

具有时滞反馈的非对称双稳系统中的振动共振研究

杨秀妮 杨云峰

Vibrational resonance in an asymmetric bistable system with time-delay feedback

Yang Xiu-Ni Yang Yun-Feng

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 070507 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.070507

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.070507>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I7>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

外加磁场压电悬臂梁能量采集系统的磁化电流法磁力研究

Magnetic force of piezoelectric cantilever energy harvesting system with an externally applied magnetic field based on magnetizing current method

物理学报.2015, 64(6): 060502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.060502>

单周期控制三电平 Boost 功率因数校正变换器的慢尺度分岔分析

Analysis on the slow-scale bifurcation behaviors of one-cycle-controlled three-level Boost power factor correction converter

物理学报.2015, 64(4): 040502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.040502>

一种改进的高性能 Lorenz 系统构造及其应用

An improved high performance Lorenz system and its application

物理学报.2015, 64(2): 020501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.020501>

$\alpha$  稳定噪声驱动的非对称双稳随机共振现象

Stochastic resonance of asymmetric bistable system with  $\alpha$  stable noise

物理学报.2015, 64(2): 020502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.020502>

脉冲序列控制双断续导电模式 BIFRED 变换器的动力学建模与多周期行为

Dynamical modeling and multi-periodic behavior analysis on pulse train controlled DCM-DCM BIFRED converter

物理学报.2015, 64(1): 010501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.010501>

# 具有时滞反馈的非对称双稳系统中的振动共振研究\*

杨秀妮 杨云峰†

(西安科技大学理学院, 西安 710054)

(2014年10月16日收到; 2015年1月7日收到修改稿)

研究了具有时滞反馈的非对称双稳系统中的振动共振现象. 在绝热近似条件下, 应用快慢变量分离法得到系统响应振幅的解析表达式  $Q$ , 分析了时滞参数  $\alpha$  和不对称参数  $r$  对振动共振现象的影响. 结果表明: 在  $Q$ - $\alpha$  平台上,  $\alpha$  可以诱导响应幅值的极大值以输入高频信号和低频信号的周期出现. 不对称参数并不影响共振发生的位置, 但是能够增强响应幅值. 在  $Q$ - $B$  ( $B$  为高频信号振幅) 平台上, 共振发生的位置  $B_{VR}$  随着  $\alpha$  呈现两种不同的周期关系, 且周期分别为输入高频信号和低频信号的周期. 在  $Q$ - $\Omega$  ( $\Omega$  高频信号频率) 平台上, 随着时滞参数的增大, 当  $B$  较小时, 在  $\Omega$  的小值区间内,  $Q$  呈现出多重共振现象, 在  $\Omega$  的大值区间,  $Q$  趋于定值.

**关键词:** 时滞, 非对称双稳系统, 振动共振

**PACS:** 05.45.-a, 05.90.+m

**DOI:** 10.7498/aps.64.070507

## 1 引言

近年来, 非线性系统中的振动共振现象引起了广泛的关注. 振动共振是指非线性系统在高频信号与低频信号的激励下, 其响应在低频信号频率处的幅值随加入高频信号幅值或者高频信号的频率的变化呈现非线性关系(曲线呈现倒钟形). 振动共振定义最早由 Landa 和 McClintock 根据数值结果给出<sup>[1]</sup>, Gitterman 紧接着用解析法<sup>[2]</sup>给出了振动共振相关原理的证明. 随后相关实验<sup>[3-7]</sup>也证实了振动共振的存在. 振动共振与随机共振非常类似, 其区别为驱动力不同, 振动共振的驱动力为高频信号, 随机共振的驱动力为噪声. 由于高频信号是确定的, 非常便于控制. 因此, 振动共振在物理学, 工程学, 生物学等学科都有广泛的应用. 目前, 许多学者从理论, 数值和实验方面对一些非线性动力学系统中的振动共振现象进行了研究. 例如, 双稳系统<sup>[1,2,7,8]</sup>, 多稳系统<sup>[9-11]</sup>, Duffing 振子

系统<sup>[12-14]</sup>, 五次方振子系统<sup>[15-17]</sup>, 六次方振子系统<sup>[18]</sup>, 神经网络动力系统<sup>[19-21]</sup>, 基因调控网络<sup>[22]</sup>等等. 此外, 振动共振现象也被应用生态领域<sup>[23]</sup>.

时滞普遍存在于自然界的许多系统中, 它能够更加真实的反映自然界中许多系统的特征. 在很多的情形下, 时滞反映了通过系统输运有关的物质, 能量, 信息的传输时间, 振幅的有限转换速度, 有限反应时间, 记忆效应等等. 时滞能够在非线性动力学系统中诱发很多有趣的现象. 例如: 振幅死亡<sup>[24]</sup>, 重入现象<sup>[25]</sup>, 基因开关的转换<sup>[26]</sup>等等. 然而, 时滞对振动共振的研究刚刚开始, 大部分研究依赖于数值模拟. 杨建华等首先应用数值模拟的方法研究了耦合和非耦合双稳系统的振动共振, 发现了多重共振现象, 响应幅值分别以高频信号周期和低频信号周期出现<sup>[11,27,28]</sup>. 随后, 时滞对振动共振的研究被关注. 时滞对分立神经元系统<sup>[29]</sup>, 多稳系统<sup>[30]</sup>, 基因转换系统<sup>[31]</sup>, FitzHugh-Nagumo 系统的振动共振的影响<sup>[32]</sup>等

\* 国家自然科学基金(批准号: 71103143)和陕西省科学技术研究发展计划项目(批准号: 2013KJXX-40)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: yang2014xian@126.com

