

带有未知非对称控制增益的不确定分数阶混沌系统自适应模糊同步控制

刘恒 李生刚 孙业国 王宏兴

Adaptive fuzzy synchronization for uncertain fractional-order chaotic systems with unknown non-symmetrical control gain

Liu Heng Li Sheng-Gang Sun Ye-Guo Wang Hong-Xing

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 070503 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.070503

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.070503>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I7>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

混沌海杂波背景下的微弱信号检测混合算法

Hybrid algorithm for weak signal detection in chaotic sea clutter

物理学报.2015, 64(4): 040506 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.040506>

基于线性矩阵不等式的一类新羽翼倍增混沌分析与控制

Analysis on a class of double-wing chaotic system and its control via linear matrix inequality

物理学报.2014, 63(21): 210502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.210502>

自然循环流动不稳定性多目标优化极限学习机预测方法

Prediction method of flow instability based on multi-objective optimized extreme learning machine

物理学报.2014, 63(20): 200505 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.200505>

基于不确定性变时滞分数阶超混沌系统的滑模自适应鲁棒的同步控制

Synchronizing a class of uncertain and variable time-delay fractional-order hyper-chaotic systems by adaptive sliding robust mode control

物理学报.2014, 63(16): 160507 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.160507>

一种混沌海杂波背景下的微弱信号检测方法

A method of weak target detection based on the sea clutter

物理学报.2014, 63(10): 100505 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.100505>

# 带有未知非对称控制增益的不确定分数阶混沌系统自适应模糊同步控制\*

刘恒<sup>1)2)</sup> 李生刚<sup>1)†</sup> 孙业国<sup>2)</sup> 王宏兴<sup>2)</sup>

1) (陕西师范大学数学与信息科学学院, 西安 710119)

2) (淮南师范学院数学与计算科学系, 淮南 232038)

(2014年10月21日收到; 2014年11月5日收到修改稿)

针对带有非对称控制增益的不确定分数阶混沌系统的同步问题设计了模糊自适应控制器. 模糊逻辑系统用来逼近未知的非线性函数, 非对称的控制增益矩阵被分解为一个未知的正定矩阵、一个对角线上元素为+1或-1的已知对角矩阵和一个未知的上三角矩阵的乘积. 基于分数阶Lyapunov稳定性理论构造了模糊控制器以及分数阶的参数自适应律, 在保证所有变量有界的情况下实现驱动系统和响应系统的同步. 在分数阶系统稳定性分析中给出了一种平方Lyapunov函数的使用方法, 根据此方法很多针对整数阶系统的控制方法可以推广到分数阶系统中. 最后数值仿真结果验证了所提控制方法的可行性.

**关键词:** 分数阶混沌系统, 自适应模糊控制, 分数阶自适应律

**PACS:** 05.45.Pq, 05.45.Xt

**DOI:** 10.7498/aps.64.070503

## 1 引言

分数阶微积分几乎与整数阶微积分有一样长的历史. 而由于缺乏实际的应用背景以及其理论的复杂性, 其理论研究发展缓慢. 近年来, 这种情况开始发生变化: 分数阶理论不仅为很多实际系统提供了新的数学工具, 而且特别适合描述一些物理系统的动力学行为<sup>[1-4]</sup>; 在漫射、光谱分析、电介质等系统中, 一些数学家、物理学家和工程师已经开始应用分数阶微积分来解决问题. 在复杂动态系统中, 应用分数阶微积分建立的模型往往要比整数阶系统模型更加精确.

由于混沌信号具有连续宽带谱、类随机性和对系统初始值极端敏感性等特点, 其在保密通信中有着巨大的市场潜在价值<sup>[5,6]</sup>. 在研究整数阶混沌系统的基础上将分数阶微分算子引入系统中, 发现当阶数为非整数时系统仍能表现出复杂的混沌行为.

对于分数阶混沌系统的同步问题已经有很多方法, 如驱动-响应、Lyapunov函数、滑模控制、广义同步、主动控制及非线性反馈控制等<sup>[3-8]</sup>. 对于不确定分数阶混沌系统的同步问题也有了一些结果, 如文献<sup>[17]</sup>在系统未知项满足范数有界的情况下利用滑模控制实现了不确定分数阶Duffing-Holmes系统的同步问题; 文献<sup>[18]</sup>研究了不确定分数阶混沌系统的自适应滑模同步问题等. 目前在处理不确定分数阶混沌系统同步问题文献中, 需系统不确定项满足一定的条件(如范数有界、可线性化及全局Lipschitz条件等<sup>[17-20]</sup>). 如何在混沌系统非线性不确定项完全未知的情况下实现系统的同步, 有待进一步研究.

在整数阶不确定非线性系统的控制问题中, 模糊逻辑系统常被用来构建系统模型<sup>[21-32]</sup>, 且在稳定性分析中主要利用平方Lyapunov函数. 随着文献<sup>[2]</sup>提出了分数阶系统的Lyapunov第二方法, 对于分数阶非线性系统的控制及稳定性分析逐渐成

\* 国家自然科学基金(批准号: 11401243, 61403157)和中央高校基本科研业务费专项资金(批准号: GK201504002)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: shengganglinew@126.com

为研究热点. 然而正如文献 [33, 34] 指出的那样, 由于平方函数的分数阶导数具有非常复杂的形式, 在分数阶系统的稳定性分析中使用平方 Lyapunov 函数是非常困难的, 所以到目前为止几乎没有文献成功地运用自适应模糊控制实现分数阶混沌系统的控制或者同步. 需要强调的是 Lin 等分别用自适应模糊控制和自适应滑模模糊控制研究了分数阶混沌系统的同步问题 [35, 36], 但是在应用分数阶运算的过程中存在一些问题 (本文将在注 4 中讨论这些问题).

