

路径约束条件下车辆行为的时空演化模型

潘登 郑应平

Spatiotemporal evolution model of vehicular movement behavior under path constraints

Pan Deng Zheng Ying-Ping

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 078902 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.078902

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.078902>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I7>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

最相邻后车综合信息对交通流不稳定性的影响分析

Effects of comprehensive information of the nearest following vehicle on traffic flow instability

物理学报.2014, 63(21): 218901 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.218901>

变曲率弯路车辆换道虚拟轨迹模型

Virtual trajectory model for lane changing of a vehicle on curved road with variable curvature

物理学报.2014, 63(7): 078902 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.078902>

考虑司机扰动风险偏好异质的跟驰模型

A new car-following model considering drivers' heterogeneity of the disturbance risk appetite

物理学报.2014, 63(6): 068901 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.068901>

驾驶员属性对信号灯路口交通流的影响研究

Influences of driver's attributions on signalized intersection traffic

物理学报.2014, 63(3): 038901 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.038901>

敏感换道对下匝道系统交通流的影响

Effects of sensitive changing-lane rule on the off-ramp traffic system

物理学报.2013, 62(23): 238901 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.238901>

路径约束条件下车辆行为的时空演化模型*

潘登† 郑应平

(同济大学电子与信息工程学院, 上海 201804)

(2014年8月28日收到; 2014年11月6日收到修改稿)

复杂地理环境下车辆运行线路具有空间三维特征, 它对车辆行为的约束是显然的, 非一维空间和二维空间所能描述. 将复杂地理环境下车辆运行线路抽象为空间曲线, 引入微分几何理论, 利用弧长、曲率和挠率等几何不变量参数建立沿空间曲线运动的 Serret-Frenet 活动标架; 然后, 对空间曲线上任意一点处 Serret-Frenet 标架具有时变属性的动态行为进行数学描述, 进而建立路径约束条件下车辆行为的时空演化模型, 并在数学上严格证明了所建时空演化模型适用于车辆 (Serret-Frenet 标架) 直线运行和做匀速圆周运动的特殊情形. 为后续复杂地理环境中交通线路上的车辆跟驰、变道等微观行为和交通流宏观行为研究, 奠定了理论基础.

关键词: 车辆行为, 时空演化, 路径约束, Serret-Frenet 活动标架

PACS: 89.40.-a, 45.50.Dd, 02.40.-k

DOI: 10.7498/aps.64.078902

1 引言

车辆微观行为的研究, 主要集中于车辆跟驰运行和跟驰运行过程中的变道行为两个方面; 宏观研究则主要关注车辆微观行为对交通流的影响. 目前, 微观行为的研究多聚焦于车辆跟驰和变道两个方面^[1-23], 文献^[19-22]研究了弯路固定曲率和变化曲率条件下的车辆变道行为, 建立了相应的车辆换道轨迹模型, 文献^[23]提出一个纵向运行过程中发生横向偏移的车辆行为模型, 以研究了瓶颈处车辆横纵向行为规律及其对交通流的影响. 交通流虽属宏观研究范畴, 因需要研究微观行为对交通流稳定性、相变和阻塞情况等诸多方面的宏观影响, 譬如车辆跟驰过程中的突然停车或变道行为对交通流的影响, 在研究内容上一般微、宏观行为兼而有之^[3-18]. 随着对车辆行为规律性的研究不断深入, 所取得的丰硕成果有力地推动了车辆行为自动化的研究不断取得新的进展, 从研究的侧重点来看, 可归为车辆驾驶辅助系统^[24,25]、无人驾驶^[26-30]、跟驰控制^[31-34]和车辆巡航系

统^[35-39]四个方面, 其中无人驾驶、跟驰控制和车辆巡航系统是车辆行为自动化研究领域的热点问题, 三者之间相互渗透, 并无明显界限, 呈现出相互借鉴、相互交融的研究态势. 其中, 路径跟踪和车辆跟驰也属于车辆无人驾驶和巡航系统研究的范畴. 上述文献主要针对一维和二维空间内的车辆行为开展相关研究, 取得了异常丰富的研究成果, 然而大量的复杂地理环境下的车辆运行线路, 并非一维和二维空间所能描述, 尽管文献^[26-30]使用了地理参考标架^[26]或 Serret-Frenet 标架^[27-30]来描述路径和车辆 (舰船) 行为, 但将三维标架的次法向量确定为恒定不变的向量, 反而限制了复杂 (地理) 环境下路径的空间属性的精确或准确描述, 车辆 (舰船) 行为控制的效果也必然会受到一定程度的影响.

