060601

## 1 引言

随着现代工业和科学技术的进步, 特别是生物医学和材料科学的快速发展, 对 $10^{-2}$  N以下弱力的准确测量和绝对量值溯源, 已经成为相关领域关注的焦点之一<sup>[1-3]</sup>. 例如, 校准磁盘头的接触力约为10 mN<sup>[4]</sup>; 薄膜硬度测试所需的力约为1  $\mu$ N—10 mN<sup>[5]</sup>; 使化学键断裂的力约为1—2 nN<sup>[6]</sup>; 单分子拉力约为1—500 pN<sup>[7]</sup>; 激光斑点产生的力约为6.6 pN<sup>[8,9]</sup>; 单电子自旋力约为aN量级<sup>[10]</sup>等. 图1中归纳了常用的弱力测量方法及其测量范围, 实现这些测量方法的仪器设备主要包括: 砝码天平<sup>[11]</sup>、原子力显微镜<sup>[12,13]</sup>、光镊<sup>[14,15]</sup>、磁共振力显微镜等<sup>[10,16]</sup>.

从力学量值溯源的角度看, 弱力测量最终要溯

源到质量的基本单位——千克. 而质量单位千克现在仍采用铂铱合金制成的实物作基准. 使用实物

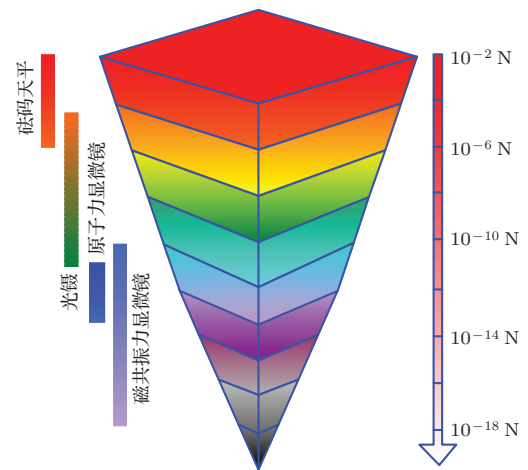


图1 (网刊彩色) 弱力测量方法及其测量范围

\* 国家科技支撑计划(批准号: 2011AA06Z000)、国家自然科学基金(批准号: 51477160)和国家质检总局公益性行业科研专项项目(批准号: 201010010)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: leeshisong@sina.com

基准的一个问题是其量值会随时间的推移发生未知的漂移<sup>[17]</sup>. 为了消除基本单位千克量值随时间的漂移, 保证力学溯源体系的稳定性, 目前国际上正在进行建立质量量子基准的相关研究工作<sup>[18]</sup>, 其中一种重要的方法, 就是设法将砝码的重力用电磁力来表征<sup>[19]</sup>. 20世纪, 电学计量中出现了两个准确度极高的量子基准——约瑟夫森电压基准和量子化霍尔电阻基准, 它们将电学计量的准确性提高了2—3个数量级<sup>[20]</sup>. 采用电学量子基准实现的电磁力(磁力或静电力)高度准确, 已经成为力学测量领域较理想的计量基准之一.

鉴于此, 国际上提出了一种所谓“静电天平”的弱力测量或溯源的方法<sup>[21]</sup>. 它的基本原理是将要测量或溯源的弱力用带电压电容器所产生的静电力来平衡, 即

$$f = \frac{U^2}{2} \frac{\partial C}{\partial z}, \quad (1)$$

其中,  $f$ 是需要测量的弱力,  $\partial C/\partial z$ 为电容器的电容量 $C$ 对竖直坐标 $z$ 的偏导数,  $U$ 代表施加在电容器两极板上的电压. 由于电压可溯源至约瑟夫森电压基准<sup>[22]</sup>, 电容可溯源至计算电容基准<sup>[23]</sup>, 长度量可溯源至光学量子基准. 因此, 原理上讲, 由(1)式产生的静电力可以达到很高的准确度.