在上述文献研究的基础上, 本文主要研究基于自适应模糊控制的带有非对称控制增益的不确定分数阶混沌系统同步问题. 模糊逻辑系统用来估计未知的非线性函数. 为了解决分数阶系统中模糊系统参数的自适应问题, 设计了分数阶自适应律. 非对称、顺序主子式非 0 的控制增益矩阵被分解为一个未知的正定矩阵, 一个已知的对角线元素为 +1 或 -1 的已知矩阵和一个未知的上三角矩阵, 其中未知的正定矩阵用来构造 Lyapunov 函数, 已知的对角矩阵用来构造同步控制器. 设计的模糊自适应同步控制器可以保证闭环系统所有变量有界并且同步误差渐近趋于 0. 关于本文的主要工作需要强调的有: 1) 成功使用模糊自适应控制实现了分数阶混沌系统的同步, 并设计了分数阶模糊系统参数的自适应律. 本文中分数阶系统的模型可以是完全未知的. 2) 首次在分数阶系统中考虑了非对称控制增益问题, 本文只需要控制增益矩阵的各阶顺序主子式非 0 (所以控制增益矩阵正定可以看做本文的特殊情况). 3) 在稳定性分析中使用了平方 Lyapunov 函数, 并严格证明了系统的稳定性. 应用本文的方法, 很多针对整数阶系统的控制方法可以推广到分数阶系统中来.

## 2 预备知识

### 2.1 分数阶微积分概述

最常用的分数阶微积分的定义有三种, 分别由 Grunwald-Letnikov, Riemann-Liouville(R-L), Caputo 给出. 本文主要用 Caputo 的定义, 因为 Caputo 定义中的系统的初值和整数阶系统的一样, 具有较好的物理意义. Caputo 分数阶积分定义为

$${}_0D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (1)$$

其中  $\Gamma(\cdot)$  为欧拉 Gamma 函数. Caputo 分数阶微分定义为

$${}_0^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \times f^{(n)}(\tau) d\tau, \quad (2)$$

其中  $n-1 \leq \alpha < n$ . 分数阶微分 (2) 的 Laplace 变换定义为 [1]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}({}_0^C D_t^\alpha f(t)) &= \int_0^\infty e^{-st} {}_0^C D_t^\alpha f(t) dt \\ &= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0). \end{aligned} \quad (3)$$

为了便于讨论, 下文中始终假设  $0 < \alpha < 1$ . 下面是一些将要用到的概念与结果.

**定义 1** [1] 双参数 Mittag-Leffler 函数定义为

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (4)$$

其中  $\alpha, \beta > 0$ ,  $z$  为复数, 其 Laplace 变换定义为

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(-at^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + a}. \quad (5)$$

**引理 1** (分数阶 Lyapunov 第二方法 [12]) 设原点是如下分数阶非线性系统的平衡点:

$${}_0^C D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \quad (6)$$

其中  $x(t) \in R^n$  为系统变量,  $f(x(t)) \in R^n$  为满足局部 Lipschitz 条件的非线性函数. 若存在 Lyapunov 函数  $V(t, x(t))$  和正参数  $h_1, h_2, h_3$  使得

$$h_1 \|x(t)\| \leq V(t, x(t)) \leq h_2 \|x(t)\|, \quad (7)$$

$${}_0^C D_t^\alpha V(t, x(t)) \leq -h_3 \|x(t)\|, \quad (8)$$

则系统 (6) 是渐近稳定的.

**引理 2** [37] 设  $x(t) \in R^n$  为连续可微函数, 则

$$\frac{1}{2} {}_0^C D_t^\alpha x^T(t)x(t) \leq x^T(t) {}_0^C D_t^\alpha x(t). \quad (9)$$

**引理 3** [38] 设矩阵  $U \in R^{n \times n}$  具有非零的顺序主子式, 则  $U$  可以分解为  $U = U_1 D_u T_u$ , 其中  $U_1 \in R^{n \times n}$  为正定矩阵,  $D_u \in R^{n \times n}$  为对角线为 +1 或者 -1 的对角矩阵 (各元素的符号由  $U$  的对应的顺序主子式的符号决定),  $T_u \in R^{n \times n}$  为上三角矩阵.

### 2.2 模糊系统描述

模糊逻辑系统主要由知识库、模糊化、基于模糊规则的模糊推理和去模糊化四个部分构成, 其中第  $i$  条模糊规则 ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 的形式为:

如果  $x_1(t)$  为  $F_1^i$  并且  $x_2(t)$  为  $F_2^i, \dots$ , 并且  $x_n(t)$  为  $F_n^i$ , 那么  $\hat{f}(t)$  为  $B^i$ , 这里  $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T \in R^n$  和  $\hat{f}(t) \in R$  分别为模糊逻辑系统的输入和输出,  $F_j^i$  和  $B^i$  为  $R$  上的模糊集合. 模糊系统根据模糊规则把  $R^n$  上的模糊集合映成  $R$  上的模糊集合. 模糊系统的输出可写成

$$\hat{f}(x(t)) = \frac{\sum_{j=1}^N \theta_j(t) \prod_{i=1}^n \mu_{F_i^j}(x_i(t))}{\sum_{j=1}^N \left[ \prod_{i=1}^n \mu_{F_i^j}(x_i(t)) \right]},$$

式中  $\theta_j(t)$  为模糊隶属度函数  $\mu_{B^j}$  取最大值的点, 通常可设为  $\mu_{B^j}(\theta_j(t)) = 1$ . 设模糊基函数

$$p_j(x(t)) = \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{F_i^j}(x_i(t))}{\sum_{j=1}^N \left[ \prod_{i=1}^n \mu_{F_i^j}(x_i(t)) \right]},$$

令

$$\psi(x(t)) = [p_1(x(t)), p_2(x(t)), \dots, p_N(x(t))]^T, \\ \theta(t) = [\theta_1(t), \dots, \theta_N(t)]^T,$$

则模糊系统的输出可写成

$$\hat{f}(x(t)) = \theta^T(t)\psi(x(t)). \quad (10)$$

### 3 同步控制器的设计及稳定性分析

#### 3.1 问题描述

设分数阶驱动混沌系统和响应混沌系统分别为

$${}_0^C D_t^\alpha x(t) = f(x(t)), \quad (11)$$

$${}_0^C D_t^\alpha y(t) = g(y(t)) + Gu(t), \quad (12)$$

其中  $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T \in R^n$  和  $y(t) = [y_1(t), \dots, y_n(t)]^T \in R^n$  分别为驱动系统和响应系统可测的状态向量,  $f, g: R^n \rightarrow R^n$  为未知的非线性函数,  $G \in R^{n \times n}$  为未知的常数矩阵.