复杂地理环境下车辆运行线路 (简称车辆路径) 不仅存在单纯的弯道、坡道, 而且有的路段弯道和坡道交融在一起的情形也是特别常见的. 显然, 二维平面无法准确描述复杂地理环境下车辆路径的形状特征, 因而无法洞悉路径约束条件下的车辆行为规律, 并对其施加正确的控制. 有鉴于此, 本

* 国家自然科学基金 (批准号: 61174183) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: pandeng@tongji.edu.cn.

文拟引入微分几何的相关理论, 对路径约束条件下的车辆行为进行研究, 力求建立路径约束条件下车辆行为的时空演化模型, 为后续复杂地理环境中路径约束条件下的车辆跟驰、变道, 以及交通流等方面的研究奠定基础.

2 路径在三维空间的数学描述

复杂地理环境下的车辆运行线路, 可以抽象为一个点随时间变化在三维欧氏空间 (Three-dimensional Euclidean Space, E^3) 运动时所描述的空间曲线. 这类空间曲线由于具有弯曲和扭转的特点, 使得平面坐标系难以刻画曲线的形状, 有效的办法是引入微分几何理论中 Serret-Frenet 活动标架来进行描述. 在 E^3 中, 一般以弧长、曲率和挠率三个与坐标系无关的几何不变量来刻画曲线形状, 并构成一个正交标架, 即 Serret-Frenet 标架, 其中曲率和挠率取为弧长的函数^[40,41]; 空间曲线上每个点依附了一个 Serret-Frenet 标架, 当点在空间曲线上运动时, 这个正交标架也随之运动^[40,41], 故 Serret-Frenet 标架也称之为 Serret-Frenet 活动标架.

定理 1 设向量函数 $r = r(s)$ (s 为弧长参数, $a \leq s \leq b$) 描述了 E^3 中的一条正则空间曲线, 则 Serret-Frenet 标架沿该曲线运动的公式 (通常称之为 Serret-Frenet 公式或 Frenet 公式) 为

$$\begin{bmatrix} \alpha'(s) \\ \beta'(s) \\ \gamma'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha(s) \\ \beta(s) \\ \gamma(s) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其中, $\alpha(s)$ 为曲线 $r(s)$ 在 s 处的单位切向量, $\beta(s)$ 为曲线 $r(s)$ 在 s 处的单位主法向量, $\gamma(s)$ 为曲线 $r(s)$ 在 s 处的单位次法向量, $\alpha'(s)$, $\beta'(s)$ 和 $\gamma'(s)$ 分别为 $\alpha(s)$ 、 $\beta(s)$ 和 $\gamma(s)$ 关于弧长参数 s 的导数, 并满足下列条件:

$$\alpha(s) = r'(s), \quad (2)$$

$$\beta(s) = \frac{\alpha'(s)}{|\alpha'(s)|}, \quad (3)$$

$$\gamma(s) = \alpha(s) \times \beta(s). \quad (4)$$

$\kappa(s)$ 为曲线 $r(s)$ 在 s 处的曲率, $\tau(s)$ 为曲线 $r(s)$ 在 s 处的挠率, 且

$$\kappa(s) = |\alpha'(s)|, \quad (5)$$

$$\tau(s) = -\gamma'(s) \cdot \beta(s). \quad (6)$$

上述定理亦称为 Serret-Frenet 定理. 显然, 由于 (1)—(6) 式中 s 为弧长参数, 用于曲线长度的空间度量, 故该定理只能描述空间曲线的空间形状, 无法刻画点运动于空间曲线具有时变属性的行为动态细节. 也就是说, 空间曲线的形状特征可由其弧长、曲率和挠率等不变量来描述, 对 Serret-Frenet 标架的运动给出了路径约束条件, 而 Serret-Frenet 标架运动过程中在路径约束作用下速度、加速度等物理参数的动态演化, 则需在 Serret-Frenet 定理的基础上进一步研究.