带电 Kelvin 电容器是静电天平常用的一种静电力实现方式. 传统的带电 Kelvin 电容器产生静电力的方式, 相应的计算和测量均较为简单, 且边缘效应小; 但是, 在其实现过程中, 需同步移动中心电极和保护电极, 机械实现的难度相当大. 另外, 带电 Kelvin 电容器在传统工作方式下的电场分布比较分散, 需要采取较为细致的屏蔽防护措施, 否则, 在测量过程中会存在因泄露而产生的附加力.

本文第2部分中提出了一种带电 Kelvin 电容器产生静电力的新型工作方式, 它可使静电力在机械实现上变得大为简化, 且电场分布比较集中, 因此屏蔽防护的实现也较为简单. 但缺点是在该工作方式下, 带电 Kelvin 电容器的边缘效应会不可避免地随之产生一个小的静电力分量, 需要准确建立其数学模型, 从而能较容易地对测量结果进行修正. 针对该问题, 本文第3部分采用部分电容模拟和保角变换, 建立了带电 Kelvin 电容器边缘效应所产生的小静电力分量的解析模型. 为验证所建立解析模型的准确性, 本文第4部分以一个具体实例的有限元计算结果与所建立的解析模型的计算结果进行

了比较.

## 2 带电 Kelvin 电容器产生静电力的新方式

图2(a)给出了带电 Kelvin 电容器产生静电力的传统方式, 其中, 中心电极1悬挂在力(矩)比较器上, 并通过解耦装置与比较器解耦; 保护电极3环绕中心电极, 拓展电极2被固定在保护电极和中心电极下方, 并与中心电极平行. 在产生静电力时, 拓展电极接高电位端, 而中心电极和保护电极接低电位端.

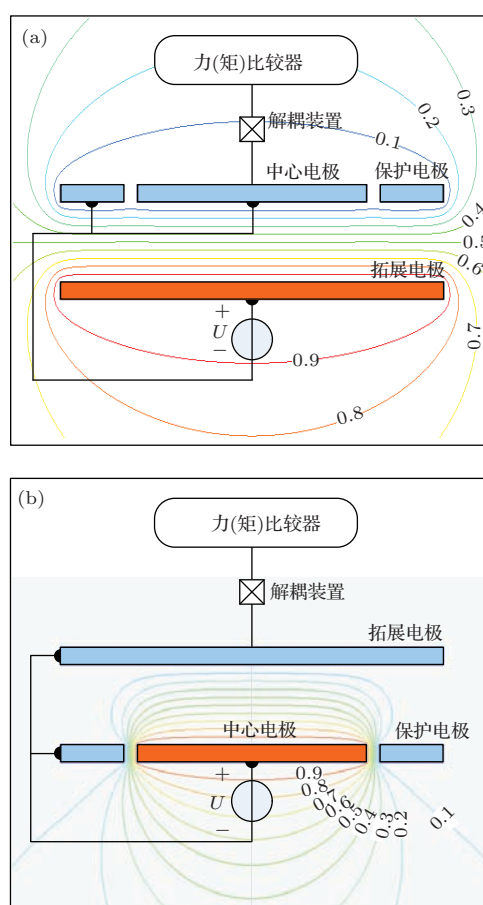


图2 (网刊彩色) 带电 Kelvin 电容器产生静电力的两种方式

图2(a)所示的带电 Kelvin 电容器系统所包含的能量为

$$E_1 = \frac{U^2}{2}(C_{12} + C_{23}), \quad (2)$$

其中,  $C_{12}$ 为中心电极1与拓展电极2之间的电容;  $C_{23}$ 为拓展电极2与保护电极之间的电容;  $U$ 为电容器上施加的电压. 根据虚功原理, 力(矩)比较器

所感知的静电力为

$$f_1 = \frac{U^2}{2} \frac{\partial C_{12}}{\partial z}. \quad (3)$$

应注意, 虽然电容  $C_{23}$  的能量变化也可产生静电力, 但保护电极与力(矩)比较器之间并无机械连接, 故其产生的静电力不会被感知.

