

基于小波与重调和方程的扩散去噪模型的研究

周先春 汪美玲 石兰芳 周林锋

Diffusion denoising model based on the wavelet and biharmonic equation

Zhou Xian-Chun Wang Mei-Ling Shi Lan-Fang Zhou Lin-Feng

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 064203 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.064203

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.064203>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I6>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于局部约束群稀疏的红外图像超分辨率重建

Infrared image super-resolution via locality-constrained group sparse model

物理学报.2014, 63(4): 044202 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.044202>

基于 l_p 范数的压缩感知图像重建算法研究

An algorithm for image reconstruction based on l_p norm

物理学报.2013, 62(17): 174212 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.174212>

快速多极边界元法用于扩散光学断层成像研究

Fast multipole boundary element method for diffuse optical tomography

物理学报.2013, 62(10): 104204 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.104204>

融合结构先验信息的稳态扩散光学断层成像重建算法研究

Image reconstruction algorithm for steady-state diffuse optical tomography with structural priori information

物理学报.2013, 62(1): 014202 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.014202>

基于光程编码与相干合成的三维超分辨术

Path length coded coherence combination for three-dimensional superresolution

物理学报.2011, 60(12): 124204 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.60.124204>

基于小波与重调和方程的扩散去噪模型的研究*

周先春^{1)2)3)†} 汪美玲¹⁾²⁾³⁾ 石兰芳⁴⁾ 周林锋¹⁾²⁾³⁾

1) (南京信息工程大学电子与信息工程学院, 南京 210044)

2) (南京信息工程大学, 江苏省大气环境与装备技术协同创新中心, 南京 210044)

3) (南京信息工程大学, 江苏省气象探测与信息处理重点实验室, 南京 210044)

4) (南京信息工程大学数学与统计学院, 南京 210044)

(2014年9月6日收到; 2014年10月15日收到修改稿)

在图像处理过程中, 为了在图像去噪时更好地保留图像的角点、尖峰和窄边缘, 利用重调和方程的应力平衡性及其高阶偏导数的局部极大值, 构建新算子, 建立重调和扩散模型. 考虑到若图像中的噪声很强, 则会在处理后的图像上留下一些孤立的斑点, 且图像的纹理是在较大范围上具有的统计特性, 而新建模型只能保留局部细节, 图像大范围上的信息没有得到很好保留, 故对上述新建模型做进一步改进, 采用小波变换提取图像的高频部分, 对这部分运用应力平衡性构建新算子, 从局部上较稳定地控制图像的细节信息, 建立波域重调和扩散模型. 分析与仿真结果表明, 该模型与 Perona-Mailik 模型相比较保留了更多的图像信息, 有效地增强了图像的边缘, 同时很好地保持了图像的角点、尖峰、和窄边缘, 是一个理想的模型.

关键词: 重调和方程, 小波变换, 扩散去噪, 图像去噪

PACS: 42.30.Wb, 02.30.Jr

DOI: 10.7498/aps.64.064203

1 引言

数字图像处理技术已广泛应用于许多科学和工程领域^[1]. 而图像质量自然也成为评判这些应用成果价值的客观指标. 但是, 由于实际中设备的不完善, 所获得的图像通常达不到期望的质量. 因此, 原始图像的恢复是非常必要的. 近几十年来, 由于人类视觉对图像恢复水平的高追求, 数学方法处理图像已成为一个重要的课题, 其中, 偏微分方程 (partial differential equation, PDE) 和小波变换备受青睐.

基于偏微分方程的图像滤波算法已经得到了许多深入研究^[2-8]. 该类算法大多数是依赖图像的梯度、曲率等几何特征来处理. 1990年, Perona和Mailik将热传导方程推广到非线性领域, 提出了

PM模型^[9]. PM模型能够针对图像的边缘和非边缘区域进行不同性质的处理, 但由于PM模型是一个病态的理论模型, 并且扩散系数仅依赖于图像的梯度, 因而PM模型在噪声的影响下容易造成图像的边缘模糊. 于是人们针对PM模型进行了很多的改进. Catte等^[10]指出PM模型的病态处理问题是造成降噪不稳定的原因之一, 提出了一种以高斯函数作为扩散系数的模型, 该模型能够有效地克服噪声对扩散的干扰, 但是不能充分地提取图像中的边缘信息. 对于此问题, 许多文献提出了不同的局部检测方法^[11,12], 比如, 为了保护特征区域以及控制平滑速度, Chen等^[13]采用非一致性检测和局部空间梯度检测两种手段同时对间断点进行检测的策略. 2013年, 李金才等^[14]提出了一种基于图像熵的各向异性扩散滤波方法, 该方法使用图像熵作为

* 国家自然科学基金 (批准号: 11202106, 61302188)、教育部高等学校博士学科点专项科研基金 (批准号: 20123228120005)、江苏省“信息与通信工程”优势学科建设项目和江苏省自然科学基金 (批准号: BK20131005)、江苏省青蓝工程和江苏省高校自然科学研究项目 (批准号: 13KJB170016) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zhouxc2008@163.com

边缘检测算子, 避免了由于均值和方差等统计量的估计带来的误差, 提高了边缘检测能力. 2014年, 朱磊等^[15]提出了一种抑制合成孔径雷达图像乘性相干斑噪声的各向异性扩散滤波新方法, 该方法在有效保护图像边缘的同时, 能充分平滑同质区与边缘区域的相干斑, 明显削弱块状现象, 有效改善抑斑图像边缘抖动扭曲问题, 而抑斑图像无论视觉效果还是参数指标均比多种传统抑斑方法更具优势.