大量工作已经被完成, 很多有意义的现象被发现. 然而, 值得注意的是这些研究结果都是基于数值模拟的基础上完成的. 最近, 文献[33]从理论角度系统研究了具有时滞反馈的Duffing振子中的振动共振. 但是对应的势函数是对称势阱. 众所周知, 不对称势阱在自然界广泛存在, 系统的不对称性对系统的动力学性质产生影响, 可以诱导很多有意义的现象. 例如: 在不对称随机双稳系统中, 不对称性可以加速粒子从右势阱逃离, 而阻止粒子从左势阱逃离[34]. 不对称性的增加可以弱化系统的随机共振[35]. 带有不同势函数的不对称过阻尼双稳系统中的振动共振现象已经被研究. 势阱形式有  $V(x) = -(1/2)\alpha x^2 + (1/4)\beta x^4 - \gamma x$ [6],  $V(x) = 4(x - x^3) + \Delta$ [36] 和  $V(x) = (1/2)\omega_0^2 x^2 + (1/3)\alpha x^3 + (1/4)\beta x^4$ [37]. 然而, 时滞对不对称双稳系统中的振动共振还没有被很好的研究. 由于不对称性的改变会导致系统势阱形状的变化, 改变势阱的深度和最小值的位置, 因此时滞对不对称双稳系统中的振动共振的影响值得探索.

基于以上考虑, 本文以文献[6]的模型为基础, 将线性时滞反馈引入该模型, 研究了时滞对非对称双稳系统的振动共振现象. 在绝热近似下, 应用分离快慢变量的方法, 得到了非对称双稳系统中振动共振的响应幅值的解析表达式. 根据解析表达式, 讨论了时滞和不对称性对响应幅值位置的影响.

## 2 振动共振

本文研究的模型是由低频信号  $A \cos(\omega t)$  和高频信号  $B \cos(\Omega t)$  激励的具有时滞反馈非对称双稳系统. 其运动方程如下:

$$\frac{dx}{dt} = x(t - \alpha) - x^3 - r + A \cos(\omega t) + B \cos(\Omega t), \quad (1)$$

其中  $\alpha$  为延迟时间,  $r$  为不对称参数.  $A \cos(\omega t)$  为低频信号,  $A$  为低频信号振幅,  $\omega$  为低频信号的频率.  $B \cos(\Omega t)$  为高频信号,  $B$  为高频信号振幅,  $\Omega$  为高频信号的频率. 且满足  $A \ll 1$  和  $\Omega \gg \omega$ .

在不考虑延迟和信号激励的情况下, 由方程(1)可知该系统的确定性势函数为

$$V(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + rx, \quad (2)$$

$V(x)$  代表一个非对称双稳势阱. 通过求解  $V'(x) = 0$ , 在  $0 < r < 2\sqrt{3}/9$  可得系统的两个稳态解和一

个不稳态解,

$$\begin{aligned} x_+ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}r\right)\right), \\ x_- &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}r\right) + \frac{2\pi}{3}\right), \\ x_u &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}r\right) - \frac{2\pi}{3}\right). \end{aligned} \quad (3)$$

这里  $x_{\pm}$  为两个稳态解,  $x_u$  为不稳态解. 不对称参数  $r$  取不同值时, 势函数  $V(x)$  作为  $x$  的函数如图1所示. 从图1可以看出随着  $r$  的增加, 左边的势阱下降, 右边的势阱上升, 当  $r > 2\sqrt{3}/9$  时, 右边的势阱消失.

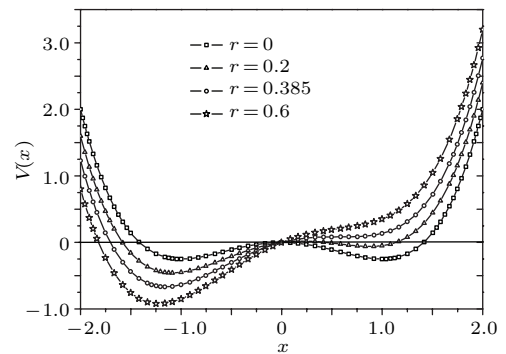


图1  $V(x)$  作为  $x$  的函数, 不对称参数  $r$  为 0, 0.2, 0.385, 0.6

由于  $\Omega \gg \omega$ , 因此低频信号  $A \cos(\omega t)$  的周期  $2\pi/\omega$  远远大于和 高频信号  $B \cos(\Omega t)$  的周期  $2\pi/\Omega$ , 低频信号  $A \cos(\omega t)$  和 高频信号  $B \cos(\Omega t)$  具有不同的时间标度. 基于以上考虑, 可假设该运动包含一个周期为  $2\pi/\Omega$  的快运动  $\Psi(t)$  和一个周期为  $2\pi/\omega$  的慢运动  $X(t)$ . 应用快慢分离变量法[2,23]可以消去方程(1)中的快变量. 设方程(1)的解  $x(t)$  表示为

$$x(t) = X(t) + \Psi(t). \quad (4)$$

将方程(4)代入到方程(1), 有

$$\begin{aligned} &\dot{X} + \dot{\Psi} \\ &= X(t - \alpha) + \Psi(t - \alpha) - X^3 \\ &\quad - 3X^2\Psi - 3X\Psi^2 - \Psi^3 - r + A \cos(\omega t) \\ &\quad + B \cos(\Omega t). \end{aligned} \quad (5)$$

这里  $\frac{1}{T} \int_0^T \Psi(t) dt = 0$ ,  $\left(T = \frac{2\pi}{\Omega}\right)$ . 对方程(5)两边在周期  $T$  内做时间平均, 得到

$$\begin{aligned} \dot{X} &= X(t - \alpha) - X^3 - 3X\overline{\Psi^2} - \overline{\Psi^3} \\ &\quad - r + A \cos(\omega t), \end{aligned} \quad (6)$$

这里  $\overline{\Psi^k} = \frac{1}{T} \int_0^T \Psi^k(t) dt$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , 方程 (5) 减去方程 (6) 得到

$$\dot{\Psi} = \Psi(t - \alpha) - 3X^2\Psi - 3X(\Psi^2 - \overline{\Psi^2}) - (\Psi^3 - \overline{\Psi^3}) + B \cos(\Omega t). \quad (7)$$