为了实现充分的屏蔽, 保证对三端电容的准确测量, 图 2(a) 所示的产生静电力的传统方式, 一般需要使保护电极与中心电极保持同步运动, 但这在机械实现上是较为烦琐的, 且容易因屏蔽不完善而引入新的附加静电力. 另外, 图 2(a) 中所示出的背景, 为 Kelvin 电容器施加电压时的电位分布, 所标数字表示等电位线的电位与所加电压  $U$  的比例系数. 不难看出, 此条件下电容器周围的电场比较发散, 特别是力(矩)比较器附近电位较高, 因此, 需要设计较为完善的屏蔽防护, 以避免测量过程中产生附加静电力.

为避免带电 Kelvin 电容器静电力传统产生方式下由于保护电极运动以及电容器中电场发散可能导致产生附加的静电力, 并简化所需精密机械部分的设计, 本文提出了一种如图 2(b) 所示的带电 Kelvin 电容器产生静电力的新方式. 在这种新方式下, 拓展电极与力(矩)比较器通过解耦装置连接, 中心电极和保护电极被固定在拓展电极的下方. 通电时, 中心电极接高电位端, 而拓展电极和保护电极接低电位端. 从图 2(b) 所示的 Kelvin 电容器的电位分布可以看出, 这种新型的静电力产生方式相比传统方式, 电场分布更为集中, 且力(矩)比较器附近电位接近 0, 因而屏蔽防护的实现会更加简单. 在采用该带电 Kelvin 电容器静电力产生新方式下, Kelvin 电容器的静电能量为

$$E_2 = \frac{U^2}{2} (C_{12} + C_{13}), \quad (4)$$

其中,  $C_{13}$  为中心电极与保护电极之间的电容. 图 2(b) 所示带电 Kelvin 电容器产生的、由力比较器能感知的静电力为

$$f_2 = \frac{U^2}{2} \left( \frac{\partial C_{12}}{\partial z} + \frac{\partial C_{13}}{\partial z} \right). \quad (5)$$

从 (5) 式可以看出, 图 2(b) 所示的带电 Kelvin 电容器产生的静电力包括两个部分: 由电容  $C_{12}$  的能量变化产生的静电力  $f_{12}$ , 以及由电容  $C_{13}$  的能量变化产生的静电力  $f_{13}$ . 其中,  $f_{12}$  为 Kelvin 电容器所产生的静电力的主要部分, 称为主静电力分量; 而

$f_{13}$  则是由电容器的边缘效应引起的, 其量值相对于  $f_{12}$  较小, 称为边缘效应分量.

在图 2(b) 所示带电 Kelvin 电容器产生静电力新方式下, 所产生的静电力主分量  $f_{12}$ , 可按经典的平板电容器的静电力的计算公式进行计算 [24], 即

$$f_{12} = -\frac{U^2 \varepsilon \pi (2R_0 + \delta)^2}{8d^2}, \quad (6)$$

其中,  $\varepsilon$  为平板电容器两电极间介质的电容率,  $R_0$  为中心电极的半径,  $\delta$  是中心电极与保护电极之间的气隙宽度,  $d$  为中心电极与拓展电极之间的竖直距离.

截至目前, 文献中还尚无关于电容  $C_{13}$  的能量变化产生的静电力即边缘效应分量  $f_{13}$  的解析计算方法. 针对于此, 在本文下节中, 提出了一种基于部分电容和保角变换的解析计算方法.

### 3 静电力边缘效应分量的解析模型

保角变换可将  $z = x + jy$  平面上的非圆边界映射为  $\xi = u + jv$  平面上的圆边界, 结果可使所求解的问题得以简化 [25-27]. 在求解由  $C_{13}$  的能量变化所产生的静电力边缘效应分量  $f_{13}$  时, 所遵循的基本思路是: 首先采用部分电容模拟的办法, 即将  $C_{13}$  的模型简化为三个独立电容之和; 应注意, 在此过程中, 需保证 Kelvin 电容器所产生的电场分布保持不变; 然后, 采用保角变换, 分别求解三个部分电容产生的静电力, 进而求出  $f_{13}$ .

