

美式回望期权定价问题的有限体积法

张琪 张然 宋海明

A finite volume method for pricing the American lookback option

Zhang Qi Zhang Ran Song Hai-Ming

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 070202 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.070202

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.070202>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I7>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

一个描述金融投资项目演化的量子力学状态方程

Quantum mechanical state equation for describing evolution of projects of financial investment

物理学报.2014, 63(9): 098901 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.098901>

基于节点拓扑特征的中国基金公司共持网络持股行为波动相关性

Correlation of the holding behaviour of the holding-based network of Chinese fund management companies based on the node topological characteristics

物理学报.2014, 63(4): 048901 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.048901>

弹性壳结构静力与动力分析的光滑粒子法

Static and dynamic analysis of elastic shell structures with smoothed particle method

物理学报.2013, 62(11): 110203 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.110203>

弹性力学的插值型重构核粒子法

Interpolating reproducing kernel particle method for elastic mechanics

物理学报.2012, 61(8): 080205 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.080205>

## 美式回望期权定价问题的有限体积法\*

张琪 张然† 宋海明

(吉林大学数学学院, 长春 130012)

(2014年10月11日收到; 2014年11月3日收到修改稿)

随着金融市场的不断发展, 期权作为一种能够规避风险的金融衍生产品越来越引起投资者的青睐, 成交量呈逐年上升的趋势, 期权定价问题已经成为金融数学领域中一个重要的研究课题. 本文主要研究 Black-Scholes 模型下美式回望期权定价问题的数值解法. 美式回望期权定价问题是一个二维非线性抛物问题, 难以直接应用数值方法进行求解. 通过分析该问题的求解难点, 本文给出解决该困难的有效方法. 首先利用计价单位变换将定价问题转换为一维自由边值问题, 并采用 Landau's 变换将求解区域规范化; 而后针对问题的非线性特点, 利用有限体积法和 Newton 法交替迭代求解期权价格和最佳实施边界, 并对数值解的非负性进行了分析. 最后, 通过与二叉树方法进行比较, 验证了本文方法的正确性和有效性, 为实际应用提供了理论基础.

**关键词:** 经济物理学, 美式回望期权, 有限体积法, Newton 迭代法

**PACS:** 02.60.-x, 47.11.Df, 89.65.Gh

**DOI:** 10.7498/aps.64.070202

## 1 引言

近年来, 物理学的相关理论和方法已经广泛应用于金融学和经济学等领域, 出现了一系列运用物理知识与方法对金融模型进行分析的文章<sup>[1-7]</sup>, 进而形成了一门新兴的交叉学科——经济物理学(econophysics). 期权定价问题是金融学中一项重要的研究课题, 越来越多的学者将热力学知识和统计学方法渗透到期权定价问题中, 例如 Kolmogorov 方程、Brown 运动和最小作用量原理等, 从而推导出期权价格满足的偏微分方程: Black-Scholes 方程<sup>[8,9]</sup>.

众所周知, 以物理学、力学和金融学等其他学科为背景的偏微分方程的研究, 不仅是传统应用数学中的一个主要内容, 也是当代数学的一个重要组成部分. 目前, 对于求解偏微分方程的数值解法众多<sup>[10-12]</sup>, 如有限差分法<sup>[13,14]</sup>、有限元法<sup>[15-18]</sup>、谱方法<sup>[19-21]</sup>和有限体积法<sup>[22-25]</sup>等, 这为我们求解实际问题提供了有效的工具. 现有的数值方法,

从物理学的角度来看, 有限体积法更容易被接受. 采用有限体积法得到的离散方程能够有效控制容积的通量平衡, 且离散后方程的各项均有明确的物理意义, 因此有限体积法已成为求解流体力学等物理问题有效的数值方法. 本文主要研究美式回望期权的定价问题, 针对其求解难点, 给出有效的数值方法. 首先, 简要回顾美式回望期权满足的 Black-Scholes 模型. 然后, 利用计价单位技巧将模型降维, 并通过 Landau's 变换将其化为一维有界规则区域上的抛物问题. 接下来, 采用有限体积法结合 Newton 法交替迭代求出期权价格和最佳实施边界, 并对数值解的非负性进行分析. 最后, 通过数值模拟验证了该算法的正确性和有效性.

## 2 问题描述

美式回望看涨(看跌)期权是一类强路径期权, 其收益回报不仅依赖于标的资产在当前时刻 $t$ 的价格 $S_t$ , 同时也依赖于期权价格在 $[0, t]$ 时段的最小

\* 国家自然科学基金(批准号: 11271157, 11371171)和新世纪优秀人才支持计划资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zhangran@jlu.edu.cn

值  $G_t = \min_{0 \leq \theta \leq t} S_\theta$  (最大值  $G_t = \max_{0 \leq \theta \leq t} S_\theta$ ), 因此美式回望期权定价问题是一类较难求解的问题. 本文主要以看跌期权为例研究美式回望期权的定价问题, 对于看涨情形, 可通过相同的技巧得到类似的结论. 假设  $t, S$  和  $G$  分别表示时间, 标的资产的价格以及历史最大值, 则美式回望看跌期权价格  $P(S, G, t)$  满足如下 Black-Scholes 模型 [26]:

$$\begin{cases} P_t + \frac{\sigma^2}{2} S^2 P_{SS} + (r - q) S P_S - r P = 0, \\ B^*(t) < S \leq G, \quad 0 \leq t < T, \\ P(S, G, T) = G - S, \quad B^*(T) \leq S \leq G, \\ P(B^*(t), G, t) = G - B^*(t), \quad 0 \leq t < T, \\ P_S(B^*(t), G, t) = -1, \quad 0 \leq t < T, \\ P_G(G, G, t) = 0, \quad 0 \leq t < T, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $\sigma, r, q$  和  $T$  分别表示标的资产的波动率, 无风险利率, 红利率以及期权的到期日.  $B^*(t)$  为最佳实施边界, 是一条未知的曲线, 满足终值条件  $B^*(T) = \max\{G, \frac{q}{r}G\}$ .

