物理学报 Acta Physica Sinica

Chinese Physical Society

Institute of Physics, CAS

增加附加项后广义 Hamilton 系统的形式不变性与 Mei 守恒量

孙现亭　张耀宇　薛喜昌　贾利群

Form invariance and Mei conserved quantity for generalized Hamilton systems after adding additional terms

Sun Xian-Ting　Zhang Yao-Yu　Xue Xi-Chang　Jia Li-Qun

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 64, 064502 (2015)　DOI: 10.7498/aps.64.064502
在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.064502
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I6

---

# 增加附加项后广义Hamilton系统的形式不变性与Mei守恒量*

孙现亭[1)] 张耀宇[1)] 薛喜昌[1)] 贾利群[2)†]

1) (平顶山学院电气信息工程学院, 平顶山 467002)

2) (江南大学理学院, 无锡 214122)

( 2014 年 9 月 14 日收到; 2014 年 10 月 16 日收到修改稿 )

研究增加附加项后广义Hamilton系统的形式不变性及其导出的Mei守恒量. 引进无限小变换群及其生成元向量, 给出增加附加项后广义Hamilton系统的形式不变性的定义和判据, 利用规范函数满足的结构方程, 导出与该系统形式不变性相应的Mei守恒量的表达式. 最后, 给出一个算例, 用于说明结果的应用.

**关键词**: 附加项, 广义Hamilton系统, 形式不变性, Mei守恒量

**PACS:** 45.20.Jj, 45.30.+S, 02.20.Sv **DOI:** 10.7498/aps.64.064502

## 1 引 言

在自然科学中, 对称性和守恒量是粒子物理学、数学和分析力学的一个重要研究课题. 通过对称性寻求守恒量, 可使人们避免复杂的计算, 直接求得降阶的微分方程; 对于Hamilton系统和广义Hamilton系统的微分方程, 通过对称性导致的守恒量, 可相对容易地直接求得结果. 约束力学系统中的对称性主要有Noether对称性[1,2], Lie对称性[3−6]和形式不变性[7−9], 相应的守恒量有Noether守恒量, Hojman守恒量和Mei守恒量. 近年来, 共形不变性与守恒量的研究也取得了一些进展[10−14].

用正则的Hamilton方程来描述力学系统, 具有结构简单、形式对称的优点. 但是, Hamilton力学系统理论仅适用于偶数维相空间. 为使Hamilton系统在奇数维相空间上也能应用, 前人采用非正则变量代替正则变量的方法, 将Hamilton系统发展为广义Hamilton系统. 这样, 广义Hamilton系统便可在奇数维相空间中得到应用. 自20世纪50年代迄今, 广义Hamilton系统的研究取得了一些成果[15−19]. 但是, 刚体在外力矩作用下的定点转动等问题, 还难以用广义Hamilton系统理论解决. 其运动微分方程要在Euler情形的广义Hamilton方程中增加一个附加项, 称为增加附加项后的广义Hamilton系统. 文献[15]研究了带附加项的广义Hamilton系统Mei对称性与Lie对称性的关系. 本文研究增加附加项后, 广义Hamilton系统形式不变性的结构方程及Mei守恒量的表达式.

## 2 增加附加项后广义Hamilton系统的运动微分方程

在广义Hamilton系统的微分方程右端增加一个附加项 $N_i = N_i(t, \boldsymbol{x})$ 后, 广义Hamilton系统的运动微分方程可表示为

$$\dot{x}_i = J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j} + N_i \quad (i, j = 1, \cdots, m), \tag{1}$$

其中 $H = H(t, \boldsymbol{x})$ 为Hamilton函数, $m$ 是广义Hamilton系统方程的维数, $J_{ij} = J_{ij}(t, \boldsymbol{x})$ 满足如

* 国家自然科学基金 (批准号: 11142014) 资助的课题

† 通信作者. E-mail: jlq0000@163.com

 

下方程

$$J_{ij}=-J_{ji},$$
$$J_{il}\frac{\partial J_{jk}}{\partial x_l}+J_{jl}\frac{\partial J_{ki}}{\partial x_l}+J_{kl}\frac{\partial J_{ij}}{\partial x_l}=0,$$
$$(i,j,l=1,\cdots,m). \tag{2}$$

## 3 增加附加项后广义Hamilton系统形式不变性的定义和判据

引进无限小变换的展开式

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{x}),$$
$$x_i^*(t^*)=x_i(t)+\varepsilon\xi_i(t,\boldsymbol{x}), \tag{3}$$

(3) 式中, $\varepsilon$ 为无限小参数, $\xi_0$, $\xi_i$ 为无限小变换生成元.