**假设 1** 控制增益矩阵  $G$  具有非零的顺序主子式且各主子式的符号已知.

**注 1** 假设 1 是有意义的. 事实上, 一些实际的系统(如视觉伺服, 汽车热管理系统<sup>[24]</sup>)中的控制增益矩阵是非对称的. 根据引理 3, 我们可以把  $G$  分解为  $G = G_1 A T$ , 其中  $G_1$  为未知的正定矩阵,  $A$  为对角线元素为 +1 或者 -1 的已知矩阵且

$A A = I_{n \times n}$  ( $I_{n \times n}$  为  $n$  阶单位矩阵),  $T$  为未知的上三角矩阵.

定义同步误差为  $e(t) = x(t) - y(t)$ . 本文的主要目标是设计适当的自适应模糊控制器, 使同步误差渐近趋于 0 (即  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$ ).

#### 3.2 控制器的设计及稳定性分析

同步误差的动态方程可表示为

$${}_0^C D_t^\alpha e(t) = f(x(t)) - g(y(t)) - G_1 D T u(t). \quad (13)$$

注意到  $G_1$  为正定矩阵, 令  $P = G_1^{-1}$ , 把 (13) 式两边同乘以  $P$  得

$$P {}_0^C D_t^\alpha e(t) = P f(x(t)) - P g(y(t)) - (A T - A) u(t) - A u(t). \quad (14)$$

若记

$$\gamma(x(t), y(t), u(t)) \\ = \gamma(z(t)) \\ = P f(x(t)) - P g(y(t)) - (A T - A) u(t) \\ = [\gamma_1(z(t)), \dots, \gamma_n(z(t))]^T$$

为未知的非线性函数(其中  $z(t)$  表示  $x(t), y(t), u(t)$  的函数), 则 (14) 式可写成

$$P {}_0^C D_t^\alpha e(t) = \gamma(z(t)) - A u(t). \quad (15)$$

未知函数  $\gamma(z(t))$  可通过模糊逻辑系统 (10) 近似如下:

$$\hat{\gamma}_i(z(t), \theta_i(t)) = \theta_i^T(t) \psi_i(z(t)), \\ i = 1, 2, \dots, n, \quad (16)$$

其中  $\psi_i(z(t))$  为模糊基函数,  $\theta_i(t)$  为模糊系统的可调参数. 令模糊逻辑系统最优估计参数为  $\theta_i^*$  (它是  $\sup_t |\alpha_i(z(t)) - \hat{\gamma}_i(z(t), \theta_i)|$  的下确界, 通常可以假设  $\theta_i^*$  为常数向量<sup>[22,24,32]</sup>). 设模糊系统的参数误差和最优估计误差分别为

$$\tilde{\theta}_i(t) = \theta_i(t) - \theta_i^*, \quad (17)$$

$$\varepsilon_i(z(t)) = \gamma_i(z(t)) - \hat{\gamma}_i(z(t), \theta_i^*). \quad (18)$$

根据文献<sup>[22, 24, 34, 37]</sup>可设模糊系统的估计误差是有界的, 即  $|\varepsilon_i(z(t))| \leq \varepsilon_i^*$  ( $\varepsilon_i^* > 0$  为未知常数). 记  $\varepsilon(z(t)) = [\varepsilon_1(z(t)), \varepsilon_2(z(t)), \dots, \varepsilon_n(z(t))]^T$ ,  $\varepsilon^* = [\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \dots, \varepsilon_n^*]^T$ , 则未知非线性函数的估计误差可写为

$$\hat{\gamma}(z(t), \theta(t)) - \gamma(z(t))$$



$$\begin{aligned}
 &= \hat{\gamma}(z(t), \theta(t)) - \hat{\gamma}(z(t), \theta^*) + \hat{\gamma}(z(t), \theta^*) - \gamma(z(t)) \\
 &= \hat{\gamma}(z(t), \theta(t)) - \gamma(z(t), \theta^*) - \varepsilon(z(t)) \\
 &= \tilde{\theta}(t)^T \psi(z(t)) - \varepsilon(z(t)), \tag{19}
 \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}
 \hat{\gamma}(z(t), \theta(t)) &= \theta^T(t) \psi(z(t)) \\
 &= [\hat{\gamma}_1(z(t), \theta_1(t)), \hat{\gamma}_2(z(t), \theta_2(t)), \dots, \\
 &\quad \hat{\gamma}_n(z(t), \theta_n(t))]^T, \\
 \theta(t) &= [\theta_1^T(t), \dots, \theta_n^T(t)]^T.
 \end{aligned}$$

根据上面的讨论, 同步控制器  $u(t)$  可设计为

$$\begin{aligned}
 u(t) &= A \left[ K e(t) + \theta^T(t) \psi(z(t)) \right. \\
 &\quad \left. + H \text{sign}(e(t)) \right], \tag{20}
 \end{aligned}$$

其中  $K = \text{diag}[k_1, \dots, k_n] \in R^{n \times n}$ ,  $k_1, \dots, k_n > 0$  为设计参数,  $H = \text{diag}[\hat{\epsilon}_1^*(t), \dots, \hat{\epsilon}_n^*(t)]$ ,  $\hat{\epsilon}_i^*(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  为未知常数  $\epsilon_i^*$  的估计值. 为了实现同步目标, 对模糊系统参数  $\theta_i(t)$  以及模糊最优逼近误差上界的估计值, 本文设计如下的分数阶参数自适应规则:

$${}_0^C D_t^\alpha \theta_i(t) = \mu_i e_i(t) \psi_i(x(t)), \tag{21}$$

$${}_0^C D_t^\alpha \hat{\epsilon}_i^*(t) = \sigma_i |e_i(t)|, \tag{22}$$

其中  $\mu_i, \sigma_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  为设计参数.

**注 2** 本文设计了两组分数阶自适应律来更新系统的可调参数, 这两组自适应律可看做一种特殊的积分自适应律, 比如 (21) 等价于下面的方程

$$\begin{aligned}
 \theta_i(t) &= \theta_i(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \mu_i (t - \tau)^{\alpha-1} \\
 &\quad \times e_i(\tau) \psi_i(x(\tau)) d\tau. \tag{23}
 \end{aligned}$$

事实上, 上面的自适应律能保证两组参数的有界性, 对于这个问题的说明见定理 1.