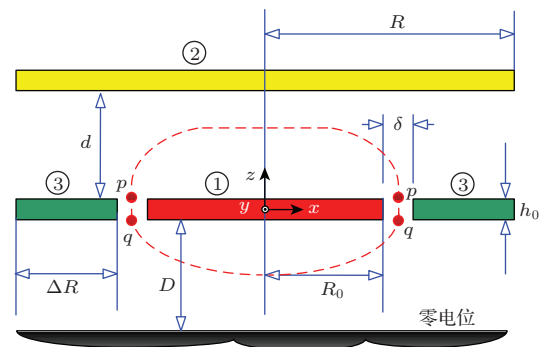


图 3 (网刊彩色) Kelvin 电容器剖面结构参数示意图

图 3 为 Kelvin 电容器的剖面结构参数示意图. 其中, 圆盘形中心电极的半径为  $R_0$ , 圆盘形拓展电极的半径为  $R$ , 圆环形保护电极的内外半径之差为  $\Delta R$ , 中心电极和保护电极的厚度均为  $h_0$ , 它们到地电位的竖直距离为  $D$ . 根据电容的定义, 中心电

极与保护电极之间的电容  $C_{13}$  可以写成

$$C_{13} = \frac{Q}{U}, \quad (7)$$

其中,  $Q$  为中心电极上所带的电荷量,  $U$  为中心电极与保护电极之间的电压.

取图 3 中由虚线围成的封闭几何体  $W$ , 由于图 3 所示 Kelvin 电容器结构为剖面图, 图中所选取的  $p$  和  $q$  分别为两条与圆盘形中心电极同心的封闭圆曲线. 根据高斯定理, (7) 式中的电荷量  $Q$  可按下列式计算:

$$Q = \varepsilon \left( \int_{S_1} E \cdot dS + \int_{S_2} E \cdot dS + \int_{S_3} E \cdot dS \right), \quad (8)$$

其中,  $E$  为电场强度  $S_1$  对应于图 3 中  $W$  上曲线  $p$  之上的表面积, 即封闭几何体  $W$  在中心电极以上表面的面积;  $S_2$  对应  $W$  上曲线  $p$  与曲线  $q$  之间的表面积, 即  $W$  在中心电极与保护电极之间的表面积;  $S_3$  对应图中  $W$  上曲线  $q$  以下的表面积, 即  $W$  在中心电极以下表面的面积.

若能分别求出  $S_1$ ,  $S_2$  和  $S_3$  表面上的电通量, 那么, 电容  $C_{13}$  就可以根据 (7) 式求解出来. 现定义如下三个被分解的部分电容  $C_1$ ,  $C_2$  和  $C_3$ , 具体表示为

$$C_i = \frac{1}{U} \varepsilon \int_{S_i} E \cdot dS \quad (i = 1, 2, 3). \quad (9)$$

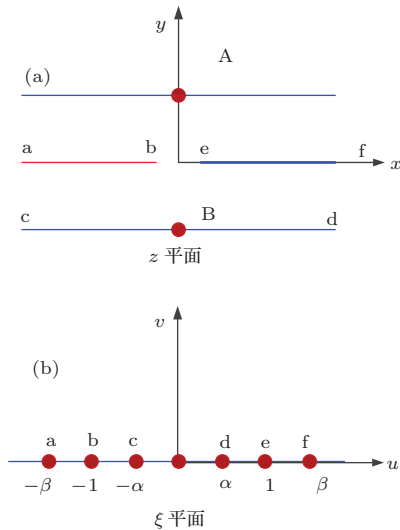


图 4 (网刊彩色) 计算  $C_1$  时所采用的保角变换模型

求取  $C_1$  解析表达式时, 采用如图 4(a) 所示的对称缝隙电容器模型来模拟其周围电场的分布. 在该模型中, 通过点 A 平行于  $x$  轴的点 a 与点 f 之间的线段, 代表了拓展电极; 在  $x$  轴上, 点 a 与点 b 之

间的线段代表中心电极, 点 e 与点 f 之间的线段代表保护电极; 由于中心电极与保护电极之间的空气隙远小于圆盘形中心电极的半径以及圆环形保护电极的内外径之差, 即  $\delta \ll R_0$  或  $\delta \ll \Delta R$ , 因此, 在建模过程中可近似认为线段 ab 和线段 ef 关于  $y$  轴对称. 同时, 为方便计算, 在  $z$  下半平面上设置一个与拓展电极 af 关于  $x$  轴对称的镜像电极.