引进无限小生成元向量

$$\boldsymbol{X}^{(0)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_i\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{4}$$

在无限小变换 (3) 下, 系统动力学函数 $H$ 和 $N_i$ 将变成为 $H^*(t^*,\boldsymbol{x}^*)$ 和 $N_i^*(t^*,\boldsymbol{x}^*)$, 即

$$H^*=H+\varepsilon\boldsymbol{X}^{(0)}(H)+O(\varepsilon^2), \tag{5}$$
$$N_i^*=N_i+\varepsilon\boldsymbol{X}^{(0)}(N_i)+O(\varepsilon^2). \tag{6}$$

**定义** 如果用经无限小变换 (3) 下的动力学函数 $H^*$ 和 $N_i^*$ 代替原来变换前的动力学函数 $H$ 和 $N_i$, 广义Hamilton系统运动微分方程 (1) 的形式保持不变, 即

$$\dot{x}_i=J_{ij}\frac{\partial H^*}{\partial x_j}+N_i^*, \tag{7}$$

则称这种不变性为增加附加项后的广义Hamilton系统方程 (1) 的形式不变性.

**判据** 将 (5) 和 (6) 式代入方程 (7), 忽略 $\varepsilon^2$ 以上的高阶小量, 利用方程 (1) 可得增加附加项后广义Hamilton系统 (1) 的形式不变性的判据方程:

$$\left\{J_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\boldsymbol{X}^{(0)}(H)\right]+\boldsymbol{X}^{(0)}(N_i)\right\}\bigg|_{\dot{x}_i=J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j}+N_i}=0. \tag{8}$$

## 4 增加附加项后广义Hamilton系统的形式不变性导致的Mei守恒量

**命题** 如果无限小生成元 $\xi_0$, $\xi_i$ 满足形式不变性判据方程 (8), 且规范函数 $G$ 满足如下结构方程

$$\boldsymbol{X}^{(0)}(x_i)\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_i}{\mathrm{d}t}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{X}^{(0)}(x_i)]\xi_i+\frac{\partial H}{\partial x_i}\xi_0\boldsymbol{X}^{(0)}(N_i)-\frac{\partial \boldsymbol{X}^{(0)}(H)}{\partial x_i}\xi_0 N_i-\boldsymbol{X}^{(0)}(H)\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial \boldsymbol{X}^{(0)}(H)}{\partial t}\xi_0+\frac{\bar{\mathrm{d}}G}{\mathrm{d}t}=0, \tag{9}$$

则增加附加项后广义Hamilton系统的形式不变性可导致如下Mei守恒量:

$$I=\boldsymbol{X}^{(0)}(x_i)\xi_i-\boldsymbol{X}^{(0)}(H)\xi_0+G=\text{const}. \tag{10}$$