为了对模型 (1) 进行数值求解, 我们先讨论该问题所面临的求解困难:

- 1) 回望期权定价模型 (1) 的空间求解区域是一个二维的区域;
- 2) 该模型的求解区域左边界是一条未知曲线, 且求解区域不规则.

针对第一个难点, 本文将采用计价单位的技巧将问题降维, 使得求解区域化为一维区域. 对于第二个难点, Landau's 变换是处理曲边区域的有效方法, 通过该变换, 求解区域便可化为一个有界规则区域. 下面, 我们将分别介绍这两种变换, 将回望期权定价模型 (1) 化为一个一维有界规则区域上的抛物问题.

通过计价单位变换:

$$\xi = \ln \frac{G}{S}, \quad \tau = T - t, \quad \eta(\xi, \tau) = \frac{P(S, G, t)}{S}.$$

回望期权定价模型 (1) 可化为如下一维有界区域上的自由边界问题:

$$\begin{cases} \eta_\tau - \gamma \eta_{\xi\xi} - \mu \eta_\xi + q \eta = 0, \\ 0 \leq \xi < B(\tau), \quad 0 < \tau \leq T, \\ \eta(\xi, 0) = g(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq B(0), \\ \eta(B(\tau), \tau) = g(B(\tau)), \quad 0 < \tau \leq T, \\ \eta_\xi(B(\tau), \tau) = g'(B(\tau)), \quad 0 < \tau \leq T, \\ \eta_\xi(0, \tau) = 0, \quad 0 < \tau \leq T, \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$\gamma = \frac{\sigma^2}{2}, \quad \mu = q - r - \gamma,$$

$$B(\tau) = \ln \frac{G}{B^*(T-t)}, \quad g(\xi) = e^\xi - 1.$$

接下来, 对模型 (2) 采用 Landau's 变换:

$$x = 1 - \frac{\xi}{B(\tau)}, \quad u(x, \tau) = \eta(\xi, \tau),$$

便可得到一个有界规则区域上的抛物问题:

$$\begin{cases} u_\tau - \frac{\gamma}{B^2(\tau)} u_{xx} + \frac{(1-x)B'(\tau) + \mu}{B(\tau)} u_x \\ + qu = 0, \quad 0 < x \leq 1, \quad 0 < \tau \leq T, \\ u(x, 0) = g(B(0)(1-x)), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, \tau) = g(B(\tau)), \quad 0 < \tau \leq T, \\ u_x(0, \tau) = -B(\tau)g'(B(\tau)), \quad 0 < \tau \leq T, \\ u_x(1, \tau) = 0, \quad 0 < \tau \leq T. \end{cases} \quad (3)$$

观察模型 (3), 不难发现, 虽然该问题的求解区域为规则区域, 但方程系数中的  $B(\tau)$  未知, 因此我们仍然无法直接得到期权价格. 本文将采用有限体积法和 Newton 法迭代求解模型 (3), 首先我们固定某个时刻  $\tau$ , 给定  $B(\tau)$  一个初值, 利用模型 (3) 中的第 1, 3 和 5 式形成有限体积变分形式来求解期权价格  $u$ . 得到期权价格  $u$  后, 我们利用模型 (3) 中的第 4 式, 采用 Newton 法更新  $B(\tau)$  的值, 这两步交替求解, 直到得到收敛的结果. 本文的后续部分将会详细介绍求解模型 (3) 的数值算法.

为了对模型 (3) 进行有限体积离散和相应的理论分析, 我们介绍一些基本的函数空间. 记  $\Omega = [0, 1]$ ,  $L^2(\Omega)$  表示  $\Omega$  上平方可积函数空间, 且相应的内积表示为  $(\cdot, \cdot)$ . 其他函数空间的定义如下:

$$H^1(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega), v_x \in L^2(\Omega)\},$$

$$H_E^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega), v(0) = 0\},$$

$$H_g^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega), v(0) = g(B(\tau))\},$$

$H_E^{-1}(\Omega)$  为  $H_E^1(\Omega)$  的对偶空间.