3 路径约束条件下车辆动态行为的数学描述

车辆运行于复杂地理环境下的线路之上, 可以抽象为 Serret-Frenet 标架在空间曲线上运动的情形. 将空间曲线作任意分割, 图 1 描述了 Serret-Frenet 标架在第 k 个时刻从点 P_k 沿空间曲线上开始运动, 于第 $k+1$ 个时刻到达点 P_{k+1} 的情形, 其中 $0 \leq k \leq n$ (n 为大于 0 的整数), P_k, P_{k+1} 分别表示为曲线上的第 k 和 $k+1$ 个点, s_k, s_{k+1} 分别为曲线在 P_k, P_{k+1} 两点的弧长, $\{r(s_k); \alpha(s_k), \beta(s_k), \gamma(s_k)\}$ 为曲线在点 P_k 的 Serret-Frenet 标架, $\{r(s_{k+1}); \alpha(s_{k+1}), \beta(s_{k+1}), \gamma(s_{k+1})\}$ 为曲线在点 P_{k+1} 的 Serret-Frenet 标架.

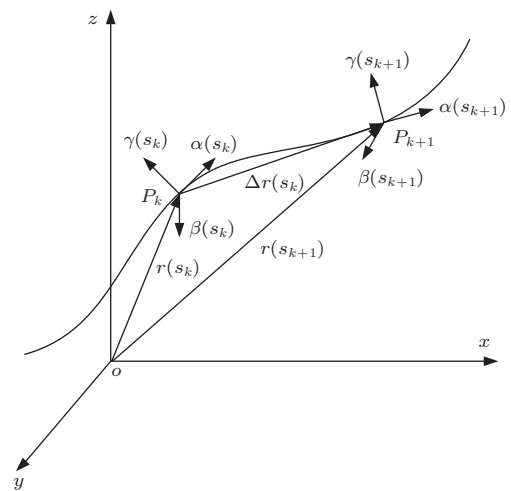


图 1 Serret-Frenet 标架在空间曲线上的运动情形

令 t 为时间参数, Serret-Frenet 标架于 $t = t_k$ 时运动至点 P_k , 于 $t = t_{k+1}$ 时运动到点 P_{k+1} , $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ 为 Serret-Frenet 标架从点 P_k 沿空间曲线上运动到点 P_{k+1} 的时间, Δs_k 为 Serret-

Frenet 标架在 Δt 时间内从点 P_k 沿空间曲线上运动到点 P_{k+1} 的弧长. 则 Serret-Frenet 标架在第 k 个时刻从点 P_k 向前运动的速度 $v(t_k)$ 为

$$\begin{aligned} v(t_k) &= \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \frac{r(s_{k+1}) - r(s_k)}{\Delta t_k} \\ &= \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \frac{\Delta r(s_k)}{\Delta t_k} \\ &= \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \frac{\Delta s_k}{\Delta t_k} \cdot \frac{\Delta r(s_k)}{\Delta s_k}, \end{aligned} \quad (7)$$

因为 $\Delta t_k \rightarrow 0$ 时必有 $\Delta s_k \rightarrow 0$, 故

$$v(t_k) = \frac{ds_k}{dt_k} \cdot \frac{dr(s_k)}{ds_k} = \frac{ds_k}{dt_k} \cdot \alpha(s_k). \quad (8)$$

显然, $\frac{ds_k}{dt_k}$ 是一个标量, 表示 Serret-Frenet 标架在点 P_k 处沿空间曲线运行的速度, 而 $\alpha(s_k)$ 表示速度 $v(s_k)$ 的方向, 即点 P_k 的切线方向.

由 (8) 式和 (3), (5) 式可得到 Serret-Frenet 标架在第 k 个时刻从点 P_k 向前运动的加速度 $a(t_k)$ 为

$$\begin{aligned} a(t_k) &= \frac{d^2 s_k}{dt_k^2} \cdot \alpha(s_k) + \left(\frac{ds_k}{dt_k}\right)^2 \cdot \alpha'(s_k) \\ &= \frac{d^2 s_k}{dt_k^2} \cdot \alpha(s_k) + \left(\frac{ds_k}{dt_k}\right)^2 \cdot \kappa(s_k) \beta(s_k), \end{aligned} \quad (9)$$

式中, 第一项 $\frac{d^2 s_k}{dt_k^2} \cdot \alpha(s_k)$ 为 Serret-Frenet 标架在点 P_k 处切线方向 $\alpha_k(s)$ 上的加速度, 第二项 $\left(\frac{ds_k}{dt_k}\right)^2 \cdot \kappa(s_k) \beta(s_k)$ 则与空间曲线在点 P_k 处的速度和曲率有关.