小波变换是一种时域和频域的局部变换, 这种变换具有良好的多尺度分析特点, 所以小波变换在信号的特征提取、数据压缩和奇异点检测等领域都获得了广泛的应用. Donoho^[16]提出的算法能够较好地估计噪声方差并去除图像中的噪声. 2011年, 刘金华和余堃^[17]等提出了一种基于双树复小波与波原子的图像扩散滤波算法, 该算法在对含噪图像滤波的同时, 较好地保持了图像的边缘和纹理等细节信息.

以上提到的各种去噪算法与模型都是针对去噪和保边缘纹理所做的一些改进, 但针对图像的角点、尖峰和窄边缘这方面都未考虑. 在对图像局部特征进行分析时, 发现仅靠梯度信息来决定扩散程度显然是不够的, 因为角点与线条边缘点的梯度模值差别不大, 这使得角点也按照边缘点的方式平滑, 使得图像细节被磨光, 不能保持尖峰与窄边缘等. 本文利用重调和方程的特殊性质, 建立重调和扩散模型, 该模型较经典的PM模型去噪效果更好. 考虑到如果图像中的噪声很强, 则会在处理后的图像上留下一些孤立的斑点, 并且图像的纹理是在较大范围上具有的统计特性, 而新模型只能保留局部细节, 图像大范围上的信息不能得到保持. 对上述模型做进一步改进, 采用小波变换提取图像的高频部分, 并在图像的高频部分运用应力平衡性构建新算子, 从局部上稳定的控制图像的细节信息, 建立波域重调和扩散模型. 实验结果表明, 新模型与经典的PM模型相比峰值信噪比提高了20 dB左右, 清晰度也大大提高, 去噪性能更好.

2 各向异性扩散模型

传统的基于偏微分方程各向异性滤波算法的扩散模型为

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t} = \text{div} [g(|\nabla I|) \cdot \nabla I], \\ I(x, y, 0) = I_0, \end{cases} \quad (1)$$

式中, $I(x, y, 0)$ 为原始图像; t 为时间扩散尺度; div , ∇ 分别为散度算子和梯度算子; $|\nabla I|$ 为梯度的幅值; $g(|\nabla I|)$ 是依赖于图像梯度的扩散系数, 它利用了图像的重要局部特征(梯度模值), 这就使得图像去噪和边缘检测联系起来. 而在传统的图像去噪过程中, 图像的滤波操作往往与图像的边缘检测毫无关系, 所以它的选择对扩散模型具有重要的作用. 一般来说, 在边缘检测中我们用梯度来区分边缘和非边缘, 因此采用 $g(|\nabla I|)$ 来定性地描述边缘区域和非边缘区域. Perona 和 Mailik 给出了两种经典的选择:

$$g_1(|\nabla I|) = \frac{1}{1 + (|\nabla I|/k)^2}, \quad (2)$$

$$g_2(|\nabla I|) = \exp \left[- \left(\frac{|\nabla I|}{k} \right)^2 \right], \quad (3)$$

其中, k 是梯度阈值, $g(|\nabla I|)$ 是一个单调减函数. $g(|\nabla I|) \in (0, 1)$ 具有如下的性质: 当 $|\nabla I| \rightarrow \infty$, 即在图像梯度幅值较大的边缘区, 则 $g(|\nabla I|) \approx 0$, 扩散程度较小或者不进行扩散, 从而来保护边缘等信息; 当在图像梯度幅值较小的平坦区域, 则 $g(|\nabla I|) \approx 1$, 扩散系数较大, 则可以有效地去除起伏噪声; 而当 $g(|\nabla I|) = 1$, 方程可以退化为各向同性热传导方程.

针对PM模型的不足, 许多学者对此做了改进. 1992年, Catte等^[10]提出了新的改进方案, 用更加平滑的 $G_\sigma * \nabla I$ 代替(1)式中的 ∇I :

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t} = \text{div} [g(|G_\sigma * \nabla I|) \cdot \nabla I], \\ I(x, y, 0) = I_0, \end{cases} \quad (4)$$

(4) 式中

$$G_\sigma(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2} \right)$$

是高斯核函数, σ 为尺度函数, 通常随着 t 的增加而减小. $G_\sigma * \nabla I = \nabla (G_\sigma * I) = \nabla G_\sigma * I$, $|\nabla G_\sigma * I|$ 表示尺度对边缘进行估计, 进而来决定扩散程度, 以避免在边缘处过度扩散. $g(\cdot)$ 满足条件与PM模型中的一致. (4) 式也称为正则化的PM模型, 该模型先对图像进行了平滑, 这样就能在一定程度上减弱大颗粒噪声的影响.

3 扩散模型的改进

在以上的PM模型和正则化的PM模型中, 都是仅靠梯度信息来决定扩散程度的, 这显然不够.

因为角点与线条边缘点的梯度模值差别不大, 这使得角点也按照边缘点的方式平滑, 使得图像细节被磨光, 不能保持尖峰状边缘与窄边缘等.