考虑  $\Psi$  是变化非常快的运动, 所以假设  $\dot{\Psi} \gg \Psi, \Psi^2, \Psi^3$ . 因此可以忽略掉方程 (7) 中的非线性项, 方程 (7) 可以近似为

$$\dot{\Psi} = \Psi(t - \alpha) + B \cos(\Omega t). \quad (8)$$

当  $t \rightarrow \infty$  时, 方程 (8) 的解为

$$\Psi = \frac{B}{\mu} \cos(\Omega t + \Phi), \quad (9)$$

其中

$$\mu^2 = (-\cos(\Omega\alpha))^2 + (-\Omega - \sin(\Omega\alpha))^2 \quad (10)$$

和

$$\Phi = \tan^{-1} \left( \frac{-\Omega - \sin(\Omega\alpha)}{-\cos(\Omega\alpha)} \right). \quad (11)$$

当  $\Omega$  足够大时, 可以对方程 (10) 进一步简化, 这里为了提高解析解的精确度, 我们保留这些项. 则  $\mu$  为时滞参数  $\alpha$  的周期函数, 且周期为  $2\pi/\Omega$ . 根据方程 (9) 可以得到  $\overline{\Psi^2} = \frac{B^2}{2\mu^2}$ ,  $\overline{\Psi^3} = 0$ . 则方程 (6) 变为

$$\dot{X} = X(t - \alpha) - X^3 - CX - r + A \cos(\omega t), \quad (12)$$

其中  $C = \frac{3B^2}{2\mu^2}$ . 方程 (12) 的有效势函数为

$$V_{\text{eff}}(X) = -\frac{(1-C)X^2}{2} + \frac{X^4}{4} + rX. \quad (13)$$

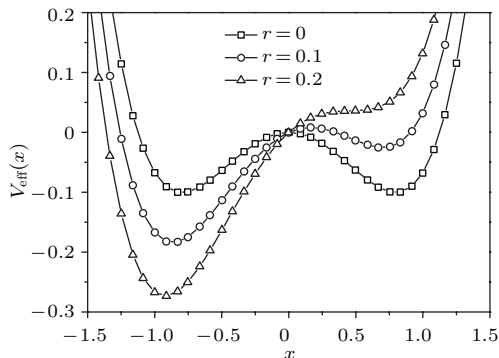


图2 有效势函数  $V_{\text{eff}}(X)$  随着  $r = 0, 0.1, 0.2$  的变化关系. 其他参数为  $B = 2, \Omega = 5, \alpha = 1$

图2为  $V_{\text{eff}}(X)$  随  $r$  的变化关系. 这里我们关心的是双稳情形. 比较方程 (13) 和方程 (2), 两者的形

式非常相似. 为了保证双稳形式, 方程 (13) 中的高频信号振幅  $B$ , 不对称参数  $r$ , 高频信号频率  $\Omega$ , 时滞参数  $\alpha$  必须满足  $r < r_c$ , 这里

$$\begin{aligned} r_c &= \frac{2}{9} \sqrt{3(1-C)^3} \\ &= \frac{2}{9} \sqrt{3} \\ &\times \left[ 1 - \frac{3B^2}{2((\cos(\Omega\alpha))^2 + (\Omega + \sin(\Omega\alpha))^2)} \right]^{3/2}. \end{aligned} \quad (14)$$

当  $A = 0, r < r_c$  时, 方程 (12) 的有三个平衡点,

$$\begin{aligned} X_+ &= \frac{2\sqrt{3(1-C)}}{3} \\ &\times \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( -\frac{3\sqrt{3}r}{2(1-C)^{3/2}} \right) \right], \\ X_- &= \frac{2\sqrt{3(1-C)}}{3} \\ &\times \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( -\frac{3\sqrt{3}r}{2(1-C)^{3/2}} \right) + \frac{2\pi}{3} \right], \\ X_u &= \frac{2\sqrt{3(1-C)}}{3} \\ &\times \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( -\frac{3\sqrt{3}r}{2(1-C)^{3/2}} \right) - \frac{2\pi}{3} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

而慢振荡发生在平衡点  $X_s = X_{\pm}$ . 假设系统围绕  $X_s$  做小幅度的周期运动. 我们令  $Y = X - X_s$ , 代入到方程 (12), 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= Y(t - \alpha) - \omega_r^2 Y - 3X_s Y^2 - Y^3 \\ &+ A \cos(\omega t), \end{aligned} \quad (16)$$

其中

$$\omega_r^2 = C + 3X_s^2, \quad (17)$$

$Y$  为慢运动  $X$  偏离平衡点  $X_s$  的程度, 一般很小. 同时慢运动  $X$  与低频信号  $A \cos(\omega t)$  有关. 所以在  $A \ll 1$  和  $Y \ll 1$  的条件下抛掉高阶项, 得到

$$\dot{Y} = Y(t - \alpha) - \omega_r^2 Y + A \cos(\omega t). \quad (18)$$

当  $t \rightarrow \infty$  时, 方程 (18) 的解为

$$Y(t) = A_L \cos(\omega t + \phi), \quad (19)$$

其中

$$A_L = \frac{A}{\sqrt{(\omega_r^2 - \cos(\omega\alpha))^2 + (-\omega - \sin(\omega\alpha))^2}}, \quad (20)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{-\omega - \sin(\omega\alpha)}{\omega_r^2 - \cos(\omega\alpha)} \right). \quad (21)$$

一般用响应幅值来衡量低频信号通过非线性系统后被放大的倍数, 响应幅值的定义为

$$Q = \frac{A_L}{A} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_r^2 - \cos(\omega\alpha))^2 + (-\omega - \sin(\omega\alpha))^2}}. \quad (22)$$

从方程(22)可以看出响应幅值 $Q$ 是关于时滞参数 $\alpha$ 的周期函数.  $Q$ 表达式中的 $\omega_r^2$ 为时滞参数 $\alpha$ 的周期函数, 周期为 $\frac{2\pi}{\Omega}$ .