从 (8) 式和 (9) 式可以看出, 使用空间曲线上 Serret-Frenet 标架的速度和加速度来描述车辆在路径约束下的行为演化, 其数学与物理上的意义是明确的:

1) 首先, 我们将视野完全聚焦于任意时刻 Serret-Frenet 标架在空间曲线上的某一位置点 P_k 的动态行为, 从静止的观点来看,

i) 在任意时刻或任意位置点, 速度的方向为空间曲线的切线方向, 可使用空间曲线在该点的单位切向量 $\alpha(s_k)$ 表示.

ii) 在任意时刻或任意位置点, 加速度方向的描述与空间曲线的切向量 $\alpha(s_k)$ 和主法线向量 $\beta(s_k)$ 有关 (见 (9) 式所示). 也就是说, 当该时刻或该位置的速度在一维空间内以向量 $\alpha(s_k)$ 进行描述时, 加速度必须在二维空间内使用向量 $\alpha(s_k)$ 和 $\beta(s_k)$ 才能加以准确描述, 向量 $\alpha(s_k)$ 和 $\beta(s_k)$ 张成一个平面.

2) 然后, 我们将视野扩大到空间曲线上相邻的两个点 P_k 与 P_{k+1} , 从动态的观点来看,

i) Serret-Frenet 标架运动于点 P_k 时, 从其速度和加速度的数学描述不难看出, 速度方向由于运动的惯性和产生加速度的合力方向不同, 二者在 Serret-Frenet 标架运动至点 P_k 这一时刻张成一个平面空间. 实际上, Serret-Frenet 标架在任意时刻运动至空间曲线的任意一点处, 速度方向和加速度方向均张成一个平面空间, 如果没有空间曲线对 Serret-Frenet 标架运动行为约束, 仅就空间曲线上的任意一点而言, Serret-Frenet 标架仍将运动于速度和加速度张成的平面空间中, 呈现出在平面空间运动的时变行为属性.

ii) Serret-Frenet 标架继续向前运动过程中, 受到路径空间属性的条件约束 (见 (1) 式所示), Serret-Frenet 标架脱离点 P_k 时运动至空间曲线上新的一点 (可记为点 P_{k+1}) 时, 其速度和加速度张成的平面与原先在点 P_k 处张成的平面相比, 除点 P_k 与 P_{k+1} 在各自邻域内的空间曲线为平行关系的特殊情形, 一般为非平行的两个平面. 正是由于路径的空间属性, 切向量 $\alpha(s_k)$ 和主法向量 $\beta(s_k)$ 在空间曲线上任意一点所张成的描述 Serret-Frenet 标架速度和加速度的平面空间, 在 Serret-Frenet 标架沿空间曲线运动的过程中, 将会因为 $\alpha(s_k)$ 和 $\beta(s_k)$ 按照 (1) 式发生空间姿态的动态变化而产生整体旋转和扭动的现象, 从而使得 Serret-Frenet 标架的时变行为呈现出在三维空间运动的特征.

4 空间曲线上车辆行为的时空演化模型

由于点 P_k 为空间曲线上任意一点, 去掉 (8) 式和 (9) 式中的下标 k , 即可得到具有一般性的 Serret-Frenet 标架沿空间曲线运动的速度和加速度计算公式, 即

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{ds}{dt} \cdot \alpha(s), \\ a(t) &= \frac{d^2 s}{dt^2} \cdot \alpha(s) + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \cdot \kappa(s) \beta(s), \end{aligned} \quad (10)$$

式中 $s = s(t)$, 表示 Serret-Frenet 标架沿空间曲线运动于 t 时刻到达曲线弧长为 s 的点处.

由于加速度等于驱动车辆运行的单位合力, 车辆行为调整必然受到自身性能和路面情况等因素

的约束,限于篇幅和本文研究的焦点所在,不再对此展开讨论.

联立(1)式所示的描述曲线空间性状的Serret-Frenet公式,就可以得到路径约束条件下车辆行为的时空演化模型. Serret-Frenet公式定量描述了已知路径在任意一点的弧长、曲率和挠率等参数的空间分布情况;(10)式则刻画了车辆(与Serret-Frenet标架等价)沿该路径运动在任意时刻具有时变属性的动态行为特征,从(10)式可以看出,由于单位切向量、主法向量和曲率等参数的存在且随着Serret-Frenet标架沿空间曲线运动而变化,见(1)式所示.显而易见,这种时变动态行为呈现出受到空间曲线约束的明显特点.