在模拟过程中, 假设  $z$  平面上的点 a, c, f, d 分别在无穷远处, 其在  $\xi$  平面上的映射值分别为  $-\beta, -\alpha, \alpha, \beta$ , 见图 4(b);  $\xi$  平面上的点 b 和 e 对应于  $\xi$  平面上的  $-1$  和  $1$  点; 点 A 和 B 对应  $\xi$  平面上的  $\infty$  点和  $0$  点. 显然, 应满足关系  $0 < \alpha < 1 < \beta$ .

根据计算模型中零极点的个数, 计算  $C_1$  所采用的保角变换应满足如下形式:

$$z = A_0 \int \frac{(\xi - 1)(\xi + 1)}{(\xi - \alpha)(\xi + \alpha)(\xi - \beta)(\xi + \beta)} \times d\xi + B_0, \quad (10)$$

其中,  $A_0$  和  $B_0$  为未知常数.

(10) 式的积分函数可以分解为如下的分式和的形式:

$$\frac{(\xi - 1)(\xi + 1)}{(\xi - \alpha)(\xi + \alpha)(\xi - \beta)(\xi + \beta)} = \frac{1}{\beta^2 - \alpha^2} \left( \frac{1 - \alpha^2}{\xi^2 - \alpha^2} + \frac{\beta^2 - 1}{\xi^2 - \beta^2} \right). \quad (11)$$

对 (11) 式中的各项分别进行积分, 则可将 (10) 式改写为

$$z = M \left( \ln \frac{\xi + \alpha}{\xi - \alpha} + \ln \frac{\xi + \beta}{\xi - \beta} \right) + N. \quad (12)$$

将图 4 中 A 和 B 两点的边界条件代入 (12) 式, 得到

$$M = \frac{d}{\pi}; \quad N = jd. \quad (13)$$

由于图 4 所采用的保角变换为对称变换, 故有  $\alpha\beta = 1$ . 则 (10) 式可写成

$$z = \frac{d}{\pi} \left( \ln \frac{\xi + \alpha}{\xi - \alpha} + \ln \frac{\alpha\xi + 1}{\alpha\xi - 1} \right) + jd, \quad (14)$$

其中,  $\alpha$  的数值可用变换式在 b 点或 e 点的对应条件进行求解, 即

$$\frac{d}{\pi} \left( \ln \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} + \ln \frac{1 + \alpha}{\alpha - 1} \right) + jd = \frac{\delta}{2}. \quad (15)$$

由 (15) 式解出  $\alpha$ , 可得到

$$\alpha = \frac{\exp\left(\frac{\pi\delta}{4d}\right) - 1}{\exp\left(\frac{\pi\delta}{4d}\right) + 1} = \tanh\left(\frac{\pi\delta}{8d}\right). \quad (16)$$

由此, 由(16)式得到相应的保角变换结果后, 便可将二维电场计算问题简化为一维电场的计算问题. 电极abc与电极def之间的电容 $C_{\Delta}$ 为

$$C_{\Delta} = \frac{\varepsilon}{\pi} \left( \ln \frac{\alpha + \beta}{2\alpha} - \ln \frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right). \quad (17)$$

应注意, (17)式所表征的模型为双对称模型在单位缝隙长度上电容的表达式. 而实际上,  $C_1$ 仅包含上述模型的一半电通量, 且中心电极与保护电极之间的缝隙总长度为 $\pi(2R_0 + \delta)$ , 故 $C_1$ 应被表征为

$$\begin{aligned} C_1 &= \pi \left( R_0 + \frac{\delta}{2} \right) C_{\Delta} \\ &= \varepsilon(2R_0 + \delta) \ln \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha}. \end{aligned} \quad (18)$$

由于 $\alpha$ 是竖直坐标 $z$ 的函数, 故电容 $C_1$ 的能量会随着可动电极的移动而发生变化, 并产生静电力.