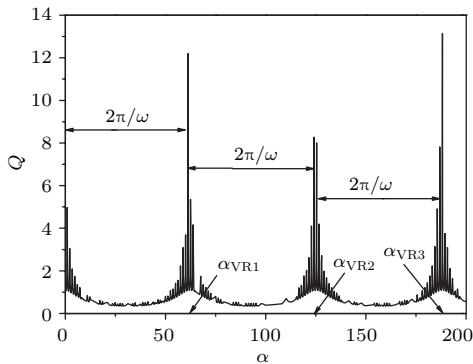


图3 响应幅值 $Q$ 作为时滞参数 $\alpha$ 的函数, 时滞参数取值较大( $\alpha > 2\pi/\omega$ ) (其他参数为:  $\Omega = 5, B = 2, \omega = 0.1, r = 0.19$ )

### 3 讨论

根据响应幅值 $Q$ 的表达式(方程(22)), 可以讨论高频振幅 $B$ , 时滞参数 $\alpha$ , 不对称参数 $r$ 和高频信号频率 $\Omega$ 对响应幅值的影响. 在下面的讨论中我们令 $X_s = X_+$ .

首先我们讨论非对称参数 $r$ 和时滞参数 $\alpha$ 的影响. 图3给出了时滞时间较长( $\alpha > 2\pi/\omega$ )时, 响应幅值 $Q$ 作为时滞参数 $\alpha$ 的函数, 从图中可以看出,  $Q(\alpha)$ 函数中出现极大值 $Q_m$ 的位置呈现出等间隔分布, 且周期为 $2\pi/\omega$ . 按照图3给定的参数, 在 $\alpha_{VR1} = 61.24903, \alpha_{VR2} = 124.06157, \alpha_{VR3} = 186.89044$ 处 $Q$ 达到极大值 $Q_m$ , 我们发现 $\alpha_{VR3} - \alpha_{VR2} \approx \alpha_{VR2} - \alpha_{VR1} \approx 2\pi/\omega = 62.8$ . 图4给出了时滞时间较小( $\alpha \in [0, 2\pi/\omega]$ )时, 响应幅值 $Q$ 作为时滞参数 $\alpha$ 的函数, 从图4中可以看出,  $Q(\alpha)$ 函数中出现极大值 $Q_m$ 的位置呈现出等间隔分布, 但是周期为 $2\pi/\Omega$ . 按照图4给出的参数,  $\alpha_{VR3} - \alpha_{VR2} \approx \alpha_{VR2} - \alpha_{VR1} \approx 2\pi/\Omega = 1.256$ . 此外, 非对称参数 $r$ 的影响也被呈现在图4中. 随

着 $r$ 的增大,  $Q_m$ 对应的 $\alpha_{VR}$ 的位置并不受影响, 这也就是说 $r$ 不会改变 $Q$ 随 $\alpha$ 变化的周期性. 但是观察图4的纵坐标, 发现随着 $r$ 的增大, 相同位置处的 $Q_m$ 增大. 图5给出图4中 $\alpha_{VR1}$ 对应的 $Q_m$ 随着 $r$ 的变化情况, 从图中清楚的看到, 当 $r > 0.175$ 时 $Q_m$ 随着 $r$ 快速增大.  $Q$ 的表达式(22)中与 $r$ 相关项只有 $\omega_r^2$ . 而 $\omega_r^2$ 中只有 $X_s = X_+$ 与 $r$ 有关. 从图2中可以看出, 随着 $r$ 的增大,  $X_s$ 向左移变小. 这样 $\omega_r^2$ 变小, 从而 $Q$ 变大.

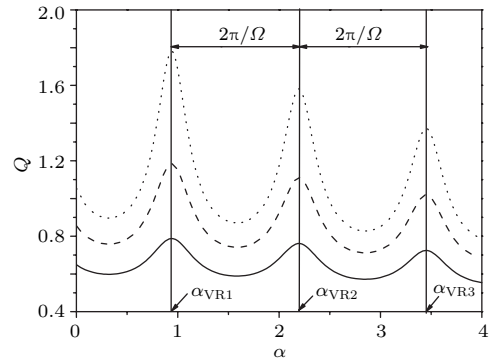


图4 响应幅值 $Q$ 作为时滞参数 $\alpha$ 的函数, 时滞参数取值较小( $\alpha \in [0, 2\pi/\omega]$ ) (其他参数为:  $\Omega = 5, B = 2, \omega = 0.1, r = 0, 0.1, 0.15$ )

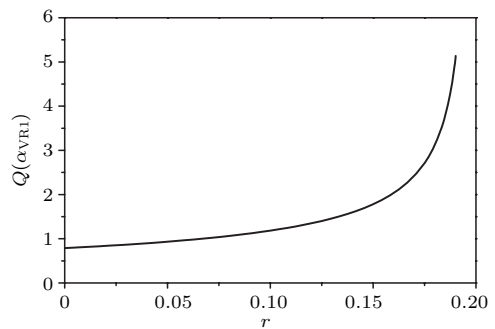


图5 响应幅值 $Q$ 的极大值 $Q_m$ 作为非对称参数 $r$ 的函数 (参数为:  $\Omega = 5, B = 2, \omega = 0.1, \alpha = 0.94$ )

由响应幅值 $Q$ 的理论表达式(方程(22))可以确定共振发生的位置.  $Q$ 依赖高频信号振幅 $B$ , 高频信号频率 $\Omega$ , 时滞参数 $\alpha$ 和不对称参数 $r$ . 方程(22)可以改写为

$$Q = 1/\sqrt{S}, \quad (23)$$

其中

$$S = (\omega_r^2 - \cos(\omega\alpha))^2 + (-\omega - \sin(\omega\alpha))^2. \quad (24)$$