已知重调和方程为

$$\nabla^4 I = \frac{\partial^4 I}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 I}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 I}{\partial y^4}, \quad (5)$$

它描述了满足 Airy 应力函数在弹性介质中的应力分布的平衡问题. 图像处理过程中角点和尖峰容易被磨平, 可将重调和方程的应力分布平衡性与梯度算子相结合, 适当减弱平滑过程中扩散强度. 因图像的角点与尖峰处一阶偏导数为 0, 梯度的模值为 0, 因此扩散程度达到了最大, 角点与尖峰会被滤除, 而考虑到重调和方程是由四阶偏导数构成, 四阶偏导数往往具体有局部极大值, 梯度与调和方程相结合可以起到调和扩散强度的作用, 使角点与尖峰处扩散强度不再为最大值, 从而使角点与尖峰可以得到保护. 在这里将梯度与调和方程相结合的算子称为调和算子, 记作

$$|\nabla I| + \nabla^4 I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2} + \frac{\partial^4 I}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 I}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 I}{\partial y^4},$$

则建立的新模型如下,

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t} = \text{div}[g(|\nabla(G_\sigma * I)| + \nabla^4(G_\sigma * I))\nabla I], \\ I(x, y, 0) = I_0, \end{cases} \quad (6)$$

称新模型为重调和扩散模型. (6) 式中, $I(x, y, 0)$ 为原始图像; t 为时间扩散尺度; div , ∇ 分别为散度算子和梯度算子;

$$G_\sigma(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$$

是高斯核函数; σ 为尺度函数, 通常随着 t 的增加而减小; $g(\cdot)$ 满足条件与 PM 模型中的一致. 通常情况下, $g(x) = e^{-(x/k)^2}$, 但因为 $g(\cdot)$ 与时间有关, 故 $g(\cdot)$ 函数进行以下改进:

$$g(x, t) = e^{-(\frac{x}{k(t)})^2}, \quad (7)$$

式中, $k(t) = 1/(\varepsilon + \alpha t)$, ε , α 分别为常数. 这里用迭代次数代替时间, 即 $t = n$, 取 $\varepsilon = 1$, $\alpha = 1/(\max\{W, H\})$, $\max\{W, H\}$ 为图像像素的最大值, W, H 为图像像素.

现定性地对上述模型 (6) 进行分析. 假设边缘平行于 y 方向, 且 $I_x > 0$, 忽略 y 方向的影响和卷积

在下面分析过程中, 不做考虑, 则可把 (6) 式简化为

$$\begin{aligned} I_t &= \frac{\partial}{\partial t} [g(u) I_x] \\ &= g'(u) I_x \left(I_x I_{xx} + \frac{\partial^5 I}{\partial x^5} + \frac{\partial^5 I}{\partial x^3 \partial y^2} \right) \\ &\quad + g(u) I_{xxx}, \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $u = I_x + \frac{\partial^4 I}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 I}{\partial x^2 \partial y^2}$, 则

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (I_x) &= \frac{\partial}{\partial x} (I_t) \\ &= g''(u) I_x \left(I_x I_{xx} + \frac{\partial^5 I}{\partial x^5} + \frac{\partial^5 I}{\partial x^3 \partial y^2} \right)^2 \\ &\quad + g'(u) I_{xx} \left(I_x I_{xx} + \frac{\partial^5 I}{\partial x^5} + \frac{\partial^5 I}{\partial x^3 \partial y^2} \right) \\ &\quad + g'(u) I_x \left(I_{xx}^2 + I_x I_{xxx} + \frac{\partial^6 I}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 I}{\partial x^4 \partial y^2} \right) \\ &\quad + g'(u) I_{xx} \left(I_x I_{xx} + \frac{\partial^5 I}{\partial x^5} + \frac{\partial^5 I}{\partial x^3 \partial y^2} \right) \\ &\quad + g(u) I_{xxxx} \\ &= g''(u) I_x \left(I_x I_{xx} + \frac{\partial^5 I}{\partial x^5} + \frac{\partial^5 I}{\partial x^3 \partial y^2} \right)^2 \\ &\quad + 2g'(u) I_{xx} \left(I_x I_{xx} + \frac{\partial^5 I}{\partial x^5} + \frac{\partial^5 I}{\partial x^3 \partial y^2} \right) \\ &\quad + g(u) I_{xxxx} + g'(u) I_x \\ &\quad \times \left(I_{xx}^2 + I_x I_{xxx} + \frac{\partial^6 I}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 I}{\partial x^4 \partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

当在拐点时, 由 Marr 意义下的边缘位置可知,

$$I_{xx} = 0, \quad \frac{\partial^4 I}{\partial x^4} = 0, \quad \frac{\partial^6 I}{\partial x^6} = 0, \quad \frac{\partial^4 I}{\partial x^2 \partial y^2} = 0,$$

则

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (I_x) &= g''(u) I_x \left(\frac{\partial^5 I}{\partial x^5} + \frac{\partial^5 I}{\partial x^3 \partial y^2} \right)^2 + g(u) I_{xxx} \\ &\quad + g'(u) I_x \left(I_x I_{xxx} + \frac{\partial^6 I}{\partial x^4 \partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