接下来, 定义双线性形式:

$$\begin{aligned} & a(B(\tau), B'(\tau); u, v) \\ &= \frac{\gamma}{B^2(\tau)} (u_x, v_x) + \frac{B'(\tau)}{B(\tau)} ((1-x)u_x, v) \\ & \quad + \frac{\mu}{B(\tau)} (u_x, v) + q(u, v), \end{aligned}$$

从而模型 (3) 的弱形式可表示为

$$(\mathbf{VF}): \quad \text{求 } u \in L^2(0, T, H_g^1(\Omega)) \text{ 和}$$

$$B \in C([0, T]) \cap C^1([0, T]),$$

使得

$$u_\tau \in L^2([0, T], H_E^{-1}(\Omega)),$$

$$u(x, 0) = g(B(0)(1 - x)),$$

且满足

$$(u_\tau, v) + a(B(\tau), B'(\tau); u, v) = 0, \quad \forall v \in H_E^1, \quad 0 < \tau \leq T, \quad (4)$$

$$u_x(0, \tau) = -B(\tau)g'(B(\tau)), \quad 0 < \tau \leq T. \quad (5)$$

至此, 我们已经得到美式回望期权定价问题对应的变分形式, 下一节, 我们将对方程 (4) 和 (5) 进行数值离散, 给出期权价格的数值解.

### 3 数值算法

本节我们主要研究期权定价问题 (4) 和 (5) 的离散形式, 并给出求解离散系统的数值算法. 首先, 采用有限体积法对方程 (4) 进行数值离散. 然后, 为了数值精度的匹配, 对方程 (5) 采用二阶差分格式逼近. 最后, 对于所得到的离散系统, 我们采用 Newton 法交替迭代求解期权价格和最佳实施边界.

#### 3.1 有限体积元

这一部分, 我们分别对时间和空间进行剖分, 给出有限体积法对应的试探函数空间和检验函数空间. 考虑时间离散

$$J_\tau : 0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{M_1} = T, \\ \tau_m = T(m/M_1)^2, \quad m = 0, 1, \dots, M_1,$$

其中  $M_1$  是时间剖分的份数. 在每个时间单元  $T_m := (\tau_{m-1}, \tau_m]$  上,  $k_m = \tau_m - \tau_{m-1}$  表示局部时间步长. 我们定义  $k = \max_{1 \leq m \leq M_1} k_m$  为全局时间步长. 对于空间方向, 由于本文选择有限体积法进行离散, 因此需要定义两套空间剖分—原剖分和对偶剖分, 形式分别如下:

$$I_h : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1, \\ I_h^* : 0 = x_0 < x_{\frac{1}{2}} < \dots < x_{N-\frac{1}{2}} < x_N = 1.$$

在原剖分上,  $I_n := (x_{n-1}, x_n)$  和  $h_n := x_n - x_{n-1}$  分别表示空间单元和相应局部空间步长,  $h := \max_{1 \leq n \leq N} h_n$  定义为原剖分的全局尺度. 相应地, 对偶单元的定义为  $I_0^* = (0, x_{\frac{1}{2}})$ ,  $I_n^* = (x_{n-\frac{1}{2}}, x_{n+\frac{1}{2}})$  ( $n = 1, \dots, N-1$ ) 和  $I_N^* = (x_{N-\frac{1}{2}}, x_N)$ . 其中  $x_{n-\frac{1}{2}} = x_n - h_n/2$ .

试探函数空间  $V_h^g$  和检验函数空间  $V_h^E$  定义如下:

$$V_h^g = \{u_h \in H_g^1(\Omega), \quad u_h|_{I_i} \in P_1\}, \\ V_h^E = \{v_h \in H_E^1(\Omega), \quad v_h|_{I_i^*} \in P_0\},$$

其中  $P_j$  表示次数不超过  $j$  ( $j = 0, 1$ ) 的多项式空间. 函数空间  $V_h^g$  和  $V_h^E$  对应的基函数  $\phi_i$  和  $\psi_i$ , 如图 1 所示.

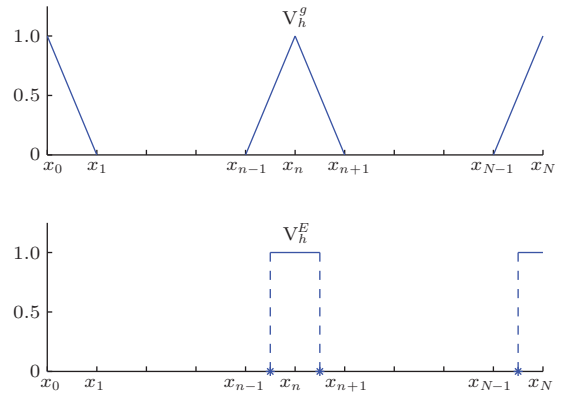


图 1 基函数

#### 3.2 有限体积离散

这一子节中, 我们将结合有限体积法和 Newton 法迭代求解期权价格和最佳实施边界. 令  $u_h^m$  和  $B_m > 0$  ( $m = 1, \dots, M_1$ ) 分别表示期权价格  $u(x, \tau)$  和最佳实施边界  $B(\tau)$  的逼近形式, 在时间方向, 我们采用  $\theta$ -格式进行离散, 则期权定价问题 (4) 和 (5) 对应的有限体积离散形式为