$\omega_r$ 是系统的自然共振频率, 与低频信号振幅 $A$ 和频率 $\omega$ 无关, 是高频信号振幅 $B$ , 高频信号频率 $\Omega$ , 时滞参数 $\alpha$ 和不对称参数 $r$ 的函数. 当 $\omega_r$ 随着这些参数变化达到极小时, 函数 $S$ 达到极小值,  $Q$ 取得极

大值. 因此  $S$  的一个极小值代表一个共振峰. 因此能通过寻找  $S$  的极小值确定共振发生的位置. 当  $\alpha$  发生变化时, 共振发生的条件由下式给出:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\alpha} &= 2\omega_r^2(2\omega_r\omega_{r\alpha} + \omega \sin(\omega\alpha)) \\ &\quad + 2(\omega^2 - 2\omega_r\omega_{r\alpha}) \cos(\omega\alpha) \\ &= 0, \end{aligned} \tag{25}$$

$$\frac{d^2S}{d\alpha^2} > 0. \tag{26}$$

$\omega_r$  由方程 (17) 给出,  $\omega_{r\alpha} = \frac{d\omega_r}{d\alpha}$ . 通过求解方程 (25) 可以得到  $S$  取极值的位置, 要为极小值 (共振发生位置, 记为  $\alpha_{VR}$ ), 还必须满足方程 (26). 但是从上列方程无法直接得到  $\alpha_{VR}$  的解析解. 为了显示  $\alpha_{VR}$  与  $r$  的关系, 可以通过隐函数作图, 从数值的角度考察, 其结果如图 6 和图 7 所示.

图 6 给出了时滞时间较长 ( $\alpha > 2\pi/\omega$ ) 时, 共振发生的位置  $\alpha_{VR}$  与非对称参数  $r$  之间的关系, 参数取值与图 3 相同. 从图上可以看出,  $\alpha_{VR}$  的值随  $r$  的增大并不发生变化, 呈现出一条水平线, 这表明  $r$  不改变  $Q$  随  $\alpha$  变化的周期性. 同时, 图像纵坐标的值也近似等于图 3 中发生共振的  $\alpha$  的值, 相邻两者之间的差近似为  $2\pi/\omega$ . 这也验证了图 3 中观测到的在时滞时间较长 ( $\alpha > 2\pi/\omega$ ) 时  $Q$  表现出  $2\pi/\omega$  周期性的正确性. 这里要强调的是图 6 只画出了  $\alpha$  的极小值点, 极大值点根据方程 (26) 已被剔除.

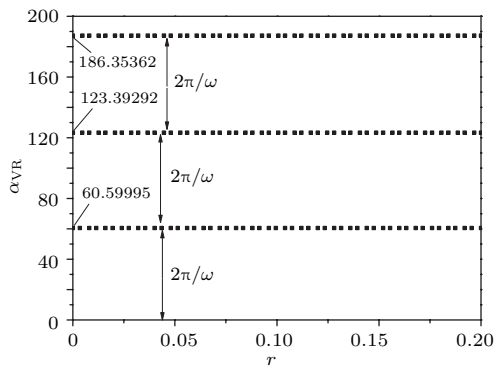


图 6 时滞参数较大 ( $\alpha > 2\pi/\omega$ ) 时, 共振发生的位置  $\alpha_{VR}$  与非对称参数  $r$  之间的关系 (其他参数为:  $\Omega = 5$ ,  $B = 2$ ,  $\omega = 0.1$ )

图 7 给出了时滞时间较短 ( $\alpha \in [0, 2\pi/\Omega]$ ) 内,  $\alpha$  的极值点与非对称参数  $r$  之间的关系, 参数取值与图 4 相同. 图中的点线代表极小值点 (共振发生位置, 记为  $\alpha_{VR}$ ),  $\alpha_{VR1}$ ,  $\alpha_{VR2}$  和  $\alpha_{VR3}$  与图 4 中的值相同.  $\alpha_{VR}$  的值随  $r$  的增大并不发生变化, 呈现

出一条水平线, 也就是说  $r$  不改变  $Q$  随  $\alpha$  变化的周期. 相邻两个极小值点之间的差值恰好为  $2\pi/\Omega$ . 这也从理论上说明  $Q(\alpha)$  在  $\alpha \in [0, 2\pi/\Omega]$  内随着  $\alpha$  呈现出  $2\pi/\Omega$  的周期. 图中的实线对应的纵坐标为  $S$  的极大值点, 线 1, 线 2 和线 3 之间的间距也为  $2\pi/\Omega$ .

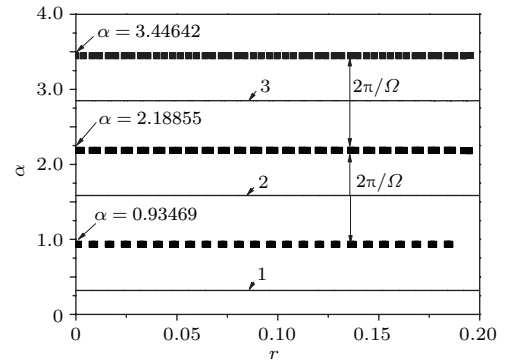


图 7 时滞参数较小时 ( $\alpha \in [0, 2\pi/\Omega]$ ),  $\alpha$  的极值点与非对称参数  $r$  之间的关系 (参数为:  $\Omega = 5$ ,  $B = 2$ ,  $\omega = 0.1$ )

进一步, 我们将讨论高频振幅  $B$  和 高频信号频率  $\Omega$  对振动共振的影响. 从上面的结果可知, 不对称参数并不影响共振发生的位置, 只是影响共振的强度. 这里我们关心的是共振发生的位置. 因此在下面的讨论中设  $r = 0$ . 此时, 系统变为一个对称双稳系统. 文献 [27, 28] 已经从数值模拟的角度给出时滞参数可以诱导具有两种不同周期的振动共振. 下面我们将从理论的角度进行分析验证.