**注 3** 在控制器 (20) 及参数自适应律 (21) 和 (22) 中, 设计参数  $k_i$  主要用来控制同步误差的收敛速度,  $k_i$  越大, 同步误差收敛速度越快;  $\mu_i, \sigma_i$  主要用来调节系统参数逼近最优值的速度, 参数越大逼近速度越快. 然而, 如果这些参数过大会使控制量增加, 增加控制器的负担. 所以, 需要根据实际情况设计合理的调节参数.

下面给出有关系统稳定性分析的一些结果. 首先进一步讨论比引理 2 形式更一般的 Lyapunov 函数  $x^T(t)Fx(t)$  (其中  $F$  为正定矩阵) 的性质 (参见文献 [37]).

**引理 4** 设  $x(t) \in R^n$  具有连续的一阶导数, 则

$$\frac{1}{2} {}_0^C D_t^\alpha x^T(t) F x(t) \leq x^T(t) F {}_0^C D_t^\alpha x(t), \tag{24}$$

其中  $F$  为任意的  $n$  阶正定矩阵.

**证明 1** 因为  $F$  为正定矩阵, 所以存在  $n$  阶非奇异的对称矩阵  $Q = Q^T$  使得  $F = Q^T Q$ . 由引理 2 得

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} {}_0^C D_t^\alpha x^T(t) F x(t) \\
 &= \frac{1}{2} {}_0^C D_t^\alpha (Q x(t))^T Q x(t) \\
 &\leq x^T(t) Q^T Q {}_0^C D_t^\alpha x(t) \\
 &= x^T(t) F {}_0^C D_t^\alpha x(t). \tag{25}
 \end{aligned}$$

在整数阶导数中, 如果一个函数的导数非负则此函数单调增加, 若导数非正则单调减少. 下面的引理说明这个结论对于分数阶导数仍然是成立的.

**引理 5 (分数阶单调性原理)** 若  ${}_0^C D_t^\alpha y(t) \leq 0$ , 则  $y(t)$  在  $[0, +\infty)$  上单调减少; 若  ${}_0^C D_t^\alpha y(t) \geq 0$ , 则  $y(t)$  在  $[0, +\infty)$  上单调增加.

**证明 2** 因为  ${}_0^C D_t^\alpha y(t) \leq 0$ , 所以存在非负函数  $h(t)$  使得

$${}_0^C D_t^\alpha y(t) + h(t) = 0. \tag{26}$$

对 (26) 式取 Laplace 变换有

$$Y(s) = \frac{y(0)}{s} - \frac{H(s)}{s^\alpha}, \tag{27}$$

其中  $Y(s)$  和  $H(s)$  分别为  $y(t)$  和  $h(t)$  的 Laplace 变换. 对 (27) 式取 Laplace 逆变换可得

$$y(t) = y(0) - {}_0^C D_t^{-\alpha} h(t). \tag{28}$$

所以当  $0 \leq t_1 < t_2$  时有

$$y(t_1) - y(t_2) = {}_{t_1}^C D_{t_2}^{-\alpha} h(t) \geq 0,$$

这就证明了  $y(t)$  在  $[0, +\infty)$  上单调减少. 用同样的方法可以证明定理的后半部分.

**引理 6** 设  $V_1(t) = \frac{1}{2} y_1^2(t) + \frac{1}{2} y_2^2(t)$ , 其中  $y_1(t)$  和  $y_2(t) \in R$  具有连续的一阶导数. 若存在常数  $k > 0$  使得

$${}_0^C D_t^\alpha V_1(t) \leq -k y_1^2(t), \tag{29}$$

则  $\|y_1(t)\|$  和  $\|y_2(t)\|$  有界且

$$y_1^2(t) \leq 2V_1(0) E_{\alpha,1}(-2kt^\alpha). \tag{30}$$

**证明 3** 由  ${}_0^C D_t^\alpha V_1(t) \leq -k y_1^2(t) \leq 0$  和引理 5 知  $\|y_1(t)\| \leq \sqrt{2V_1(0)}$  和  $\|y_2(t)\| \leq \sqrt{2V_1(0)}$ . 对 (29) 取  $\alpha$  阶积分得

$$V_1(t) - V_1(0) \leq -k {}_0^C D_t^{-\alpha} y_1^2(t). \tag{31}$$

进一步有

$$y_1^2(t) \leq 2V_1(0) - 2k_0^C D_t^{-\alpha} y_1^2(t). \quad (32)$$

于是存在非负的函数  $m(t)$  使得

$$y_1^2(t) + m(t) = 2V_1(0) - 2k_0^C D_t^{-\alpha} y_1^2(t). \quad (33)$$

对 (33) 式取 Laplace 变换可得

$$Y_1(s) = 2V_1(0) \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 2k} - 2 \frac{s^\alpha}{s^\alpha + 2k} M(s), \quad (34)$$

其中,  $Y_1(s)$  为  $y_1^2(t)$  的 Laplace 变换. 根据性质 (5), (34) 式的解为

$$y_1^2(t) = 2V_1(0) E_{\alpha,0}(-2kt^\alpha) - 2m(t) * [t^{-1} E_{\alpha,0}(-2kt^\alpha)], \quad (35)$$

其中 \* 为卷积. 注意到  $t^{-1}$  和  $E_{\alpha,0}(-2kt^\alpha)$  都是非负函数, 根据 (35) 式可知 (30) 式成立.

**注 4** 若  $y_1^2(t) \leq 2V_1(0) E_\alpha(-2kt^\alpha)$ , 则由文献 [2] 可知  $y_1(t)$  是 Mittag-Leffler 稳定的且  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_1(t)\| = 0$ .

采用证明引理 4 的方法, 可以将引理 6 推广如下:

**引理 7** 设

$$V_2(t) = \frac{1}{2} y_3^T(t) Q_1 y_3(t) + \frac{1}{2} y_4^T(t) Q_2 y_4(t),$$

其中  $y_1(t)$  和  $y_2(t) \in R^n$  具有连续的一阶导数,  $Q_1, Q_2 \in R^{n \times n}$  为两个正定矩阵. 若存在正定矩阵  $Q_3$  和常数  $h_0 > 0$  使得

$${}_0^C D_t^\alpha V_2(t) \leq -h_0 y_3^T(t) Q_3 y_3(t), \quad (36)$$

则  $\|y_3(t)\|$  和  $\|y_4(t)\|$  有界且  $y_3(t)$  渐近趋于 0 (即  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_3(t)\| = 0$ ).