此时 $g(u) = e^{-(I_x/k)^2}$, 故 $g'(u) = 0$, $g''(u) = -\frac{2}{k} I_x I_{xxx} e^{-(I_x/k)^2}$, 代入 (10) 式得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (I_x) &= -\frac{2}{k} I_x I_{xxx} e^{-(I_x/k)^2} I_x \left(\frac{\partial^5 I}{\partial x^5} + \frac{\partial^5 I}{\partial x^3 \partial y^2} \right)^2 \\ &\quad + e^{-(I_x/k)^2} I_{xxx} \\ &= e^{-(I_x/k)^2} I_{xxx} \left[1 - \frac{2}{k} I_x^2 \left(\frac{\partial^5 I}{\partial x^5} + \frac{\partial^5 I}{\partial x^3 \partial y^2} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

对于较平滑的信号来说,

$$\left| \frac{\partial^5 I}{\partial x^5} \right| < \left| \frac{\partial^5 I}{\partial x^3 \partial y^2} \right| < |I_{xxx}| \ll |I_x|$$

且在拐点处 $I_{xxx} < 0$, 因此 I_x 的变化趋势主要还是 I_x 本身大小决定的, 且

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(I_x) &\approx e^{-(I_x/k)^2} I_{xxx} \left(1 - \frac{2}{k} I_x^2 \right) \\ &= e^{-(I_x/k)^2} I_{xxx} \left(\frac{k - 2I_x^2}{k} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

由(12)式可以看出, 当 I_x 大于阈值 $\sqrt{k/2}$ 时, $\frac{\partial}{\partial t}(I_x) > 0$; 反之, 当 I_x 小于阈值 $\sqrt{k/2}$ 时, 有 $\frac{\partial}{\partial t}(I_x) < 0$.

现对 PM 模型做以上同样分析, 其对应的简化形式为

$$\frac{\partial}{\partial t}(I_x) = e^{-(I_x/k)^2} I_{xxx} \left(1 - \frac{2}{k} I_x^2 \right). \quad (13)$$

比较(11)式与(13)式, 由于对较平滑的信号来说, 在拐点处

$$-1 \ll \left| \frac{\partial^5 I}{\partial x^5} \right| < \left| \frac{\partial^5 I}{\partial x^3 \partial y^2} \right| < |I_{xxx}| \ll 0,$$

则

$$-1 < \frac{\partial^5 I}{\partial x^5} + \frac{\partial^5 I}{\partial x^3 \partial y^2} < 0,$$

故(11)式比(13)式大. 因此, 当 I_x 小于阈值 $\sqrt{k/2}$ 时, $\frac{\partial}{\partial t}(I_x)$ 大于 0, 新模型(11)式中新算子将使 I_x 衰减得更快; 而当 I_x 大于阈值 $\sqrt{k/2}$ 时, $\frac{\partial}{\partial t}(I_x)$ 小于 0, 新模型(11)式中新算子将使 I_x 增强得更慢一些, 这样角点与尖峰的宽度就不会明显增大, 而且 I_x 越大, 角点与尖峰的宽度增大得就越少.

当在尖峰处时, $I_x = 0$, 由(8)式得

$$\begin{aligned} I_t &= g(u) I_{xx} \\ &= \exp \left\{ - \left[\frac{1}{k} \left(\frac{\partial^4 I}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 I}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \right]^2 \right\} I_{xx}. \end{aligned} \quad (14)$$

在(14)式中, 因为 $I_{xx} \gg 0$, 则抑制了灰度值的减小.

综上, 我们可以得出结论: 在平坦区域, 新算子会比梯度算子较快地平滑噪声, 而在强边缘处, 新算子虽有一定的平滑作用, 但更倾向于保留原来的边缘, 角点、尖峰和窄边缘等都能得到较好的保持. 因此, 处理后的图像不但看上去更清晰, 而且更具真实感.

以上新建立的重调和扩散模型对角点、尖峰和窄边缘等有保留的倾向, 而高斯噪声往往是颗粒状

的, 如果图像中的高斯噪声很强, 则会在处理后的图像上留下一些孤立的斑点, 而且图像的纹理是在较大范围上具有的统计特性, 而新模型只能保留局部细节, 图像大范围上的信息不能得到很好的保持.

由于噪声和图像的细节特征主要集中于图像高频部分, 故在这里采用小波变换提取图像的高频部分, 并在图像的高频部分运用 Airy 应力平衡性构建新算子, 从局部上较稳定地控制图像的细节信息. 故进一步建立波域重调和扩散模型为

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t} = \text{div} \left[g \left(|\nabla (G_\sigma * I)| + \nabla^4 \tilde{I} \right) \cdot \nabla I \right], \\ I(x, y, 0) = I_0, \end{cases} \quad (15)$$

式中, $I(x, y, 0)$ 为原始图像; t 为时间扩散尺度; div , ∇ 分别为散度算子和梯度算子; $\nabla^4 \tilde{I}$ 是图像高频部分的算子; $\tilde{I}$ 是图像的高频部分;

$$G_\sigma(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2} \right)$$

是高斯核函数; σ 为尺度函数, 通常随着 t 的增加而减小; $g(\cdot)$ 取(7)式.

由于在图像角点与尖峰处的梯度模值为 0, 因而该区域的扩散系数趋近于 1, 而扩散系数越大, 扩散力度越强, 角点与尖峰会被滤除掉, 其宽度也会相应地变细. 为了克服角点、尖峰处扩散系数达到极大值时角点与尖峰被削平的弊端, 本模型用小波变换提取图像的高频部分, 在该部分运用 Airy 应力平衡构建调和算子, 局部上稳定地控制图像的角点与尖峰等细节信息, 这样局部作用力可以分担全局梯度的作用力, 可以起到调和扩散强度的作用, 使角点与尖峰处扩散强度不再为最大值, 从而能够在去除噪声的同时, 削弱扩散力度, 使角点与尖峰得到保护.