(DF): 求  $u_h^m \in V_h^g$  和  $B_m > 0$  ( $m = 1, \dots, M_1$ ), 使得

$$(\partial_\tau u_h^m, v_h) + a(B_m, \partial_\tau B_m; u_h^{m-\theta}, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h^E, \quad (6)$$

$$(u_h^m)_x(0) = -B_m g'(B_m), \quad (7)$$

其中

$$u_h^m(x) = \sum_{j=0}^N u_j^m \varphi_j(x), \\ u_h^{m-\theta} = (1 - \theta)u_h^m + \theta u_h^{m-1}, \\ \partial_\tau B_m = \frac{B_m - B_{m-1}}{k_m}, \\ \partial_\tau u_h^m = \frac{u_h^m - u_h^{m-1}}{k_m}, \\ u_j^0 = g(B(0)(1 - x_j)),$$

$$u_h^0(x) = \sum_{j=0}^N u_j^0 \varphi_j(x),$$

$$B_0 = B(0) = \max\left(\ln \frac{q}{r}, 0\right).$$

相应的矩阵形式为

$$A \partial_\tau U^m + \left(qA + \frac{\gamma}{B_m^2} B1 + \frac{\partial_\tau B_m}{B_m} C + \frac{\mu}{B_m} D\right) U^{m-\theta} = F^{m-\theta}, \quad (8)$$

$$(u_0^m)_x = -B_m g'(B_m), \quad (9)$$

这里

$$A = ((\varphi_i, \psi_j))_{N \times N}, \quad B_1 = ((\varphi'_i, \psi'_j))_{N \times N},$$

$$C = \left( ((1-x)\varphi'_i, \psi_j) \right)_{N \times N},$$

$$D = ((\varphi'_i, \psi_j))_{N \times N},$$

$$U^m = (u_1^m, u_2^m, \dots, u_N^m)^T,$$

$$F^{m-\theta} = (f^{m-\theta}, 0, 0, \dots, 0)^T,$$

$$f^{m-\theta} = \frac{h}{8k_m} (e^{B_{m-1}} - e^{B_m}) + \left[ -\frac{qh}{8} + \frac{\gamma}{B_m^2 h} + \frac{\partial_\tau B_m}{B_m} \left(\frac{1}{2} - \frac{3h}{8}\right) + \frac{\mu}{2B_m} \right] ((1-\theta)e^{B_m} + \theta e^{B_{m-1}} - 1).$$

观察系统 (8) 和 (9), 方程 (8) 中  $U$  和  $B$  均未知, 无法直接求解. 我们可以先给定  $B$  一个初值, 这样便可以求得  $U$ . 已知  $U$ , 对非线性方程 (9) 应用 Newton 迭代法来更新  $B$  的值, 这两步交替迭代进行, 直到得到满足精度要求的结果. 下面我们将详细介绍本文的主要算法.

首先, 我们利用 Taylor 展式对方程 (9) 进行数值离散, 因为线性有限元方法的数值精度在空间上是 2 阶的, 为了使数值精度匹配, 本文采用二阶 Taylor 展式对 (9) 式进行逼近, 简单整理可以得到如下等价形式:

$$\mathcal{P}(B_m) \triangleq 4u_1^m - u_2^m + 3 + 2hB_m e^{B_m} - 3e^{B_m} = 0.$$

应用 Newton 法求解上式, 我们需要得到  $\mathcal{P}$  的导数

$$\mathcal{P}'(B_m) = 4 \frac{du_1^m}{dB_m} - \frac{du_2^m}{dB_m} + 2h(1+B_m)e^{B_m} - 3e^{B_m}.$$

观察导数的解析式, 不难发现  $\frac{du_1^m}{dB_m}$  和  $\frac{du_2^m}{dB_m}$  都是未知的. 因此应用 Newton 法更新  $B$  时, 需要提前求出  $\frac{du_1^m}{dB_m}$  和  $\frac{du_2^m}{dB_m}$ . 下面介绍求解它们的方法. 对

方程 (8) 两端关于  $B$  求导可得

$$\left( \frac{1}{k_m} A + (1-\theta) \left( qA + \frac{\gamma}{B_m^2} B1 + \frac{\partial_\tau B_m}{B_m} C + \frac{\mu}{B_m} D \right) \right) X^m = G^{m-\theta}, \quad (10)$$

其中

$$X^m = \frac{dU^m}{dB_m},$$

$$G^{m-\theta} = \frac{dF^{m-\theta}}{dB_m} + \left( \frac{2\gamma}{B_m^3} B1 - \frac{B_{m-1}}{B_m^2 k_m} C + \frac{\mu}{B_m^2} D \right) U^{m-\theta}.$$

这样, 我们便求出了  $\frac{du_1^m}{dB_m}$  和  $\frac{du_2^m}{dB_m}$ . 为了更具体地理解本文所介绍的算法, 我们给出具体步骤, 算法如下:

- 任给  $\epsilon > 0$ .
- For  $m = 1 : M_1$ 
  - 令  $B_m^{(0)} = B_m + \alpha k_m$ ;
  - For  $j = 1, 2, \dots$ 
    1. 求解 (8) 和 (10), 得到  $U(B^{(j-1)})$ ,  $\frac{du_1}{dB^{(j-1)}}$  和  $\frac{du_2}{dB^{(j-1)}}$ ;
    2. 计算  $B^{(j)} = B^{(j-1)} - \frac{\mathcal{P}(B^{(j-1)})}{\mathcal{P}'(B^{(j-1)})}$ ;
    3. 如果  $|B^{(j)} - B^{(j-1)}| < \epsilon$ , 则  $B_m = B^{(j)}$ ;
    4. 固定  $B_m$ , 求解 (8), 得到更精确的  $U^m$  和  $u_0^m = e^{B_m} - 1$ .
- end

上面我们已经给出了求解期权价格的具体算法, 众所周知, 期权价格在交易的过程中不可能出现负值, 为了说明本文所提算法的合理性, 我们必须对期权数值解的非负性进行分析.