本文的主要结果如下:

**定理 1** 给定初始条件且设假设 1 的条件成立. 在自适应模糊控制器 (20) 和分数阶自适应规则 (21) 和 (22) 的作用下可实现驱动系统 (11) 和响应系统 (12) 的同步, 并且闭环系统内所有的变量有界.

**证明 4** 注意到  $AA = I_{n \times n}$ , 把同步控制器 (20) 代入误差动态方程 (15) 得

$$P_0^C D_t^\alpha e(t) = -Ke(t) + \gamma(z(t)) - \theta^T(t)\psi(z(t)) - H\text{sign}(e(t)). \quad (37)$$

根据 (20) 式进一步有

$$P_0^C D_t^\alpha e(t) = -Ke(t) - \tilde{\theta}^T(t)\psi(z(t)) + \varepsilon(z(t)) - H\text{sign}(e(t)). \quad (38)$$

令模糊系统逼近误差上界  $\epsilon_i^*$  的估计误差为  $\tilde{\epsilon}_i^* = \hat{\epsilon}_i^* - \epsilon_i^*, i = 1, 2, \dots, n$ , 把方程 (38) 两边同时乘以  $e^T(t)$  得

$$\begin{aligned} & e^T(t) P_0^C D_t^\alpha e(t) \\ &= -e^T(t) Ke(t) - e^T(t) \tilde{\theta}^T(t) \psi(z(t)) \\ & \quad + e^T(t) \varepsilon(z(t)) - e^T(t) H\text{sign}(e(t)) \\ & \leq -e^T(t) Ke(t) - \sum_{i=1}^n e_i(t) \tilde{\theta}_i^T(t) \psi_i(z(t)) \\ & \quad + \sum_{i=1}^n |e_i(t)| \epsilon_i^* - \sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i^*(t) |e_i(t)| \\ &= -e^T(t) Ke(t) - \sum_{i=1}^n e_i(t) \tilde{\theta}_i^T(t) \psi_i(z(t)) \\ & \quad - \sum_{i=1}^n \tilde{\epsilon}_i^*(t) |e_i(t)|. \end{aligned} \quad (39)$$

构造 Lyapunov 函数如下:

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{2} e^T(t) P e(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu_i} \tilde{\theta}_i^T(t) \tilde{\theta}_i(t) \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i} \tilde{\epsilon}_i^{*T}(t) \tilde{\epsilon}_i^*(t). \end{aligned} \quad (40)$$

因为常数的  $\alpha$  阶 Caputo 导数为 0, 所以有  ${}_0^C D_t^\alpha \tilde{\theta}_i(t) = {}_0^C D_t^\alpha \theta_i(t), {}_0^C D_t^\alpha \tilde{\epsilon}_i^*(t) = {}_0^C D_t^\alpha \epsilon_i^*(t), i = 1, 2, \dots, n$ . 根据引理 2 和引理 4, 对  $V(t)$  取  $\alpha$  阶导数得

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha V(t) & \leq e^T(t) P_0^C D_t^\alpha e(t) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu_i} \tilde{\theta}_i^T(t) {}_0^C D_t^\alpha \theta_i(t) \\ & \quad + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i} \tilde{\epsilon}_i^{*T}(t) {}_0^C D_t^\alpha \epsilon_i^*(t). \end{aligned} \quad (41)$$

把 (39) 式和自适应律 (21)、(22) 代入 (41) 式, 经过一些简单的推导可得

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha V(t) & \leq -e^T(t) Ke(t) \\ & \leq -\frac{k_0}{\lambda_{\max}} e^T(t) P e(t), \end{aligned} \quad (42)$$

其中  $k_0 = \min\{k_1, k_2, \dots, k_n\}, \lambda_{\max}$  为正定矩阵  $P$  的最大特征值. 由 (42) 式和引理 7 可知同步误差  $e(t)$  渐近趋于 0, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0. \quad (43)$$

由引理 5 可知  $\tilde{\theta}_i(t), \tilde{\epsilon}_i^*(t)$  有界, 进一步  $\theta_i(t), \epsilon_i^*(t)$  有界. 由于驱动系统 (11) 是混沌系统, 所以  $x(t)$  有界, 又  $e(t)$  有界, 所以  $y(t)$  有界. 由同步控制器 (20) 可知  $u(t)$  有界. 所以, 闭环系统所有信号都是有界的. 定理 1 证毕.

**注5** 本文应用自适应模糊控制实现了未知分数阶混沌系统的同步, 并对系统的稳定性给出了严格的证明. 需要指出的是, 在一些相关文献中运用模糊控制方法控制分数阶系统的时候存在一些问题, 本文列举如下:

1) 在文献[35]中(32)式(pp. 551)中作者定义 Lyapunov 函数的一项  $\frac{1}{2}e^T(t)Pe(t)$ , 在(33)式的运算中给出其分数阶导数为  $\frac{1}{2}({}_0^C D_t^q e(t))^T Pe(t) + \frac{1}{2}e(t)P({}_0^C D_t^q e(t))$ ,  $q$  为分数阶导数, 是不正确的. 事实上, 平方 Lyapunov 函数的分数阶导数是个复杂的无穷级数:

$$\begin{aligned} & {}_0^C D_t^\alpha 2x^T(t)x(t) \\ &= ({}_0^C D_t^\alpha x(t))^T x(t) + x^T(t) {}_0^C D_t^\alpha x(t) \\ &+ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+k)\Gamma(1-k+\alpha)} \\ &\times {}_0^C D_t^k x(t) {}_0^C D_t^{\alpha-k} x(t), \end{aligned}$$

这也是文献[33, 34]指出分数阶系统的稳定性分析中利用平方 Lyapunov 函数是非常困难的主要原因. 但是本文利用的相关引理避开了处理这个复杂无穷级数.

2) 文献[36]利用自适应模糊滑模控制研究了分数阶混沌系统的同步, 在稳定性分析中用的是整数阶 Lyapunov 方法. 论文中用的分数阶定义为 R-L 定义, (21)式(pp. 793)中  $\dot{s}(t) = {}_0^R D_t^{1-q} {}_0^R D_t^q s(t)$  也是不正确的, 此公式对 R-L 分数阶导数来说只有当系统的初值为0时才成立.