定理2 当空间曲线表现为直线或圆时,(10)式可以用来描述Serret-Frenet标架的直线运动和匀速圆周运动.

证明 在证明之前,我们首先了解一下空间曲线的弧长计算公式^[40,41].

设 E^3 中一条空间曲线的参数方程为 $r = r(t)$, t 为时间参数且 $t_0 \leq t \leq t_n$,在区间 $[t_0, t_n]$ 的任意一个分割 $t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots < t_{n-1} < t_n$,见图2所示.

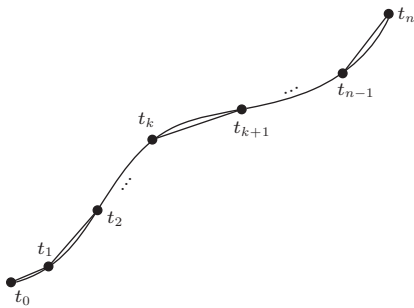


图2 空间曲线的弧长计算

令 $\lambda = \max\{\Delta t_k; k = 0, 1, \dots, n-1\}$,曲线从 t_0 至 t_n 的弧线长度为

$$\begin{aligned} s(t_n) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} |r(t_{k+1}) - r(t_k)| \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{r(t_{k+1}) - r(t_k)}{\Delta t_k} \right| \cdot \Delta t_k \\ &= \int_{t_0}^{t_n} |r'(t)| dt. \end{aligned} \quad (11)$$

用 t 替换 t_n 就可以得到Serret-Frenet标架沿空间

曲线从初始时刻 t_0 至任意时刻 t 的弧线长度

$$s(t) = \int_{t_0}^t |r'(t)| dt. \quad (12)$$

1) 当Serret-Frenet标架沿直线运动时

i) 由(10)式可知, Serret-Frenet标架在任意时刻 t 的速度为 $v(t) = \frac{ds}{dt} \cdot \alpha(s) = |r'(t)| \cdot \alpha(s)$,即速度值为 $|r'(t)|$,恒定单位向量 $\alpha(s)$ 为其运动方向.

ii) 由于直线的曲率为0,即 $\kappa = 0$, Serret-Frenet标架在任意时刻 t 的加速度为 $a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} \cdot \alpha(s)$,其中 $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d|r'(t)|}{dt}$ 为标量加速度值,其方向与速度方向相同,可由恒定单位向量 $\alpha(s)$ 表示.

因此,当Serret-Frenet标架沿直线运动时,方程组(10)式对Serret-Frenet标架的运动行为描述与传统的直线牛顿运动公式完全等价.

2) 当Serret-Frenet标架作匀速圆周运动时

i) 在 dt 时间内Serret-Frenet标架旋转的弧长为 $ds = \omega R \cdot dt$,即 $\frac{ds}{dt} = \omega R$.其中 ω 为匀速运动的角速度, R 为圆周半径.由(10)式可得 $v(t) = \omega R \cdot \alpha(s)$,其中 $\alpha(s)$ 为圆周的单位切向量.

ii) 由于Serret-Frenet标架作匀速圆周运动, $\frac{ds}{dt} = |r'(t)| = \omega R$ 为恒值,方程组(10)式中第二式的第一项 $\frac{d^2s}{dt^2} \cdot \alpha(s) = \frac{d}{dt}|r'(t)| \cdot \alpha(s) = 0$.方程组(10)式中第二式的第二项 $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \cdot \kappa(s)\beta(s) = \omega^2 R^2 \cdot \kappa(s)\beta(s)$,由于圆周任意一点的曲率 $\kappa(s) = 1/R$,可得 $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \cdot \kappa(s)\beta(s) = \omega^2 R \cdot \beta(s)$,即Serret-Frenet标架的加速度为 $a(t) = \omega^2 R \cdot \beta(s)$.因为 $\beta(s)$ 为圆周切线的单位法向量,故Serret-Frenet标架的加速度为向心加速度.

因此, Serret-Frenet标架作匀速圆周运动时,方程组(10)式所作的数学描述与传统的平面圆周运动公式同样也是完全等价的.

证毕.