4 实验结果与分析

为验证模型的合理性与有效性, 这里用半隐式加性算子分裂(additive operator splitting, AOS)^[18] 数值算法进行仿真, 仿真软件 Matlab, 比较它们的均方差(mean squared error, MSE)、峰值信噪比(PSNR)和清晰度(Definition), 评价算法的有效性.

$$\text{MSE} = \frac{1}{W \times H} \sum_{i=1}^W \sum_{j=1}^H [I(i, j) - I_0(i, j)]^2, \quad (16)$$

$$\text{PSNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{255^2}{\text{MSE}} \right), \quad (17)$$

Definition

$$= \frac{1}{W \times H} \sum_{i=1}^W \sum_{j=1}^H \left\{ [I(i, j) - I(i-1, j)]^2 + [I(i, j) - I(i, j-1)]^2 \right\}^{1/2}. \quad (18)$$

图像的分辨率为 $W \times H$, I 和 I_0 表示去噪后的图像和初始图像, $I(i, j) - I(i-1, j)$ 与 $I(i, j) - I(i, j-1)$ 分别为 I 沿 x 和 y 方向的差分, MSE 越小越好, PSNR 越大越好, Definition 反映图像的细节反差和纹理特征, 其值越大越好.

4.1 实验1

分别对自然图像 Lena(600×600) 和真实的图 Nuist(600×600) 加方差为 20 的高斯随机噪声进行实验, 并与代表性的正则化 PM 模型进行比较. 用于实验的原始图如图 1 所示, 分别是图像 Lena 和图像 Nuist.



图1 用于数值实验的原始图像 (a) Lena 图像; (b) Nuist 图像

首先对 Lena 图像分别使用 PM 模型、重调和扩散模型和波域重调和扩散模型进行平滑. 其中, 时间步长 (Δt) 都为 5, 迭代次数都为 7, PM 模型的扩散系数取 (3) 式, 阈值取 10, 波域重调和模型中用小波 sym4 提取图像的高频部分. 平滑结果如图 2(b)–(d) 所示, 评价指标如表 1 所示, 图 3 是 Lena 图像局部放大效果. 为了更好地显示滤波前后图像边缘纹理等细节信息情况, 采用 Canny 算子 [19] 对各种模型滤波结果进行边缘检测, 结果如图 4 所示.



图2 Lena 图像使用不同模型的平滑结果 (a) 加噪图像; (b) PM 模型; (c) 重调和扩散模型; (d) 波域重调和扩散模型



图3 Lena 图像使用不同模型平滑后局部放大图像 (a) 加噪图像; (b) PM 模型; (c) 重调和扩散模型; (d) 波域重调和扩散模型

表1 Lena 图像使用不同去噪模型的 MSE, PSNR 和 Definition 比较

	加噪图像	PM 模型	重调和扩散模型	波域重调和扩散模型
MSE	397.5514	7.0237	0.4940	0.0582
PSNR	22.1369	39.6651	51.1931	60.4820
Definition	2.0256	84.3602	94.5107	95.1200