**证明** 将 (10) 式对时间 $t$ 求导, 并注意到方程 (9) 可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\bar{\mathrm{d}}I}{\mathrm{d}t}\\
&=\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{X}^{(0)}(x_i)]\xi_i+\boldsymbol{X}^{(0)}(x_i)\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_i}{\mathrm{d}t}\\
&\quad-\frac{\partial \boldsymbol{X}^{(0)}(H)}{\partial t}\xi_0-\frac{\partial \boldsymbol{X}^{(0)}(H)}{\partial x_i}\dot{x}_i\xi_0\\
&\quad-\boldsymbol{X}^{(0)}(H)\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t}-\boldsymbol{X}^{(0)}(x_i)\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_i}{\mathrm{d}t}\\
&\quad-\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{X}^{(0)}(x_i)]\xi_i-\frac{\partial H}{\partial x_i}\xi_0\boldsymbol{X}^{(0)}(N_i)\\
&\quad+\frac{\partial \boldsymbol{X}^{(0)}(H)}{\partial x_i}\xi_0 N_i+\boldsymbol{X}^{(0)}(H)\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t}\\
&\quad+\frac{\partial \boldsymbol{X}^{(0)}(H)}{\partial t}\xi_0\\
&=-\frac{\partial \boldsymbol{X}^{(0)}(H)}{\partial x_i}\dot{x}_i\xi_0-\frac{\partial H}{\partial x_i}\xi_0\boldsymbol{X}^{(0)}(N_i)\\
&\quad+\frac{\partial \boldsymbol{X}^{(0)}(H)}{\partial x_i}\xi_0 N_i\\
&=-\frac{\partial \boldsymbol{X}^{(0)}(H)}{\partial x_i}\left(J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j}+N_i\right)\xi_0\\
&\quad-\frac{\partial H}{\partial x_i}\xi_0\boldsymbol{X}^{(0)}(N_i)+\frac{\partial \boldsymbol{X}^{(0)}(H)}{\partial x_i}\xi_0 N_i\\
&=-\left[J_{ij}\frac{\partial \boldsymbol{X}^{(0)}(H)}{\partial x_j}+\boldsymbol{X}^{(0)}(N_i)\right]\frac{\partial H}{\partial x_i}\xi_0.
\end{aligned} \tag{11}$$

注意到形式不变性的判据方程 (8), 则有

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}I}{\mathrm{d}t}=0. \tag{12}$$

## 5 算 例

设增加附加项后的广义Hamilton系统为

$$H=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2), \tag{13}$$

$$(J_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2x_2 \\ -1 & 0 & 2x_1 \\ -2x_2 & -2x_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$N_1 = -2x_2, \ N_2 = 2x_1, \ N_3 = 4x_1x_2. \tag{15}$$

试研究增加附加项后的广义Hamilton系统的形式不变性及其导致的Mei守恒量.

将(13), (14)和(15)式代入方程(1), 可得系统的微分方程

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1, \\ \dot{x}_3 &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

做计算, 有

$$\boldsymbol{X}^{(0)}(H) = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2, \tag{17}$$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{X}^{(0)}(N_1) = -2\xi_2, \\ &\boldsymbol{X}^{(0)}(N_2) = 2\xi_1, \\ &\boldsymbol{X}^{(0)}(N_3) = 4(\xi_1 x_2 + \xi_2 x_1), \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} &J_{1j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\boldsymbol{X}^{(0)}(H)\right] + \boldsymbol{X}^{(0)}(N_1) \\ &= x_1\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + x_2\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + 2x_2\left(x_1\frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} + x_2\frac{\partial \xi_2}{\partial x_3}\right) \\ &\quad - \xi_2, \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} &J_{2j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\boldsymbol{X}^{(0)}(H)\right] + \boldsymbol{X}^{(0)}(N_2) \\ &= \xi_1 - x_1\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \\ &\quad + 2x_1\left(x_1\frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} + x_2\frac{\partial \xi_2}{\partial x_3}\right), \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} &J_{3j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\boldsymbol{X}^{(0)}(H)\right] + \boldsymbol{X}^{(0)}(N_3) \\ &= -2x_2\left(x_1\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \xi_1 + x_2\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}\right) \\ &\quad - 2x_1\left(x_1\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + \xi_2 + x_2\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}\right) \\ &\quad + 4(\xi_1 x_2 + \xi_2 x_1). \end{aligned} \tag{21}$$

取无限小变换生成元

$$\xi_0 = 1, \ \xi_1 = x_1, \ \xi_2 = x_2, \ \xi_3 = x_3, \tag{22}$$

则(19), (20)和(21)式分别变为

$$J_{1j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\boldsymbol{X}^{(0)}(H)\right] + \boldsymbol{X}^{(0)}(N_1) = 0, \tag{23}$$

$$J_{2j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\boldsymbol{X}^{(0)}(H)\right] + \boldsymbol{X}^{(0)}(N_2) = 0, \tag{24}$$

$$J_{3j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\boldsymbol{X}^{(0)}(H)\right] + \boldsymbol{X}^{(0)}(N_3) = 0. \tag{25}$$

由判据方程(8)可知, 所研究的系统满足形式不变性.