5 结 论

本文针对具有空间曲线弯曲和扭转特征的一般性路径,建立了路径约束条件下车辆行为的时空演化模型,将有助于深刻认识车辆运行于复杂地理环境下的行为特征和行为规律,为研究复杂地理环境中不同路况条件和不同交通情境下的车辆自适应

应行为控制提供了前提条件. 车辆向前运行过程中变道而发生横向位移的情形, 本文并没有给出相应的数学描述, 可考虑把复杂地理环境下的车辆运行线路的路面抽象为一般性的空间曲面, 进而研究车辆在空间曲面的行为演化问题, 这将是课题组未来研究的主要内容之一, 同时也是一个循序渐进的过程. 对于列车运行过程中无横向变道行为的轨道交通而言, 特别是我国铁路列车运行行为及控制的研究, 本文的研究可能具有巨大的现实意义. 公路交通领域车辆行为的研究, 则多聚焦于跟驰过程中的直线运行、横向变道, 以及它们对交通流的影响, 无人驾驶车辆对路径的跟踪行为往往也被简化为二维平面问题加以处理. 路径约束条件下的车辆跟驰行为及其控制也可在此基础上向复杂地理环境下三维空间拓展, 以更加深入地研究. 鉴于复杂地理环境下车辆交通行为的复杂性, 以及以其为研究对象对于我国这样一个幅员辽阔、地形复杂, 交通运输发达并发展迅速的巨型国家所具有的深远意义, 研究的必要性和研究过程的艰巨性、长期性不言而喻, 研究过程也必然呈现出阶段性特征, 同时需要广大研究者共同参与研究, 期待并相信有更多的研究成果.

参考文献

- [1] Tomer E, Safonov L, Havlin S 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 382
- [2] Koutsopoulos H N, Farah H 2012 *Transp. Res. Part. B* **46** 563
- [3] Naito Y, Nagatani T 2011 *Phys. Lett. A* **375** 1319
- [4] Naito Y, Nagatani T 2012 *Physica A* **391** 1626
- [5] Zheng Z D 2014 *Transp. Res. Part B* **60** 16
- [6] Lee H Y, Lee H W, Kim D 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 1130
- [7] Mitarai N, Nakanishi H 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 1766
- [8] Peng G H, Sun D H, He H P 2009 *Chin. Phys. B* **18** 468
- [9] Zheng L, Ma S F, Zhong S Q 2011 *Chin. Phys. B* **20** 088701
- [10] Peng G H, Cai X H, Liu C Q 2011 *Phys. Lett. A* **375** 3973
- [11] Sugiyama N, Nagatani T 2012 *Phys. Lett. A* **376** 1803
- [12] Tang T Q, Wang Y P, Yang X B, Wu Y H 2012 *Non-linear Dynam.* **70** 1397
- [13] Jetto K, Ez-Zahraouy H, Benyoussef A 2012 *Chin. Phys. B* **21** 118901
- [14] Gupta A K, Sharma S 2012 *Chin. Phys. B* **21** 015201
- [15] Kamal M A S, Imura J, Hayakawa T, Ohata A, Aihara K 2014 *IEEE Trans. Intell. Transp. Syst.* **15** 878
- [16] Ploeg J, Shukla D P, van de Wouw N, Nijmeijer H 2014 *IEEE Trans. Intell. Transp. Syst.* **15** 854
- [17] Davis L C 2014 *Physica A* **405** 128
- [18] Laval J A, Leclercq L 2013 *Transp. Res. Part B* **52** 17
- [19] Ren D B, Zhang J Y, Zhang J M, Cui S M 2011 *Sci. China Ser. E* **54** 630
- [20] Zhang L D, Jia L, Zhu W X 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 074501 (in Chinese) [张立东, 贾磊, 朱文兴 2012 物理学报 **61** 074501]
- [21] Guo L, Huang X H, Ge P S 2013 *Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition)* **43** 323 (in Chinese) [郭烈, 黄晓慧, 葛平淑 2013 吉林大学学报 (工学版) **43** 323]
- [22] Ren D B, Zhang J M, Wang C 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 078902 (in Chinese) [任殿波, 张京明, 王聪 2014 物理学报 **63** 078902]
- [23] He Z C, Sun W B, Zhang L C, Xu F F, Zhuang L J 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 168901 (in Chinese) [何兆成, 孙文博, 张力成, 许菲菲, 庄立坚 2013 物理学报 **62** 168901]
- [24] Saffarian M, de Winter J C F, Happee R 2013 *IEEE Trans. Human-Mach. Syst.* **43** 8
- [25] Wang J Q, Zhang L, Zhang D Z, Li K Q 2013 *IEEE Trans. Intell. Transp. Syst.* **14** 1
- [26] Børhaug E, Pavlov A, Pettersen K Y 2008 *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*, Cancun, Mexico, Dec. 9–11, 2008 p4984
- [27] Ghommam J, Mnif F, Benali A 2009 *J. Dyn. Syst.-T. Asme.* **131** 021006
- [28] Sasongko R A, Sembiring J, Muhammad H, Mulyanto T 2011 *Proceedings of the 8th Asian Control Conference*, Kaohsiung, Taiwan, May 15–18, 2011 p1259
- [29] Moe S, Caharija W, Pettersen K Y, Schjølberg I 2014 *American Control Conference*, Portland, Oregon, USA, June 4–6, 2014 p3856
- [30] Burger M, Pettersen K Y 2010 *The 49th IEEE Conference on Decision and Control*, Atlanta, GA, USA, December 15–17, 2010 p7159
- [31] Aggoune W, Morarescu I C, Niculescu S I 2011 *Mathematical Reports* **13** 217
- [32] Ali Z, Popov A A, Charles G 2013 *Vehicle Syst. Dyn.* **51** 943
- [33] Kim Y C, Yun K H, Min K D 2014 *Vehicle Syst. Dyn.* **52** 456
- [34] Pan D, Zheng Y 2014 *IET Intell. Trans. SY.* **8** 232
- [35] Xiao L Y, Gao F 2010 *Vehicle Syst. Dyn.* **48** 1167
- [36] Davis L C 2012 *Phys. Lett. A* **376** 2658
- [37] Lee M H, Park H G, Lee, S H, Yoon K S, Lee K S 2013 *Int. J. Precis. Eng. Man.* **14** 373
- [38] Bifulco G N, Pariota L, Simonelli F, Di Pace R 2013 *Transp. Res. Part C* **29** 156
- [39] Wang M, Daamen W, Hoogendoorn S, van Arem B 2014 *IET Intell. Trans. SY.* **8** 77
- [40] Chen W H 2006 *Differential Geometry* (Beijing: Peking University Press) pp23–32 (in Chinese) [陈维桓 2006 微分几何 (北京: 北京大学出版社) 第23—32页]
- [41] Su B Q, Hua Y J, Xin Y L 2010 *Introduction to Practical Differential Geometry* (Beijing: Science Press) pp10–27 (in Chinese) [苏步青, 华宣积, 忻元龙 2010 实用微分几何引论 (北京: 科学出版社) 第10—27页]