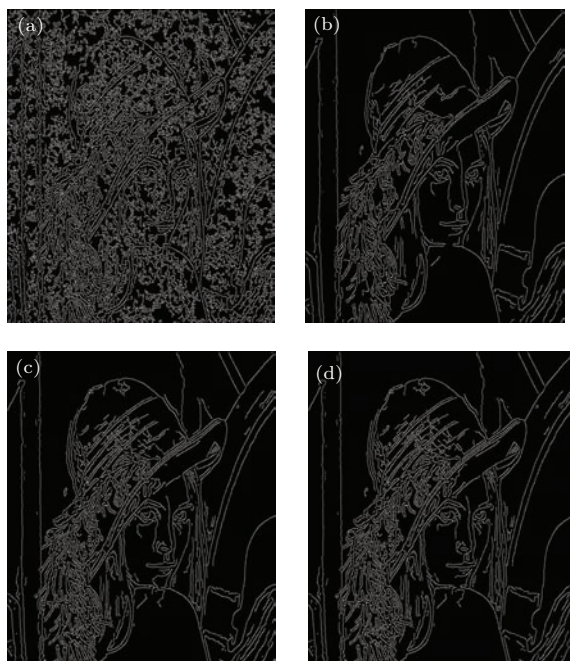


图4 Lena 图像使用不同模型平滑后的边缘提取图像 (a) 加噪图像; (b) PM 模型; (c) 调和扩散模型; (d) 波域调和扩散模型

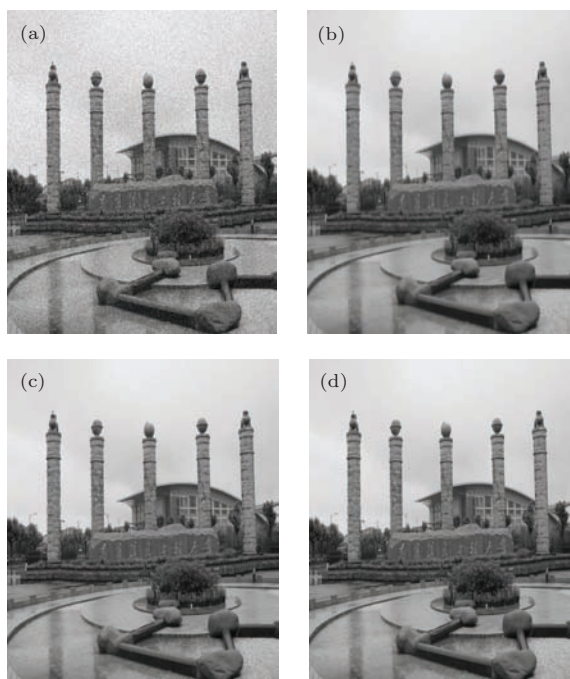


图5 Nuist 图像使用不同模型的平滑结果 (a) 加噪图像; (b) PM 模型; (c) 重调和扩散模型; (d) 波域重调和扩散模型

对 Nuist 图像进行 3 种模型的滤波实验. 实验图像为南京信息工程大学校门. 参数设置与 Lena 图像的参数设置相同. 滤波结果如图 5 所示, 评价指标如表 2 所示. 为了更好地显示滤波结果, 对图像进行局部放大, 如图 6 所示. 图 7 是采用

Canny 算子对各种模型滤波结果进行边缘检测的结果.

从图 2 及图 5(b) 的整体可视效果和图 3 及图 6(b) 的局部放大可视效果来看, PM 模型具有一定的平滑效果, 但是图像较模糊; 从图 4 及图 7(b) 可以更清楚地看到角点、尖峰、窄边缘和纹理等细节信息被平滑掉了, 这是因为 PM 模型是用梯度作为边缘检测算子来进行边缘检测的, 容易受到噪声的影响, 并且一些角点、尖峰与窄边缘点的梯度模值差别不大, 这使得角点、尖峰和窄边缘也按照边缘点的方式平滑, 所以使得图像细节被磨光. 调和扩散模型用重调和方程的 Airy 应力平衡性和梯度算子相结合来减弱在图像角点、尖峰和窄边缘处的扩散强度, 由图 2 及图 5(c) 和图 3 及图 6(c) 可明显看出其噪声抑制效果要优于 PM 模型, 图 4 和图 7(c) 的边缘纹理等细节信息都保持得非常好. 但该模型仍然会受到强噪声的影响, 留下一些噪声点, 比如图 4(c) 的 Lena 脸部的眼睛周围及图 7(c) 的地面遗留了一部分噪声. 从图 2 和图 5(d) 可以看出波域调和扩散模型的可视性最好, 主要由于该模型采用小波变换提取图像的高频部分, 在高频部分构建新算子, 从局部上稳定地控制图像信息. 从表 1 和表 2 的评价指标可以看出, 波域调和扩散模型的效果最好, 与滤波结果的可视性相一致.



图6 Nuist 图像使用不同模型平滑后局部放大图像 (a) 加噪图像; (b) PM 模型; (c) 重调和扩散模型; (d) 波域重调和扩散模型

表2 Nuist 图像使用不同去噪模型 MSE, PSNR 和 Definition 比较

	加噪图像	PM 模型	调和扩散模型	波域重调和扩散模型
MSE	385.9161	33.0947	1.6953	0.1186
PSNR	22.2659	32.9332	45.8384	57.388
Definition	2.1853	79.8676	106.5600	108.4100

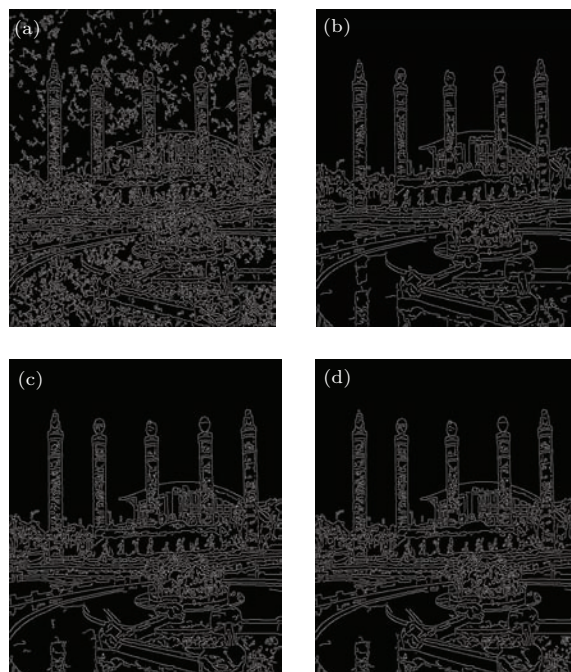


图7 Nuist 图像使用不同模型平滑后的边缘提取图像 (a) 加噪图像; (b)PM 模型; (c) 重调和扩散模型; (d) 波域重调和扩散模型

4.2 实验2

为了说明新模型对强噪声抑制的同时, 还能够较好地保护图像的角点和尖峰等细节信息, 选取带有很多角点和尖峰的仙人球(XRQ)图像如图8所示, 对加方差为50的高斯噪声进行实验, 如图9所示.