类似对 $C_1$ 的求解, 现采用保角变换再求解电容 $C_2$ 的解析表达式. 计算 $C_2$ 所用的保角变换为

$$\xi = \ln |z| + j \cdot \arg(z), \quad (19)$$

其中,  $\arg(z)$ 为向量 $z$ 的相角. 如图5所示,  $z$ 平面上, 中心电极的外圆映射到 $\xi$ 平面上为 $u = \ln(R_0)$ ,  $0 < v \leq 2\pi$ ; 圆环形保护电极的内圆映射到 $\xi$ 平面上为 $u = \ln(R_0 + \delta)$ ,  $0 < v \leq 2\pi$ .

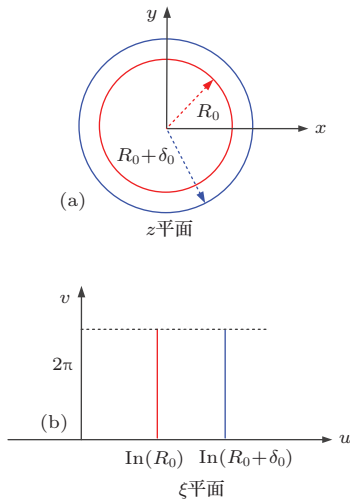


图5 (网刊彩色) 计算 $C_2$ 所使用的保角变换模型

利用(19)式, 可将 $z$ 平面上的同心圆电容器变换为 $\xi$ 平面上的平行板电容器, 其电容为

$$C_2 = \frac{2\pi\varepsilon h_0}{\ln(R_0 + \delta) - \ln R_0}, \quad (20)$$

其中,  $h_0$ 为中心电极和保护电极的厚度.

从(20)式可知,  $C_2$ 与拓展电极的位置 $d$ 无关, 即电容 $C_2$ 中存储的静电能量在竖直方向上保持恒定, 因此电容 $C_2$ 并不会产生静电力.

而对电容 $C_3$ , 可直接采用计算 $C_1$ 的变换模型进行求解. 鉴于由中心电极到零电位面的距离为 $D$ , 则 $C_3$ 的表达式为

$$C_3 = \varepsilon(2R_0 + \delta) \ln \left[ \frac{\tanh^2 \left( \frac{\pi\delta}{8D} \right) + 1}{2 \tanh \left( \frac{\pi\delta}{8D} \right)} \right]. \quad (21)$$

同样地, 由(21)式可知, 电容 $C_3$ 中存储的静电能量在竖直方向上也保持恒定, 因而也不会产生静电力.

从上述分析可看出, 在图3所示的封闭几何体 $W$ 上,  $S_2$ 和 $S_3$ 表面的电通量 $C_2U$ ,  $C_3U$ 在拓展电极的移动过程中均保持不变, 即 $W$ 表面电通量的变化主要由 $C_1U$ 所引起. 根据虚功原理, 静电力的大小仅与静电能量的变化有关, 故在求解带电 Kelvin 电容器静电力边缘效应分量 $f_{13}$ 时, 只需考虑有关 $C_1$ 的模型即可, 即

$$f_{13} = \frac{U^2}{2} \frac{\partial C_1}{\partial z}. \quad (22)$$

## 4 模型验证

现采用一个有限元计算的实例, 来验证在带电 Kelvin 电容器静电力产生的新型方式下, 本文所提出的表征所附带生成的静电力边缘效应分量的解析模型的正确性. 模型参数设置如下:  $R_0 = 109$  mm,  $R = 150$  mm,  $\Delta R = 40$  mm,  $\delta = 1$  mm,  $d = (10 + z)$  mm,  $h_0 = 5$  mm; 电容器极板所加电压 $U = 100$  V.