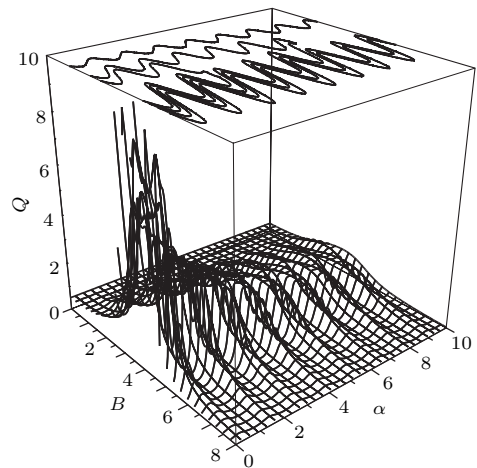


图 8 响应幅值  $Q$  作为  $\alpha$  和  $B$  的函数 (参数为:  $\Omega = 5$ ,  $r = 0$ ,  $\omega = 0.1$ )

图 8 为  $r = 0$  时响应幅值  $Q$  作为  $\alpha$  和  $B$  的函数. 从图中可以看出, 对固定的  $B$  值,  $Q$  随着  $\alpha$  的增加出现周期振动共振现象, 且  $Q$  的极大值  $Q_m$  以周期  $2\pi/\Omega$  出现, 这与图 4 给出的结论一致. 对固

定的  $\alpha$ ,  $Q$  随着  $B$  的增加也出现峰值, 意味着共振发生. 共振发生的位置  $B_{VR}$  ( $Q_m$  对应的  $B$  值) 随着  $\alpha$  的增加, 呈现出周期性 (看图 8 顶部的映射图). 图 9 为  $r = 0$  时响应幅值  $Q$  作为  $\alpha$  和  $\Omega$  的函数. 同样, 我们看到对固定的  $\Omega$ ,  $Q$  随着  $\alpha$  的增加出现周期振动共振现象. 对固定的  $\alpha$  值,  $Q$  随着  $\Omega$  的增加也呈现出共振现象, 但是  $Q_m$  并不出现周期. 而且随着  $\alpha$  的增大,  $Q_m$  的个数逐渐增加, 也就是共振峰增多 (多重共振),  $Q_m$  对应的  $\Omega_{VR}$  逐渐移向  $\Omega$  的小值处 (看图 9 顶部的映射图).

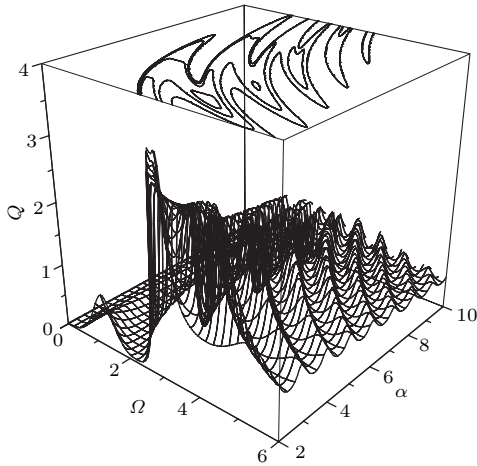


图 9 响应幅值  $Q$  作为  $\alpha$  和  $\Omega$  的函数 (参数为:  $B = 2$ ,  $r = 0$ ,  $\omega = 0.1$ )

当  $B$  发生变化时, 同样能通过寻找  $S$  的极小值确定共振发生的位置. 共振发生的条件由下式给出:

$$\frac{dS}{dB} = \frac{12g}{\mu^2} \left( -\frac{3g^2}{\mu^2} + 3 - \cos(\omega\alpha) \right) = 0, \quad (27)$$

$$\frac{d^2S}{dB^2} > 0. \quad (28)$$

由方程 (27) 可以得到  $S$  极值对应  $B$  的位置的表达式为

$$B = \frac{1}{3} \sqrt{9\mu^2 - 3\cos(\omega\alpha)\mu^2}, \quad (29)$$

其中  $\mu^2$  由方程 (10) 给出. 根据方程 (28) 剔除掉极大值点, 就可以得到共振发生对应的振幅的值  $B_{VR}$ . 当其他参数给定时,  $B_{VR}$  与  $\alpha$  的关系如图 10 所示. 图 10 (a) 画出的是  $\alpha$  较大时 ( $\alpha > 2\pi/\omega$ ) 的情况, 我们发现  $B_{VR}$  呈现出  $2\pi/\omega$  的周期性. 图 10 (b) 为 (a) 的局部放大图, 即  $\alpha$  取值较小 ( $\alpha \in [0, 2\pi/\omega]$ ) 时的情况,  $B_{VR}$  呈现出  $2\pi/\Omega$  的周期性. 文献 [27] 中的图 2 (b) 仅仅数值上给出了  $B_{VR}$  与  $\alpha$  呈现出周期性, 但并未给出周期的大小.

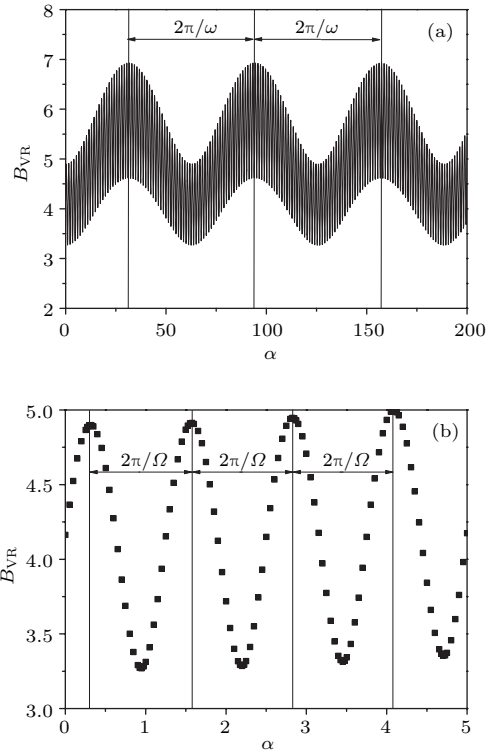


图 10 (a)  $B_{VR}$  作为时滞参数  $\alpha$  的函数 (参数为:  $\Omega = 5$ ,  $r = 0$ ,  $\omega = 0.1$ ); (b) (a) 图的局部放大