Spatiotemporal evolution model of vehicular movement behavior under path constraints*

Pan Deng[†] Zheng Ying-Ping

(School of Electronic & Information Engineering, Tongji University, Shanghai 201804, China)

(Received 28 August 2014; revised manuscript received 6 November 2014)

Abstract

The path of vehicle movement in a complex geographical environment has the 3D space feature, which is evidently the constraint for vehicular movement behaviors and cannot be described in one-dimensional or two-dimensional space. But the path of vehicle movement in a complex geographical environment can be abstracted into a space curve. By introducing theories in differential geometry, we can build a Serret-Frenet frame moving along this space curve with the geometric invariants of arc length, curvature, and torsion. And then, we can give a mathematical description to the dynamic behavior of the Serret-Frenet frame with the time-varying property at an arbitrary point of space curve. Finally, the spatiotemporal evolution model of the vehicle movement behaviors under the path constraint conditions is established and is rigidly proven in mathematics to be suitable for the longitudinal movement and uniform circular motion of a vehicle (in Serret-Frenet frame). It will lay the theoretical foundation for the future study of vehicular movement behaviors on the transport line in a complex geographical environment, including vehicular microscopic behaviors such as the vehicle following operation, lane changing, as well as the vehicular macroscopic behavior in traffic flows.

Keywords: vehicular movement behavior, spatiotemporal evolution, path constraint, Serret-Frenet moving frame

PACS: 89.40.-a, 45.50.Dd, 02.40.-k

DOI: [10.7498/aps.64.078902](https://doi.org/10.7498/aps.64.078902)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61174183).

[†] Corresponding author. E-mail: pandeng@tongji.edu.cn.