观察图9中的各幅图像, 可以清楚地看到PM模型平滑后图像XRQ的尖峰已经明显模糊, 而本文中新模型平滑后图像XRQ的尖峰被很好地保留了下来. 另外, 由表3可以看出, 波域重调和扩散模型的峰值信噪比与调和扩散模型相比提高了10 dB左右, 这是由于波域重调和扩散模型, 是在小波域内从局部上用调和算子控制图像的细节信息, 使该

模型能够在去除强噪声的同时, 保护图像的尖峰和角点等细节信息, 图像更加清晰, 更具真实感.

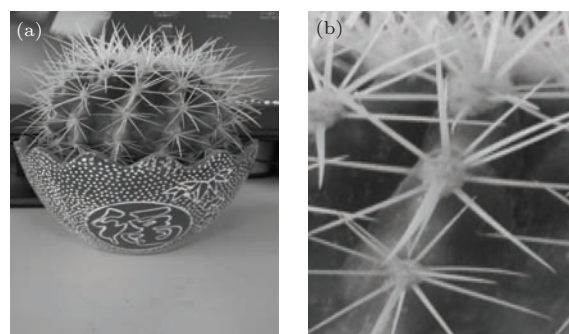


图8 用于实验的原始图像 (a) XRQ 图像; (b) 尖峰放大图像

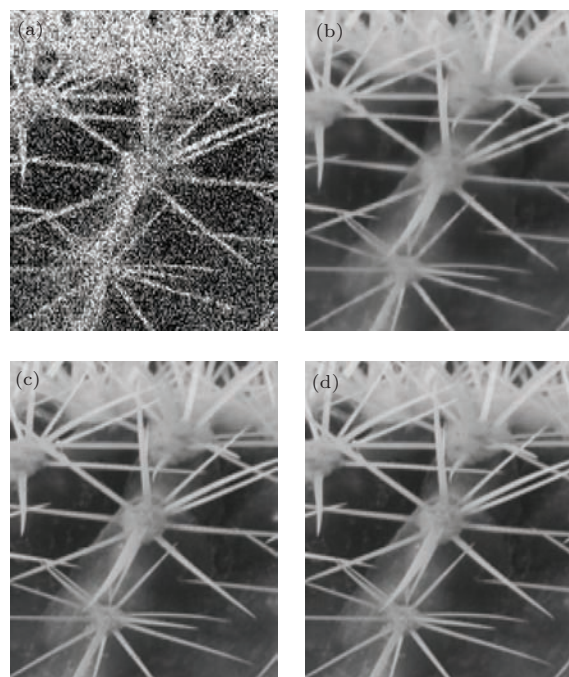


图9 XRQ 图像使用不同模型平滑后的图像 (a) 加噪图像; (b)PM 模型; (c) 重调和扩散模型; (d) 波域重调和扩散模型

表3 XRQ 图像使用不同去噪模型 MSE, PSNR 和 Definition 比较

	加噪图像	PM 模型	调和扩散模型	波域重调和扩散模型
MSE	2285.6000	26.0977	1.5434	0.0841
PSNR	14.5407	33.9648	46.2460	58.8816
Definition	0.049757	127.0500	152.7400	154.2800

不同的噪声强度能反映各模型对噪声的抑制效果和图像角点和尖峰等细节信息的保持状况. 对XRQ图像添加不同强度的噪声, 实验结果如图10所示.

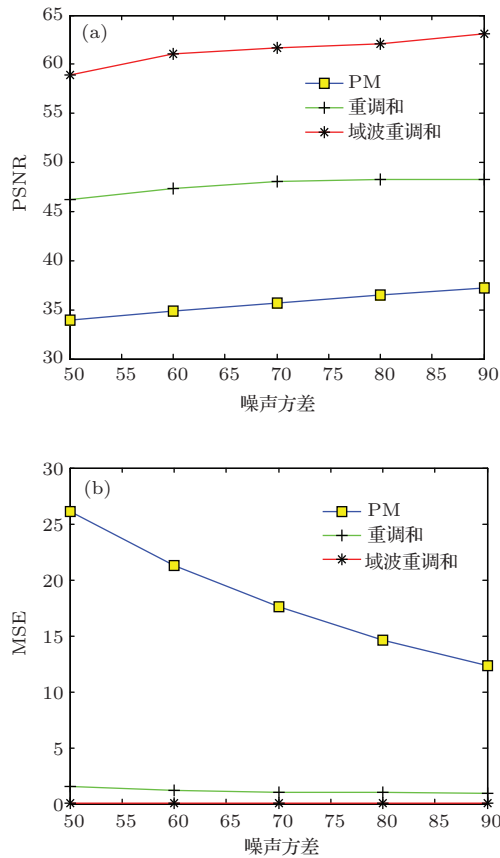


图10 (网刊彩色) XRQ图像中各模型不同方差的PSNR和MSE仿真图 (a)不同方差的PSNR; (b)不同方差的MSE

通过图10可以看出, 新模型在所有模型中有最高的峰值信噪比和最低的均方差, 再次证实了新模型的去噪性能.