当  $\Omega$  发生变化时, 共振发生的条件由下式给出:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\Omega} &= \frac{6B^2}{\mu^4} \left[ -\frac{3B^2}{\mu^2} + 3 - \cos(\omega\alpha) \right] [-2\cos(\Omega\alpha) \\ &\quad \times \sin(\Omega\alpha)\alpha + 2(\Omega + \sin(\Omega\alpha))] \\ &\quad \times [1 + \cos(\Omega\alpha)\alpha] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\frac{d^2S}{d\Omega^2} > 0. \quad (31)$$

由于无法从方程 (30) 给出  $\Omega$  的具体解析表达式, 我们采用隐函数作图的方式, 从数值上给出了  $\Omega_{VR}$  和  $\alpha$  之间的关系, 如图 11 所示. 从图 11 可以看出, 随着  $\alpha$  的增大,  $\Omega_{VR}$  的值逐渐减小, 这说明峰值对应的  $\Omega_{VR}$  向  $\Omega$  的小值移动. 同时在区间  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $\Omega_{VR}$  只有一个值, 对应  $Q$ - $\Omega$  平台上只有一个峰值. 类似在区间  $[1, 2]$  有两个值, 对应  $Q$ - $\Omega$  平台上只有两个峰值, 其他区间类似. 所以, 随着  $\alpha$  的增大, 在  $Q$ - $\Omega$  平台上出现多个峰值, 即多重振动共振. 从  $Q$  的表达式 (22) 中可知, 只有

$$\omega_r^2 = 3 - \frac{3B^2}{(\cos(\Omega\alpha))^2 + (\Omega + \sin(\Omega\alpha))^2}$$

与  $\Omega$  有关系, 当  $\Omega$  作为变量时,  $\omega_r^2$  的周期为  $2\pi/\alpha$ , 且随着  $\alpha$  增大而减小. 在同样的  $\Omega$  区间,  $\omega_r^2$  的最小

值增多, 则  $Q$  出现多个峰值. 要强调一点, 这种多重共振只是出现在  $\Omega$  和  $B$  相对较小的范围内, 这是因为当  $\Omega$  非常大而  $B$  较小时,  $\omega_r^2 \approx 3$ . 则

$$Q \approx \frac{1}{\sqrt{(3 - \cos(\omega\alpha))^2 + (-\omega - \sin(\omega\alpha))^2}}$$

对固定的  $\alpha, \omega, Q$  趋于一个定值. 这与文献 [27] 中图 7 的结论是一致的.

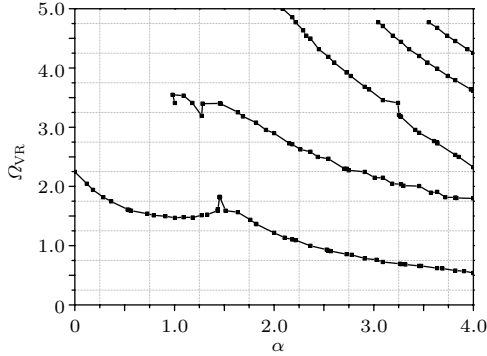


图 11  $\Omega_{VR}$  作为  $\alpha$  的函数 (参数为:  $B = 2, r = 0, \omega = 0.1$ )

## 4 结 论

本文应用快慢变量分离分离法研究了具有时滞反馈的非对称双稳系统的振动共振现象, 得到了系统对低频信号的响应幅值  $Q$  的解析表达式. 主要分析了时滞参数  $\alpha$ , 非对称参数  $r$  对振动共振的影响. 主要结果为: 时滞参数可以诱导响应幅值  $Q$  呈现两种不同的周期关系, 且周期分别为输入高频信号和低频信号的周期. 不对称参数  $r$  并不影响共振发生的位置  $\alpha_{VR}$ . 但是能够增强响应幅值  $Q$ . 当  $r = 0$  时, 响应幅值  $Q$  随着  $\alpha$  也呈现两种不同的周期关系, 且周期分别为输入高频信号和低频信号的周期. 但是在  $Q-B$  平台上,  $Q$  随  $B$  仅仅呈现出单振动共振, 有意思的是共振发生的位置  $B_{VR}$  随着  $\alpha$  也呈现两种不同的周期关系, 且周期分别为输入高频信号和低频信号的周期. 在  $Q-\Omega$  平台上, 当  $B$  和  $\Omega$  相对较小时, 随着  $\alpha$  的增大, 在相同的  $\Omega$  区间内  $Q$  呈现出多重共振现象. 对于较大的  $\Omega$  和较小的  $B$  值, 当其他参数固定时,  $Q$  趋于一个确定的值.

## 参考文献

[1] Landa P, McClintock P 2000 *J. Phys. A* **33** L433  
 [2] Gitterman M 2001 *J. Phys. A* **34** L355  
 [3] Zaikin A A, López L, Baltanás J P, Kurths J, Sanjuán M A F 2002 *Phys. Rev. E* **66** 011106  
 [4] Baltanás J P, López L, Blechman I I, Landa P S, Zaikin A, Kurths J, Sanjuán M A F 2003 *Phys. Rev. E* **67** 066119