将(13), (15), (22)式和方程(16)代入方程(9), 可得

$$G = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2). \tag{26}$$

将(26)式代入(10)式, 便可得到增加附加项后的广义Hamilton系统形式不变性导致的Mei守恒量

$$I = -(x_1^2 + x_2^2) = \text{const}. \tag{27}$$

## 6 结　论

本文研究了增加附加项后的广义Hamilton系统的形式不变性及其直接导致的Mei守恒量. 通过引入无限小变换群及其生成元向量, 给出了增加附加项后广义Hamilton系统形式不变性的定义和判据方程, 并利用规范函数满足的结构方程导出了与该系统形式不变性相应的Mei守恒量的表达式. 本文的研究方法可进一步推广到增加附加项后的广义Hamilton系统对称性和守恒量研究的其他领域.

## 参考文献


[1] Noether A E 1918 *Math. Phys.* **2** 235

[2] Mei F X 1993 *Sci. China A* **36** 1456

[3] Lou Z M, Mei F X, Chen Z D 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 110204 (in Chinese) [楼智美, 梅凤翔, 陈子栋 2012 物理学报 **61** 110204]

[4] Luo S K, Li Z J, Li L 2012 *Acta Mech.* **223** 2621

[5] Li Z J, Luo S K 2012 *Nonlinear Dyn.* **70** 1117

[6] Jia L Q, Sun X T, Zhang M L, Zhang Y Y, Han Y L 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 010201 (in Chinese) [贾利群, 孙现亭, 张美玲, 张耀宇, 韩月林 2014 物理学报 **63** 010201]

[7] Fang J H, Zhang B, Zhang W W, Xu R L 2012 *Chin. Phys. B* **21** 050202

[8] Zheng S W, Zhang Q H, Xie J F 2007 *Chin. Phys. Lett.* **24** 2164

[9] Jia L Q, Wang X X, Zhang M L, Han Y L 2012 *Nonlinear Dyn.* **69** 1807

[10] Cai J L, Luo S K, Mei F X 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3170

[11] Cai J L, Shi S S, Fang H J, Xu J 2012 *Meccanica* **47** 63

[12] Huang W L, Cai J L 2012 *Acta Mech.* **223** 433

[13] Chen X W, Liu C, Mei F X 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3180

[14] Zhang Y Y, Zhang F, Han Y L, Jia LQ 2014 *Nonlinear Dyn.* **77** 521

[15] Jia L Q, Zheng S W 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3829 (in Chinese) [贾利群, 郑世旺 2006 物理学报 **55** 3829]

[16] Luo S K, Li L 2013 *Nonlinear Dyn.* **73** 639

[17] Luo S K, Li L 2013 *Nonlinear Dyn.* **73** 339

[18] Li L, Luo S k 2013 *Acta Mech.* **224** 1757

[19] Luo S K, Li Z J, Wang P, Li L 2013 *Acta Mech.* **224** 71

# Form invariance and Mei conserved quantity for generalized Hamilton systems after adding additional terms *

Sun Xian-Ting[1)] Zhang Yao-Yu[1)] Xue Xi-Chang[1)] Jia Li-Qun[2)†]

1) (*School of Electric and Information Engineering, Pingdingshan University, Pingdingshan 467002, China*)

2) (*School of Science, Jiangnan University, Wuxi 214122, China*)

( Received 14 September 2014; revised manuscript received 16 October 2014 )

**Abstract**

Form invariance and Mei conserved quantity for generalized Hamilton systems after adding additional terms are studied. By introducing infinitesimal transformation group and its infinitesimal transformation vector of generators, the definition and determining equations of the Mei symmetry for generalized Hamilton systems after adding additional terms are provided. By means of the structure equation satisfied by the gauge function, the Mei conserved quantity corresponding to the form invariance for the system is derived. Finally an illustrative example is given to verify the results.

**Keywords:** additional term, generalized Hamiltonian system, form invariance, Mei conserved quantity

**PACS:** 45.20.Jj, 45.30.+S, 02.20.Sv **DOI:** 10.7498/aps.64.064502

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11142014).

† Corresponding author. E-mail: jlq0000@163.com