**定理 1** 如果

$$\rho_1 = h \max_{m=1}^{M_1} \partial_\tau B_m, \quad \rho_2 = \max_{m=1}^{M_1} \frac{h^2}{k_m} = C_4 h^{1-a},$$

$0 < a < 1$ , 充分小, 则系统 (8) 和 (9) 求出的数值解  $u_h^m$  非负.

为使文章清晰, 关于定理 1 的详细证明过程, 我们将在附录中给出.



### 4 数值模拟

本节中,我们将通过数值模拟来验证本文所介绍的有限体积法(FVM)的有效性,并给出在股价历史最大值已知情况下回望期权价格的三维图像,让读者对回望期权定价问题有一个直观的认识.

**数值算例** 我们考虑一年期( $T = 1$ )的美式回望看跌期权定价问题.假设股价 $S$ 的波动率为 $\sigma = 0.2$ ,为了验证本文算法对利率 $r$ 和红利率 $q$ 在多种组合下的有效性,我们选取以下三种情形进行讨论:(I)  $r > q$ :  $r = 0.06, q = 0.02$ ; (II)  $r = q$ :  $r = 0.06, q = 0.06$ ; (III)  $r < q$ :  $r = 0.058, q = 0.06$ .

**注** 美式回望看跌期权不存在解析解,本文选取二叉树方法(BTM)作为解析解的参照物.其中, BTM 的时间剖分份数为  $M_1 = 10240$ , 截断长度取  $L = 1$ . 对于本文算法中一些参数的选取,我们也在此给出说明. 时间离散参数 $\theta$ 取0.5,即 Crank-Nicolson 格式,剖分份数  $M_1 = 512$ ,空间方

向采用均匀剖分  $h = \sqrt{T}/M_1$ . Newton 迭代法中的  $\epsilon = 10^{-10}, \alpha = 10$ .

为说明FVM的准确性,我们给出了上述(I)—(III)三种情况下,股价历史最大值 $G$ 变化时,应用FVM求得的 $B^*$ 的相对 $L_2$ 误差,如表1所示.表1的数据表明FVM解的相对误差的量级为 $10^{-3}$ ,在金融市场交易的过程中,这个误差范围是可以接受的.

表1 三种情况下,不同的历史最大值 $G$ ,相应的FVM解的相对 $L_2$ 误差

相对误差( $10^{-3}$ )	$G = 100$	$G = 150$	$G = 200$
$r > q$	1.595	0.0133	0.00993
$r = q$	5.119	0.0452	0.0339
$r < q$	5.334	0.0474	0.0356

接下来,为了让读者对最佳实施边界 $B^*$ 有一个直观的认识,我们给出了在表1所述情况下,应用FVM和BTM求得的最佳实施边界的图像,如图2至图4所示,其中红线和蓝线分别表示有限体积法和二叉树法.

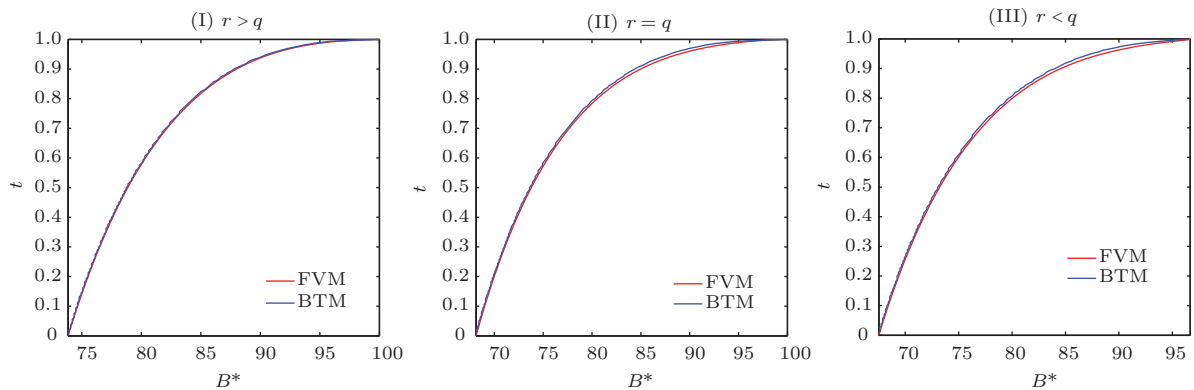


图2 最佳实施边界  $B^*$  ( $G = 100$ )