5 结 论

本文考虑到重调和方程的应力平衡性及其高阶偏导数的局部极大值, 构建新算子, 建立重调和扩散模型, 该模型能更好地保留图像的角点、尖峰和窄边缘, 但如果图像中的噪声很强, 则会在处理后的图像上留下一些孤立的斑点, 并且图像的纹理是在较大范围上具有统计特性, 而新模型只能保留局部细节, 图像大范围上的信息没有得到很好保持. 对上述模型做进一步改进, 采用小波变换提取图像的高频部分, 并在图像的高频部分运用应力平衡性构建新算子, 从局部上较稳定地控制图像的细

节信息, 建立波域重调和扩散模型. 该模型不但能有效地抑制噪声, 而且能够稳定地保护图像的角点、尖峰、和边缘纹理等细节信息, 去噪后的图像信噪比较重调和扩散模型提高了10 dB左右, 较PM模型提高了20 dB左右, 清晰度也大幅度提升. 实验结果表明, 两种新模型去噪性能比PM模型都要好, 其中, 波域重调和扩散模型性能最具优越性.

参考文献

- [1] Gonzalez R C, Woods R E (Translated by Ruan Q Q, Ruan Y Z) 2010 *Digital Image Processing* (3rd Ed.) (Beijing: Publishing House of Electronics Industry) pp197–213 (in Chinese) [冈萨雷斯R C, 伍兹R E 著 (阮秋琦, 阮宇智译) 2010 (第三版) 数字图像处理 (北京: 电子工业出版社) 第197—213页]
- [2] Li Z B, Liu Z Z, Shi W Z 2014 *IEEE Geosci. Remote Sens.* **11** 743
- [3] Bumsu H, Dongbo M, Kwanghoon S 2013 *IEEE Trans. Image Process.* **22** 1096
- [4] Anastasia S, Petros M 2008 *IEEE Trans. Image Process.* **17** 364
- [5] Wang Z, Huang X, Li Y X, Song X N 2013 *Chin. Phys. B* **22** 010504
- [6] Wang Z, Huang X, Li Y X, Song X N 2012 *Chin. Phys. B* **21** 050506
- [7] Nadernejad E, Nikpour M 2012 *Digit. Signal Process.* **22** 913
- [8] Ludusan C, Lavialle O 2012 *Pattern Recogn. Lett.* **33** 1388
- [9] Perona P, Malik J 1990 *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* **12** 629
- [10] Catte F, Lions P L, Morel J M 1992 *SIMA J. Math. Anal.* **29** 182
- [11] Zhu L X, Wang P A, Xia D S 2006 *J. CAD & CG* **18** 1519 (in Chinese) [朱立新, 王平安, 夏德深 2006 计算机辅助设计与图形学报 **18** 1519]
- [12] Xie M H, Yu Z M 2006 *Acta Electron. Sin.* **34** 59 (in Chinese) [谢美华, 于正明 2006 电子学报 **34** 59]
- [13] Chen K 2005 *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* **27** 552
- [14] Li J C, Ma Z H, Peng Y X, Huang B 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 099501 (in Chinese) [李金才, 马自辉, 彭宇行, 黄斌 2013 物理学报 **62** 099501]
- [15] Zhu L, Han T Q, Shui P L, Wei J H, Gu M H 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 179502 (in Chinese) [朱磊, 韩天琪, 水鹏朗, 卫建华, 顾梅花 2014 物理学报 **63** 179502]
- [16] Donoho D L 1995 *IEEE Trans. Inform. Theory* **41** 613
- [17] Liu J H, She K 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 124203 (in Chinese) [刘金华, 余莹 2011 物理学报 **60** 124203]
- [18] Weickert J, Bary H R, Max A V 1998 *IEEE Trans. Image Process.* **7** 398
- [19] Canny J 1986 *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* **PAMI-8** 679

Diffusion denoising model based on the wavelet and biharmonic equation^{*}

Zhou Xian-Chun^{1)2)3)†} Wang Mei-Ling¹⁾²⁾³⁾ Shi Lan-Fang⁴⁾ Zhou Lin-Feng¹⁾²⁾³⁾

1) (*College of Electronic and Information Engineering, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China*)

2) (*Jiangsu Collaborative Innovation Center of Atmospheric Environment and Equipment Technology, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China*)

3) (*Jiangsu Key Laboratory of Meteorological Observation and Information Processing, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China*)

4) (*College of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China*)

(Received 6 September 2014; revised manuscript received 15 October 2014)

Abstract

In image processing, in order to well preserve corners, peaks, and thin edges of the image, a new biharmonic diffusion model is established, which takes into account the stress balance of the biharmonic equation and local maximum values of higher-order partial derivatives. If the noise is very strong in the image, some isolated spots will leave on the processed image, and texture of the image has statistical properties in a large range, and the new model retains only local details, the information of image in a wide range is not kept well. Further improvement on the above model is made by using the wavelet transform to extract the high frequency part of the image, and by processing this part with stress balance to establish wave field biharmonic diffusion model, which stably controls the image details locally. Analysis and simulation results show that this model retains more image information than the Perona-Mailik model, effectively well preserves the edges, corners, peaks of the image, and also maintains thin edges of the image. So it is an ideal model.

Keywords: biharmonic equation, wavelet transform, diffusion denoising, image denoising

PACS: 42.30.Wb, 02.30.Jr

DOI: 10.7498/aps.64.064203

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11202106, 61302188), the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education, China (Grant No. 20123228120005), the Jiangsu Information and Communication Engineering Preponderant Discipline Platform, China, the Natural Science Foundation of Jiangsu Province, China (Grant No. BK20131005), and the Jiang Su Qing Lan project and the Natural Sciences Fundation from the Universities of Jiangsu Province of China (Grant No. 13KJB170016).

[†] Corresponding author. E-mail: zhouxc2008@163.com