**注6** 类似于整数阶系统的稳定性分析, 在定理1的证明中主要利用了平方 Lyapunov 函数. 在文献[2]和[34]中, 讨论形式上非常简单的分数阶非线性系统  ${}_0^C D_t^\alpha x(t) = -ax^3(t)$  (其中  $0 < \alpha < 1$ ,

$x(t) \in R, a > 0$ ) 的稳定性时也用了很长的篇幅. 事实上, 构造 Lyapunov 函数  $V(t) = \frac{1}{2}x^2(t)$ , 利用引理2很容易就能得出系统  ${}_0^C D_t^\alpha x(t) = -ax^3(t)$  是渐近稳定的. 根据本文的方法, 很多适用于整数阶系统的控制方法可以推广到分数阶系统中来.

### 4 数值仿真

仿真中驱动系统取为分数阶推广的 Lotka-Volterra 系统[39], 响应系统设为 Lü 系统[40, 41]. 对应的非线性函数分别为

$$\begin{aligned} f(x(t)) &= \begin{pmatrix} x_1(t) - x_1(t)x_2(t) + 2x_1^2(t) - 2.7x_3(t)x_1^2(t) \\ -x_2(t) + x_1(t)x_2(t) \\ -3x_3(t) + 2.7x_3(t)x_1^2(t) \end{pmatrix}, \\ g(y(t)) &= \begin{pmatrix} -36y_1(t) + 36y_2(t) \\ 20y_2(t) - y_1(t)y_3(t) \\ -3y_3(t) + y_1(t)y_2(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

取控制增益矩阵

$$G = \begin{pmatrix} 3 & -0.4 & 1 \\ -0.5 & 2 & -0.6 \\ 0.2 & 0.5 & 1.5 \end{pmatrix}.$$

可以看出  $G$  是非对称矩阵且  $G$  的各阶顺序主子式分别为 3, 6.2, 8.9880 (满足假设1的条件). 所以根据引理3,  $A = \text{diag}[1, 1, 1]$ . 驱动系统和响应系统的初值条件分别设为  $x(0) = [1, 1.4, 1]^T$ ,  $y(0) = [-1, -2, 3.5]^T$ . 当  $u(t) \equiv 0$  时两系统当阶数  $\alpha = 0.95$  时表现出混沌现象 (见图1).

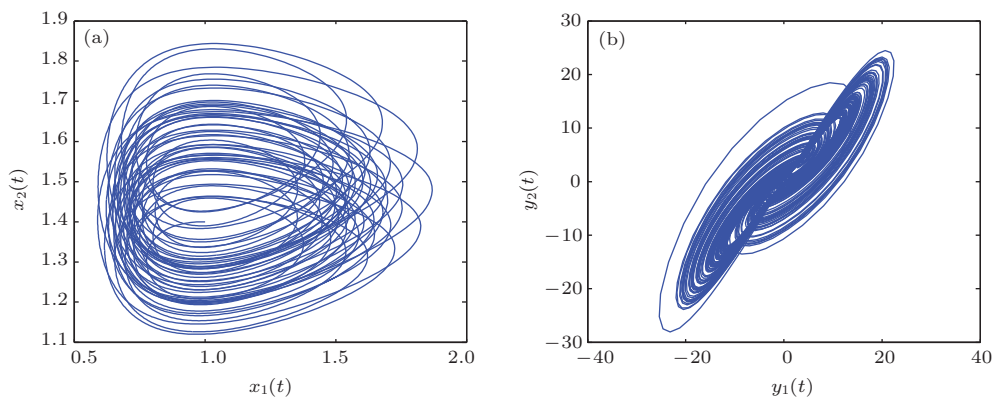


图1 混沌系统 (a) 推广的分数阶 Lotka-Volterra 系统; (b) 分数阶 Lü 系统

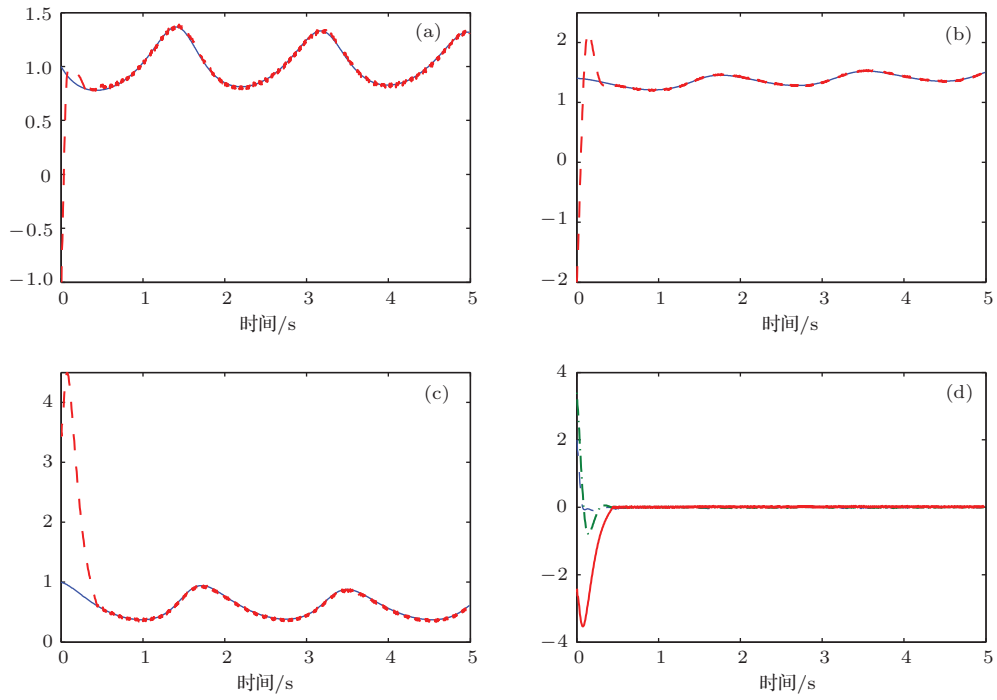


图2 (网刊彩色) 同步结果 (a)  $x_1(t)$ (实线) 和  $y_1(t)$ (虚线); (b)  $x_2(t)$ (实线) 和  $y_2(t)$ (虚线); (c)  $x_3(t)$ (实线) 和  $y_3(t)$ (虚线); (d) 同步误差  $e_1(t)$  (虚线),  $e_2(t)$  (点划线) 和  $e_3(t)$  (实线)