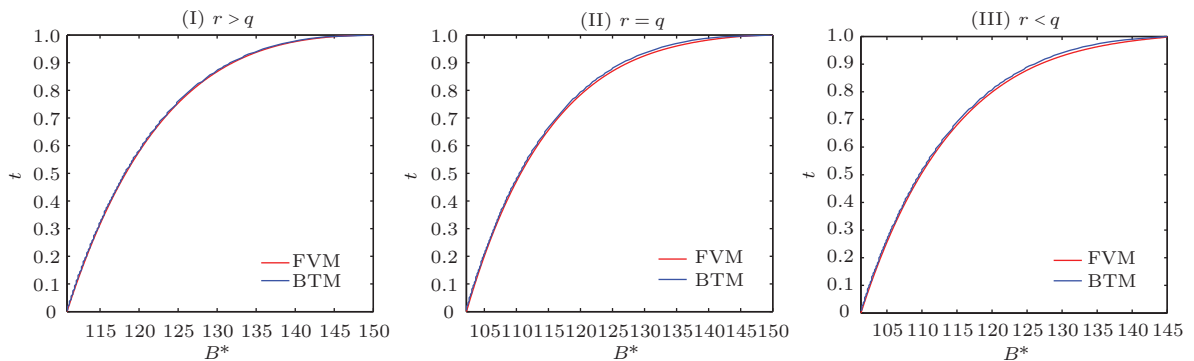


图3 (网刊彩色) 最佳实施边界  $B^*$  ( $G = 150$ )

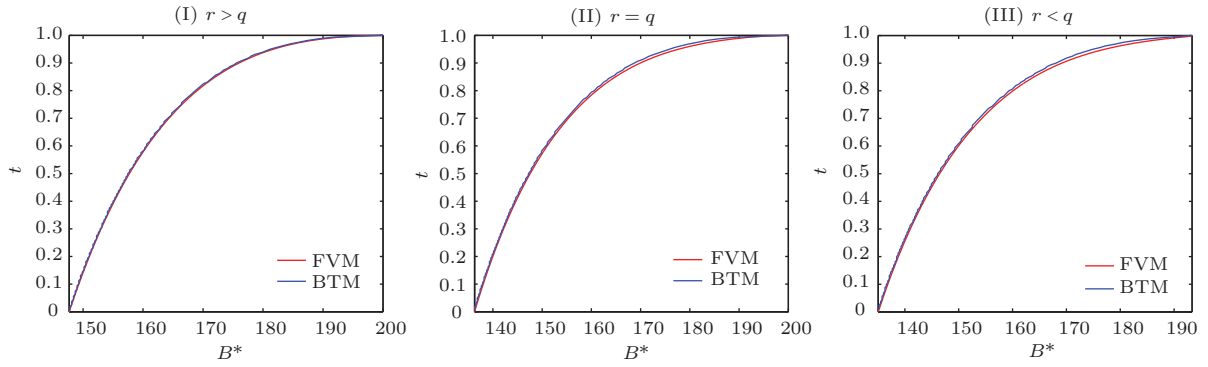


图4 (网刊彩色) 最佳实施边界  $B^*$  ( $G = 200$ )

观察图2至图4, 我们可以得到以下结论:

- 1) 两条线几乎完全吻合, 说明了有限体积法的正确性, 这与表1所得到的结论一致.
- 2) 针对(I)—(III)三种情况, 对于不同的 $G$ , 本文算法解得的最佳实施边界的走势均与真解一致, 说明了该算法应用范围的普遍性.

为了进一步说明时间剖分份数对解的精度影响, 并对两种算法(FVM,BTM)光滑性进行比较, 我们以图1为例, 放大局部, 给出不同时间剖分份数下最佳实施边界的图像, 如图5所示.

观察图5, 不难发现:

- 1) 随着时间剖分份数( $M_1$ )的增大, 有限体积

法得到的最佳实施边界逐渐逼近二叉树解, 表明了有限体积法的可行性;

- 2) 有限体积法得到的图像要比二叉树法更为光滑. 二叉树方法要想得到更光滑的解, 需要更多的剖分节点数, 这样必将增大计算量, 不适宜实际应用, 有限体积法有效的解决了这个问题, 进一步验证了有限体积法的实用性.

最后, 我们以 $G = 100$ 时为例, 给出算例所提到的三种情形下期权价格 $P(S, G, t)$ 和自由边界 $B^*$ 的三维图像, 如图6所示. 对于 $G$ 取其他值时, 也可得到类似的图像. 观察图6, 我们发现回望期权价格 $P$ 的图像与一般美式期权的走势相似.

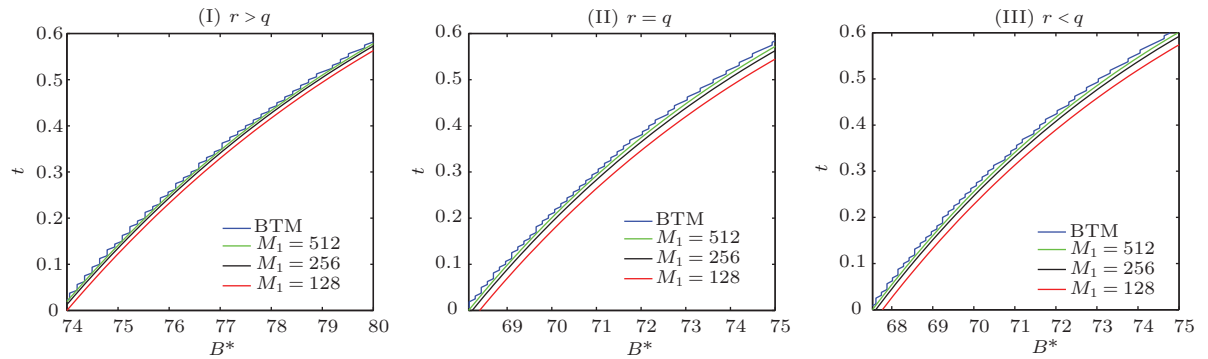


图5 (网刊彩色)  $G = 100$ 时, 有限体积法( $M_1 = 128, 256, 512$ )和二叉树法( $M_1 = 10240$ )对应的最佳实施边界