对上述实例, 采用本文提出的解析模型和以有限元方法计算出的结果如图6所示. 从计算结果可以看出, 本文所建立的求解带电 Kelvin 电容器边缘效应分量解析模型的计算结果与采用有限元法计算的结果的符合度较好. 进一步的数据分析显示, 两者之间的相对误差的平均值为 $-3.8\%$ . 分析认为, 该误差主要是由于解析模型将图4(a)中的保护电极和中心电极的径向长度近似认为相等所致. 显然, 假设的情形仅在圆环形保护电极外半径为无限大时才成立. 为核实该结论, 本文还以有限元方法计算了上述实例的保护电极和拓展电极在径向都延伸60 mm的情况. 计算结果见图6, 当圆环形

保护电极的内外半径之差  $\Delta R = 100$  mm 时, 解析模型计算结果与采用有限元法计算的结果的相对误差会减小至  $-2.4\%$ .

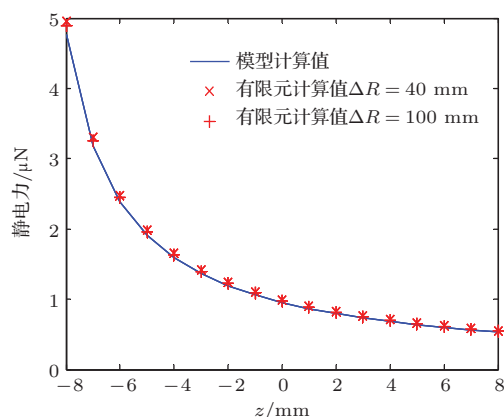


图6 (网刊彩色) 算例有限元计算结果和解析模型计算结果对比

应注意, 由带电 Kelvin 电容器所产生静电力的边缘效应分量  $f_{13}$  在量值上, 仅约为主静电力分量  $f_{12}$  的百分之几. 与采用有限元方法计算结果比较表明, 采用本文所建立的解析模型对“静电天平”静电力边缘效应分量进行修正, 可使测量结果的准确度提高约两个数量级.

## 5 结 论

针对带电 Kelvin 电容器在传统方式下产生静电力时, 需同步移动中心电极和保护电极, 且存在电场较为分散的缺点, 提出了一种用于弱力测量的带电 Kelvin 电容器静电力产生的新方式. 该静电力产生方式在机械实现上非常简单, 且使电场变得更为集中, 易于实现较完善的屏蔽防护. 但这种产生静电力的新方式存在的一个缺点是, 带电 Kelvin 电容器产生主静电力的同时, 还会伴生一个小的静电力分量, 即边缘效应分量, 对其需要建立准确的数学模型, 才能保证最终测量结果的准确性.

为求解带电 Kelvin 电容器新工作方式下所产生的静电力边缘效应分量, 提出了一种部分电容模拟方法, 将与边缘效应相关的电容分解为三个部分电容之和, 每个部分电容均采用保角变换求解. 通过采用保角变换, 将二维电场的计算转换为一维电场的计算, 得到了表征带电 Kelvin 电容器所产生静电力边缘效应分量的解析模型. 具体计算实例的有限元方法计算结果, 与所建立解析模型的计算结果相比较表明, 所建立的解析模型具有较好的准确

度. 受保角变换近似条件的限制, 解析模型与有限元计算之间仍存在一定误差, 需要更进一步地深入研究.