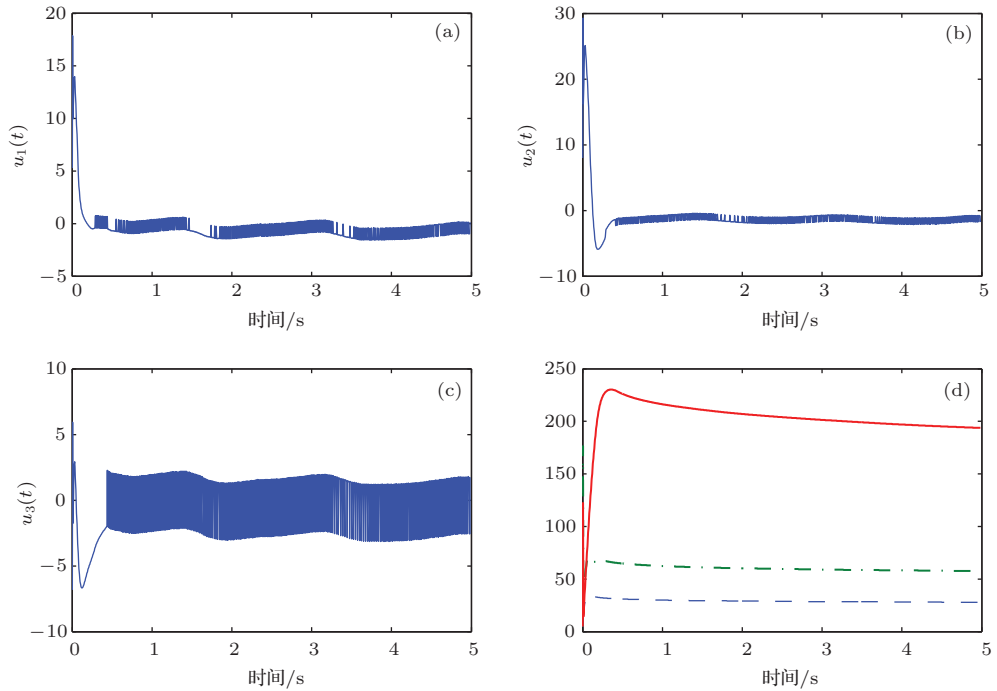


图3 控制量和模糊系统参数 (a)  $u_1(t)$ ; (b)  $u_2(t)$ ; (c)  $u_3(t)$ ; (d)  $\|\theta_1(t)\|$  (虚线),  $\|\theta_2(t)\|$  (点划线) 和  $\|\theta_3(t)\|$  (实线)

模糊系统的输入变量为  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $u(t)$ . 为了减少模糊系统的运算, 在仿真中我们用  $e(t)$  代替  $x(t)$  和  $y(t)$ . 对于  $e_1(t)$ ,  $e_2(t)$  和  $e_3(t)$ , 本文各选取了4个均匀分布在区间  $[-3, 3]$  上的高斯型模糊隶属函数(即它们的数学期望分别为  $-3, -1, 1, 3$ ), 它们的参数为  $\{[1.2], [-3, -1, 1, 3]\}$ . 对于控制量

$u_1(t)$  (reap.,  $u_2(t)$ ,  $u_3(t)$ ), 我们定义了4个均匀分布在区间  $[-5, 15]$  (reap.,  $[-5, 15]$ ,  $[-5, 5]$ ) 上的高斯型模糊隶属函数, 它们的第一个参数为  $2.5$ ,  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  对应的隶属函数第二个参数为  $[-4, 2, 8, 14]$ ,  $u_3(t)$  对应的隶属函数第二个参数为  $[-4, -1, 2, 5]$ . 于是在模糊系统参与逼近运算的模糊规则数为



$4^6 = 4096$ . 模糊系统参数的初值  $\theta_1(0)$ ,  $\theta_2(0)$  和  $\theta_3(0)$  均选为 4096 维的随机向量. 这里给出系统的模型是为了仿真的需要, 在控制器的设计中不需要用到系统的模型.

控制器其他的参数为  $k_i = 5$ ,  $\sigma_i = 0.8$ ,  $\mu_i = 700$ ,  $i = 1, 2, 3$ . 模糊系统逼近误差的估计值初值为  $\hat{\epsilon}_1^*(0) = \hat{\epsilon}_2^*(0) = 1$ ,  $\hat{\epsilon}_3^*(0) = 1.5$ .

仿真结果见图 2 和图 3. 正如注 3 所述, 对控制器设计参数的选取应尽可能使收敛速度快, 同时控制量不宜过大. 参数  $\mu_i$  选的比较大小是为了让模糊逻辑系统快速调整; 参数  $k_i$ ,  $\sigma_i$  选的比较小, 但从图 2 可看出同步误差收敛速度较快, 说明设计的模糊系统具有良好的逼近性能. 图 3 给出了控制输入及模糊系统参数的变化情况. 由于控制器 (20) 中含有符号函数, 所以仿真结果产生抖动现象, 但是三个控制量振幅较小, 并快速收敛到 0 的某个小邻域. 图 3 (d) 给出的是模糊系统参数的变化情况, 虽然参数  $\mu_i$  选的比较大小, 但是  $\|\theta_i(t)\|$  值振幅不大, 变化平稳. 从仿真结果可看出本文控制方法取得了较好的同步效果.

## 5 结 论

基于分数阶 Lyapunov 稳定性理论设计自适应模糊同步控制器和分数阶参数自适应律, 实现了带有非对称控制增益的未知混沌系统的同步. 本文的方法不需要知道被控对象的精确模型, 有较强的抗干扰能力. 成功的利用平方 Lyapunov 函数的分数阶导数讨论了系统的稳定性并分析了一些文献在利用模糊控制实现分数阶混沌系统控制的过程中存在的一些问题. 利用本文的方法, 很多整数阶混沌系统控制和同步的方法可以推广到分数阶系统中来. 需要指出的是因为在控制器中存在符号函数, 控制有抖动现象. 如何消除抖动以及在更严格控制输入条件下 (如饱和、死区等) 实现分数阶混沌系统的自适应模糊控制是尚需进一步研究.