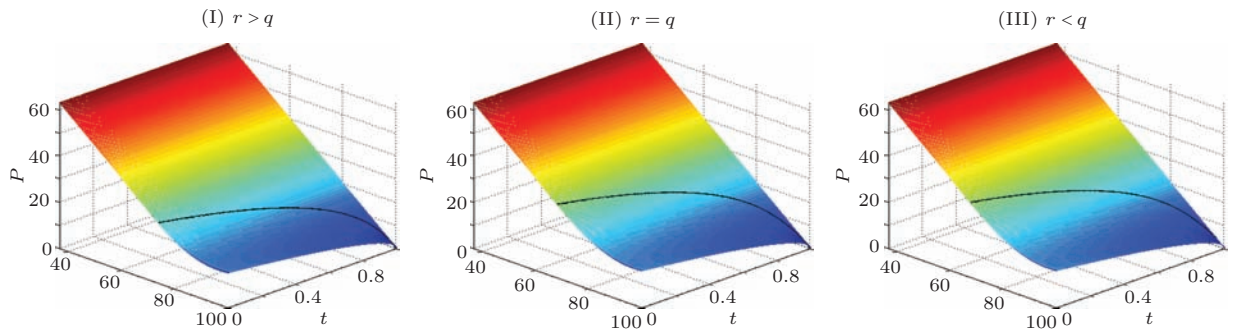


图6 (网刊彩色) 期权价格  $P(S, G, t)$  的图像 ( $G = 100$ )

### 5 结 论

本文主要研究美式回望看跌期权的定价问题, 通过分析问题的求解难点, 给出了相应的处理方法. 首先, 我们采用单位计价的技巧将问题降维, 然后通过 Landau's 变换, 将问题转化为一个有界规则区域上的非线性抛物问题. 对于导出的非线性问题, 我们应用有限体积法结合 Newton 迭代法进行求解, 并对所求数值解的非负性进行了分析. 最后, 通过数值算例与二叉树方法进行比较, 验证了本文算法的正确性, 实用性和应用范围的普遍性.

### 附录

这一部分, 我们给出定理 1 的详细证明.

**证明** 为了简化证明过程, 我们仅考虑向后欧拉格式 ( $\theta = 0$ ) 和一致剖分 ( $h_j = h$ ) 情况, 此时, 方程组 (8) 等价于:

$$\begin{cases} b_1^m u_1^m + c_1^m u_2^m = d_1^m, \\ a_i^m u_{i-1}^m + b_i^m u_i^m + c_i^m u_{i+1}^m = d_i^m, \\ i = 2, \dots, N-1, \\ a_N^m u_{N-1}^m + b_N^m u_N^m = d_N^m, \end{cases} \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} a_i^m &= \frac{h}{8}(1+k_m q) - \frac{\gamma k_m}{h B_m^2} + \frac{k_m \partial_\tau B_m}{B_m} \left( \frac{x_i}{2} - \frac{h}{8} - \frac{1}{2} \right) \\ &\quad - \frac{\mu k_m}{2 B_m}, \quad i = 2, \dots, N, \\ b_i^m &= \frac{3h}{4}(1+k_m q) + \frac{2\gamma k_m}{h B_m^2} + \frac{k_m \partial_\tau B_m}{4 B_m}, \\ &\quad i = 1, \dots, N-1, \\ b_N^m &= \frac{3h}{8}(1+k_m q) + \frac{\gamma k_m}{h B_m^2} + \frac{k_m h \partial_\tau B_m}{8 B_m} + \frac{\mu k_m}{2 B_m}, \\ c_i^m &= \frac{h}{8}(1+k_m q) - \frac{k_m \gamma}{h B_m^2} + \frac{k_m \partial_\tau B_m}{B_m} \left( \frac{1}{2} - \frac{x_i}{2} - \frac{h}{8} \right) \\ &\quad + \frac{\mu k_m}{2 B_m}, \quad i = 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

当满足定理假设,  $\rho_1$  和  $\rho_2$  充分小时, 我们可以得到

$$\begin{aligned} a_j^m &< 0, \quad j = 2, \dots, N, \\ b_j^m &> 0, \quad j = 1, \dots, N, \\ c_j^m &< 0, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ b_1^m + c_1^m &> 0, \\ a_j^m + b_j^m + c_j^m &> 0, \quad j = 2, \dots, N-1, \\ a_N^m + b_N^m &> 0. \end{aligned}$$

因此, 方程组 (8) 的系数矩阵是一个  $M$  阵. 注意到  $U^0$  是非负的, 当  $\rho_1$  和  $\rho_2$  充分小时, 可以保证向量  $(d_1^0, d_2^0, \dots, d_N^0)^T$  的非负性. 因此, 根据  $M$  阵的性质,

依此类推, 容易得到  $(d_1^m, \dots, d_N^m)^T$  和  $U^m$  均非负 ( $m = 1, \dots, M_1$ ), 证毕.