[5] Chizhevsky V N, Smeu E, Giacomelli G 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 220602  
 [6] Chizhevsky V N, Giacomelli G 2006 *Phys. Rev. E* **73** 022103  
 [7] Chizhevsky V N, Giacomelli G 2008 *Phys. Rev. E* **77** 051126  
 [8] Yao C G, Liu Y, Zhan M 2011 *Phys. Rev.* **E83** 061122  
 [9] Gandhimathi V M, Rajasekar S, Kurths J 2006 *Phys. Lett. A* **360** 279  
 [10] Gandhimathi V M, Rajasekar S 2007 *Phys. Scr.* **76** 693  
 [11] Yang J H, Liu X B 2010 *Chaos* **20** 033124  
 [12] Yang J H, Zhu H 2012 *Chaos* **22** 013112  
 [13] Yang J H, Zhu H 2013 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **18** 1316  
 [14] Zhang L, Xie T T, Luo M K 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 010506 (in Chinese) [张路, 谢天婷, 罗懋康 2014 物理学报 **63** 010506]  
 [15] Jeyakumari S, Chinnathambi V, Rajasekar S, Sanjuán M A F 2009 *Phys. Rev. E* **80** 046608  
 [16] Jeyakumari S, Chinnathambi V, Rajasekar S, Sanjuán M A F 2009 *Chaos* **19** 043128  
 [17] Yang J H, Liu H G, Chen G 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 180503 (in Chinese) [杨建华, 刘后广, 程刚 2012 物理学报 **61** 180503]  
 [18] Wang C J 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 090504  
 [19] Deng B, Wang J, Wei X L 2009 *Chaos* **19** 013117  
 [20] Deng B, Wang J, Wei X L, Yu H T, Li H Y 2014 *Phys. Rev. E* **89** 062916  
 [21] Yang L J, Liu W H, Yi Ming, Wang C J, Zhu Q M, Zhan X, Jia Y 2012 *Phys. Rev. E* **86** 016209  
 [22] Wang C J, Yang K L 2012 *Chin. J. Phys.* **50** 607  
 [23] Jeevarathinam C, Rajasekar S, Sanjuán M A F 2013 *Ecol. Complex.* **15** 33  
 [24] Ramana Reddy D V, Sen A, Johnston G L 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5109  
 [25] Jia Z L 2009 *Int. J. Theor. Phys.* **48** 226  
 [26] Wang C J, Yi M, Yang K L, Yang L J 2012 *BMC Syst. Biol.* **6** S9  
 [27] Yang J H, Liu X B 2010 *J. Phys. A: Math. Theor.* **43** 122001  
 [28] Yang J H, Liu X B 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 010505 (in Chinese) [杨建华, 刘先斌 2012 物理学报 **61** 010505]  
 [29] Wang C J, Yang K L, Qu S X 2014 *Int. J. Mod. Phys. B* **28** 1450103  
 [30] Yang J H, Liu X B 2010 *Phys. Scr.* **82** 025006  
 [31] Daza A, Wagemakers A, Rajasekar S, Sanjuán M A F 2013 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **18** 411  
 [32] Hu D L, Yang J H, Liu X B 2014 *Comput. Biol. Med.* **45** 80  
 [33] Jeevarathinam C, Rajasekar S, Sanjuán M A F 2011 *Phys. Rev. E* **83** 066205  
 [34] Wang C J, Dai Z C, Mei D C 2011 *Commun. Theor. Phys.* **56** 1041  
 [35] Wio H S, Bouzat S 1999 *Braz. J. Phys.* **29** 136  
 [36] Chizhevsky V N 2008 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **18** 1767  
 [37] Jeyakumari S, Chinnathambi V, Rajasekar S, Sanjuán M A F 2011 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **21** 275



# Vibrational resonance in an asymmetric bistable system with time-delay feedback\*

Yang Xiu-Ni Yang Yun-Feng<sup>†</sup>

(School of Science, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an 710054, China)

( Received 16 October 2014; revised manuscript received 7 January 2015 )

## Abstract

Vibrational resonance is a resonant dynamics induced by a high-frequency periodic force at the low-frequency of the input periodic signal, and the input periodic signal is enhanced by a high-frequency signal. In this paper, a linear time-delayed feedback bistable system with an asymmetric double-well potential driven by both low-frequency and high-frequency periodic forces is constructed. Based on this model, the vibrational resonance phenomenon is investigated. Making use of the method of separating slow motion from fast motion under the conditions of  $\Omega \gg \omega$  ( $\Omega$  is the frequency of the high-frequency signal and  $\omega$  is the one of the low-frequency signal), equivalent equations to the slow motion and the fast motion are obtained. Neglecting the nonlinear factors, the analytical expression of the response amplitude  $Q$  can be obtained, and the effects of the time-delay parameter  $\alpha$  and the asymmetric parameter  $r$  on the vibrational resonance are discussed in detail. Moreover, the locations at which the vibrational resonance occurs, are obtained by means of solving the condition for a resonance to occur. A major consequence of time-delayed feedback is that it gives rise to a periodic or quasiperiodic pattern of vibrational resonance profile with respect to the time-delayed parameter, i.e. in  $Q$ - $\alpha$  plot,  $\alpha$  can induce the  $Q$  which is periodic with the periods of the high-frequency signal and the low-frequency signal. The locations at which the vibrational resonance occurs are not changed by the asymmetric parameter  $r$ . However, the resonance amplitude is enhanced with increasing  $r$ . Specifically, the resonance amplitude is greatly enhanced when  $r > 0.15$ . On the other hand, in the symmetric case ( $r = 0$ ),  $B_{VR}$  at which the vibrational resonance occurs is periodic with the periods of high-frequency signal and low-frequency signal as  $\alpha$  increases, which is shown in  $B_{VR}$ - $\alpha$  ( $B$  is the amplitude of the high-frequency signal) plot. In  $Q$ - $\Omega$  plot,  $Q$  is presented by multi-resonance at the small values of  $B$  and  $\Omega$ , but  $Q$  tends to a fixed value at the small values of  $B$  and the large values of  $\Omega$ . We believe that the above theoretical observations will stimulate the experimental study of vibrational resonance in nonlinear oscillators and electronic circuits with time-delayed feedback.

**Keywords:** time delay, asymmetric bistable system, vibrational resonance

**PACS:** 05.45.-a, 05.90.+m

**DOI:** 10.7498/aps.64.070507

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No.71103143), and the Natural Science New Star of Science and Technologies Research Plan in Shaanxi Province of China (Grant No.2013KJXX-40).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [yang2014xian@126.com](mailto:yang2014xian@126.com)