## 参考文献

- [1] Chan H B, Aksyuk V A, Kleiman R N, Bishop D J, Federico C 2001 *Science* **291** 1941
- [2] Craighead H G 2000 *Science* **290** 1532
- [3] Gross L, Mohn F, Moll N, Schuler B, Criado A, Guitián E, Pena D, Gourdon A, Meyer G 2012 *Science* **337** 1326
- [4] Solin S A, Hines D R, Rowe A C H, Tsai J S, Pashkin Y A, Chung S J, Goel N, Santos M B 2002 *Appl. Phys. Lett.* **80** 4012
- [5] Peng Y Z, Li Y, Ru B, Huo D X, Qian Z H 2014 *Chin. Phys. B* **23** 097503
- [6] Filippov A E, Klafter J, Urbakh M 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 135503
- [7] Bustamante C, Bryant Z, Smith S B 2003 *Nature* **421** 423
- [8] Juan M L, Righini M, Quidant R 2011 *Nature Photon.* **5** 349
- [9] Huang X F, Li S J, Zhou D H, Zhao G J, Wang G Q, Xu J R 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 178802 (in Chinese) [黄雪峰, 李盛姬, 周东辉, 赵冠军, 王关晴, 徐江荣 2014 物理学报 **63** 178802]
- [10] Rugar D, Budakian R, Mamin H J, Chui B W 2004 *Nature* **430** 329
- [11] Beer W, Fasel W, Moll E, Richard P, Schneiter U, Thalmann R, Egger J 2002 *Metrologia* **39** 263
- [12] Fang M H, Wei Z Y, Zhang Z X, Zhu L, Fu Y, Shi M, Li G W, Guo G 2013 *Chin. Phys. B* **22** 116105
- [13] Huan Q, Hu H, Pan L D, Xiao J, Du S X, Gao H J 2010 *Chin. Phys. B* **19** 080517
- [14] Liang P B, Lei J J, Liu Z H, Zhang Y, Yuan L B 2014 *Chin. Phys. B* **23** 088702
- [15] Ren H L, Ding P F, Li X Y 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 210701 (in Chinese) [任洪亮, 丁攀峰, 李小燕 2012 物理学报 **61** 210701]
- [16] Berman G P, Doolen G D, Hammel P C, Tsifrinovich V I 2000 *Phys. Rev. B* **61** 14694
- [17] Girard G 1994 *Metrologia* **31** 317
- [18] Li S S, Zhang Z H, Zhao W, Li Z K, Huang S L 2014 *Chin. Phys. B* (accept for publication)
- [19] Li S S, Han B, Li Z, Lan J 2012 *Measurement* **45** 1
- [20] Zimmerman N M 2010 *Phys. Today* **63** 68
- [21] Pratt J R, Kramar J A, Newell D B, Smith D T 2005 *Meas. Sci. Technol.* **16** 2129
- [22] Hamilton C A 2000 *Rev. Sci. Instrum.* **71** 3611
- [23] Trapon G, Thévenot O, Lacueille J C, Poirier W 2003 *Metrologia* **40** 159
- [24] Heerens W C, Vermeulen F C 1975 *J. Appl. Phys.* **46** 2486
- [25] Li W 2011 *Chin. Phys. B* **20** 116201
- [26] Bai Z W 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2472 (in Chinese) [白占武 2004 物理学报 **53** 2472]
- [27] He D W, Cheng X H, Wang Z J, Xu D W, Song Z R, Yu Y H 2011 *Chin. Phys. B* **20** 010210

# Analytical model of electrostatic force generated by edge effect of a Kelvin capacitor based on conformal transformation\*

Li Shi-Song<sup>1)2)†</sup> Zhang Zhong-Hua<sup>2)</sup> Zhao Wei<sup>1)</sup> Huang Song-Ling<sup>1)</sup> Fu Zhuang<sup>1)</sup>

1) (*Department of Electrical Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China*)

2) (*National Institute of Metrology, Beijing 100029, China*)

( Received 24 September 2014; revised manuscript received 13 October 2014 )

## Abstract

We present a new realization of weak electrostatic force based on Kelvin capacitor, which, compared with the conventional realization, simplifies the mechanical design without synchronously moving the central and guard-ring electrodes. However, a residual force due to the edge effect of the capacitor should be accurately known. In this paper, an analytic model of the electrostatic force generated from the edge effect is presented based on conformal transformations. The accuracy of the model is verified by the finite element calculation based on a micro-Newton weak force generation.

**Keywords:** electrical field, conformal transformation, analytical model, weak force measurement

**PACS:** 06.20.f-, 41.20.-q, 45.20.da

**DOI:** 10.7498/aps.64.060601

---

\* Project supported by the National Key Technology R&D Program (Grant No. 2011AA06Z000), the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51477160), and the National Department Public Benefit Research Foundation, China (Grant No. 201010010).

† Corresponding author. E-mail: [leeshisong@sina.com](mailto:leeshisong@sina.com)