### 参考文献

- [1] Vogel E E, Saravia G 2014 *Eur. Phys. J. B* **87** 177
- [2] Ibuki T, Suzuki S, Inoue J 2013 *Econophysics of systemic risk and network dynamics* (Milan:Springer) pp239-259
- [3] Mimkes J 2012 *Continuum Mech. Thermodyn.* **24** 731
- [4] Chakraborti A, Muni T I, Patriarca M, Abergel F 2011 *Fuanc. Financ.* **11** 1013
- [5] Sousa T, Domingos T 2006 *Phys. A* **371** 492
- [6] Fang H 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 038902 (in Chinese) [范宏 2014 物理学报 **63** 038902]
- [7] Da C, Fan H Y 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 098901 (in Chinese) [笪诚, 范洪义 2014 物理学报 **63** 098901]
- [8] Yu Z R 2000 *Physics* **29** 662 (in Chinese) [于祖荣 2000 物理 **29** 662]
- [9] Kwok Y K 2008 *Mathematical models of financial derivatives* (Vol. 2) (Berlin:Springer) pp201-211
- [10] Zhang R, Song H M, Luan N N 2014 *Front. Math. China* **9** 455
- [11] Kim K Ik, Park H S, Qian X S 2011 *J. Comput. Appl. Math.* **235** 5140
- [12] Zhang T, Zhang S H, Zhu D M 2009 *J. Comput. Math.* **27** 484
- [13] Li G, Zhu B X, Zhang Q, Song H M 2014 *Journal of Jilin University(Science Edition)* **52** 698 (in Chinese) [李庚, 朱本喜, 张琪, 宋海明 2014 吉林大学学报(理学版) **52** 698]
- [14] Wang H, Basu T S 2012 *SIAM J. Sci. Comput.* **34** A2444
- [15] Han Q G, Ma H A, Xiao H Y, Li R, Zhang C, Li Z C, Tian Y, Jia X P 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1923 (in Chinese) [韩奇钢, 马红安, 肖宏宇, 李瑞, 张聪, 李战厂, 田宇, 贾晓鹏 2010 物理学报 **59** 1923]
- [16] Kwon Y H, Lee Y 2011 *SIAM J. Numer. Anal.* **49** 2598
- [17] Mattsson K, Carpenter M H 2010 *SIAM J. Sci. Comput.* **32** 2298
- [18] Forsyth P A, Vetzal K R, Zvan R 1999 *Appl. Math. Finance* **6** 87
- [19] Li H Y, Ma H P, Sun W W 2013 *SIAM J. Numer. Anal.* **51** 353
- [20] Pindza E, Patidar K C, Ngounda E 2014 *Numer. Methods Partial Differential Equations* **30** 1169
- [21] Chen Y P, Huang F L, Yi N Y, Liu W B 2011 *SIAM J. Numer. Anal.* **49** 1625
- [22] Bessemoulin C M, Filbet F 2012 *SIAM J. Sci. Comput.* **34** B559
- [23] Zhang K, Wang S 2008 *Appl. Math. Comput.* **201** 398
- [24] Berton J, Eymard R 2006 *MSAIN Math. Model. Numer. Anal.* **40** 311
- [25] Angermann L, Wang S 2007 *Numer. Math.* **106** 1
- [26] Jiang L S 2007 *Mathematical modeling and methods of option pricing* (Vol. 2) (Beijing:Higher Education Press) p303 (in Chinese) [姜礼尚 2007 期权定价的数学模拟和方法(第二版)(北京:高等教育出版社)第 303 页]



# A finite volume method for pricing the American lookback option\*

Zhang Qi   Zhang Ran<sup>†</sup>   Song Hai-Ming

(Department of Mathematics, Jilin University, Changchun 130012, China)

( Received 11 October 2014; revised manuscript received 3 November 2014 )

## Abstract

Due to the characteristic of risk aversion, option has become one of the most fashionable derivatives in the financial field. More and more investigators are attracted to devote themselves to exploring the option pricing problem. In this paper, we are concerned with the valuation of American lookback options in terms of the Black-Scholes model. It is well known that the American lookback option satisfies a two-dimensional nonlinear partial differential equation in an unbounded domain, which couldn't be numerically solved directly. Based on the analysis of the issues for solving this problem, this paper introduces an approach to settle it. First, we transform the problem into a one-dimensional form by the numeraire transformation. And then, the Landau's transformation is applied to normalize the defined domain. For the nonlinear feature of the resulting problem, we propose a finite volume method coupled with Newton iterative method to obtain the optional value and the optimal exercise boundary simultaneously. We also give a proof on the nonnegativity of the numerical solutions under some appropriate assumptions. Finally, some numerical simulations are presented using the proposed method in this paper. Comparing with the binomial method, we can conclude that the proposed method is an effective one, which provides a theoretical basis for practical applications.

**Keywords:** econophysics, American lookback option, finite volume method, Newton iterative method

**PACS:** 02.60.-x, 47.11.Df, 89.65.Gh

**DOI:** [10.7498/aps.64.070202](https://doi.org/10.7498/aps.64.070202)

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant Nos. 11271157, 11371171), and the Program for New Century Excellent Talents in University of Ministry of Education of China.

† Corresponding author. E-mail: [zhangran@jlu.edu.cn](mailto:zhangran@jlu.edu.cn)