## 参考文献

- [1] Podlubny I 1999 *Fractional differential Equations* (New York: Academic Press)
- [2] Li Y, Chen Y Q, Podlubny I 2009 *Automatica* **45** 3690
- [3] Wang D F, Zhang J Y, Wang X Y 2013 *Chin. Phys. B* **22** 100504

- [4] Yuan L G, Yang Q G 2012 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **17** 305
- [5] Li R, Zhang G J, Yao H, Zhu T, Zhang Z H 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 230501 (in Chinese) [李睿, 张广军, 姚宏, 朱涛, 张志浩 2014 物理学报 **63** 230501]
- [6] Aghababa M P 2012 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **17** 2670
- [7] Mahmoud G M, Mahmoud E E 2012 *Nonlinear Dyn.* **67** 1613
- [8] Kim S H, Park P, Jeong C 2010 *IET Control Theory Appl.* **4** 1828
- [9] Kiani B A, Fallahi K, Pariz N, Leung H 2009 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **14** 863
- [10] Ma S Q, Lu Q S, Feng Z S 2010 *Int. J. Nonlinear Mech.* **45** 659
- [11] Li Z J, Zeng Y C 2013 *Chin. Phys. B* **22** 040502
- [12] Zhou P, Ding R, Cao Y X 2012 *Nonlinear Dyn.* **70** 1263
- [13] Huang L L, Qi X 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 080507 (in Chinese) [黄丽莲, 齐雪 2013 物理学报 **62** 080507]
- [14] Zhang R X, Yang S P 2010 *Chin. Phys. B* **19** 020510
- [15] Yang L X, Jiang J 2014 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **19** 1496
- [16] Liu J G, Huang L H, Meng Y M 2013 *Int. J. Adapt. Control Signal Process.* **27** 1086
- [17] Hosseinnia S H, Ghaderi R, Ranjbar A N, Mahmoudiana M, and Momanic S 2010 *Computers and Mathematics with Applications* **59** 1637
- [18] Yin C, Dadras S, and Zhong S M 2012 *Journal of the Franklin Institute* **349** 2078
- [19] Pan L, Zhou W N, Fang J A, Li D Q 2010 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **15** 3754
- [20] Senol B, Ates A, Alagoz B B, Yeroglu C 2014 *ISA Transactions* **53** 189
- [21] Essounbouli N, Hamzaoui A, Zaytoon J 2006 *Control Intell. Systems* **34** 12
- [22] Tong S C, Tang J, Wang T 2000 *Fuzzy Sets and Systems* **111** 153
- [23] Tong S C, He X L, Zhang H G 2009 *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **17** 1059
- [24] Boulkroune A, Tadjine M, M' Saad M, Farza M 2010 *Fuzzy Sets and Systems* **161** 797
- [25] Tong S C, Liu C L, Li Y M 2010 *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **18** 845
- [26] Liu H, Yu H J, Xiang W 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 180503 (in Chinese) [刘恒, 余海军, 向伟 2012 物理学报 **61** 180503]
- [27] Tong S C, Li Y M 2012 *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **20** 168
- [28] Liu H, Yu H J, Xiang W 2012 *Chin. Phys. B* **21** 120505
- [29] Pan Y P, Er M J 2013 *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **21** 1123
- [30] Tong S C, Li Y M 2013 *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **21** 134
- [31] Yang Y, Hua C C, Guan X P 2014 *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **22** 631
- [32] Wang L X 1994 *Adaptive Fuzzy Systems and Control: Design and Stability Analysis* (Englewood Cliffs: Prentice Hall) pp120-144
- [33] Trigeassou J C, Maamri N, Sabatier J, Oustaloup A 2011 *Signal Processing* **91** 437
- [34] Shen J, Lam J 2014 *Automatica* **50** 547
- [35] Lin T C, Kuo C H 2011 *ISA Transactions* **50** 548

- [36] Lin T C, Lee T Y, Balas V E 2011 *Chaos, Solitons & Fractals* **44** 791
- [37] Aguila-Camacho N, Duarte-Mermoud M A, Gallegos J A 2014 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **19** 2951
- [38] Costa P R, Hsu L, Imai A K, Kokotovic P 2003 *Automatica* **39** 1251
- [39] Ahmed E, El-Sayed A M A, El-Saka H A A 2007 *J. Math. Anal. Appl.* **325** 542
- [40] Lü J H, Chen G R, Yu X H, Leung H 2004 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **51** 2476
- [41] Lü J H, Yu S M, Leung H, Chen G R 2006 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **53** 149

## Adaptive fuzzy synchronization for uncertain fractional-order chaotic systems with unknown non-symmetrical control gain\*

Liu Heng<sup>1)2)</sup> Li Sheng-Gang<sup>1)†</sup> Sun Ye-Guo<sup>2)</sup> Wang Hong-Xing<sup>2)</sup>

1) (College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, China)

2) (Department of Mathematics and Computational Science, Huainan Normal University, Huainan 232038, China)

( Received 21 October 2014; revised manuscript received 5 November 2014 )

### Abstract

In this paper the synchronization problem for the uncertain fractional-order chaotic systems with unknown non-symmetrical control gain matrices is investigated by means of adaptive fuzzy control. Fuzzy logic systems are employed to approximate the unknown nonlinear functions. We decompose the control gain matrix into a positive definite matrix, a unity upper triangular matrix, and a diagonal matrix with diagonal entries  $+1$  or  $-1$ . The positive matrix is used to construct the Lyapunov function; the diagonal matrix is employed to design the controller. Based on the fractional Lyapunov stability theorem, an adaptive fuzzy controller, which is accompanied by fractional adaptation laws, is established. The proposed methods can guarantee the boundedness of the involved signals as well as the asymptotical convergence of the synchronization errors. It should be pointed out that the methods for using quadratic Lyapunov function in the stability analysis of the fractional-order chaotic systems are developed in this paper. Based on the results of this paper, many control methods which are valid for integer-order nonlinear systems can be extended to control fractional-order nonlinear systems. Finally, the effectiveness of the proposed methods is shown by simulation studies.

**Keywords:** fractional chaotic system, adaptive fuzzy control, fractional adaptation law

**PACS:** 05.45.Pq, 05.45.Xt

**DOI:** 10.7498/aps.64.070503

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11401243, 61403157), and the Fundamental Research Funds for the Central Universities (Grant No. GK201504002).

† Corresponding author. E-mail: [shengganglinew@126.com](mailto:shengganglinew@126.com)