

面向低信噪比的自适应压缩感知方法

文方青 张弓 陶宇 刘苏 冯俊杰

Adaptive compressive sensing toward low signal-to-noise ratio scene

Wen Fang-Qing Zhang Gong Tao Yu Liu Su Feng Jun-Jie

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 084301 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.084301

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.084301>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I8>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

矢量声纳高速运动目标稳健高分辨方位估计

[A high resolution robust localization approach of high speed target based on vector sonar](#)

物理学报.2013, 62(14): 144302 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.144302>

用于三层有源隔声结构误差传感的压电传感薄膜阵列及其优化设计

[Optimization of piezoelectric sensor arrays in error sensing of active triple sound insulation structure](#)

物理学报.2013, 62(12): 124301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.124301>

面向低信噪比的自适应压缩感知方法^{*}文方青¹⁾²⁾ 张弓^{1)2)†} 陶宇¹⁾²⁾ 刘苏¹⁾²⁾ 冯俊杰¹⁾

1)(南京航空航天大学电子信息工程学院, 南京 210016)

2)(南京航空航天大学, 雷达成像与微波光子技术教育部重点实验室, 南京 210016)

(2014年7月23日收到; 2014年10月24日收到修改稿)

在压缩感知工程应用中, 信号往往被噪声和干扰所影响, 常规的压缩感知方法难以达到理想的重构效果, 特别是低信噪比应用场景中, 稀疏重构往往会失效. 分析了压缩感知中噪声对重构性能的影响, 从理论上解释了压缩感知中的噪声折叠原理, 并在此基础上提出了一种基于方向性测量的自适应压缩感知方案. 该方案通过后端信号处理系统估计出噪声的相关信息并反馈至压缩感知前端, 前端根据反馈的噪声信息调整测量矩阵, 从而改变感知矩阵的方向, 自适应地感知稀疏谱, 从而有效地抑制信号噪声. 仿真实验表明, 所提的自适应压缩感知方法对稀疏信号重构性能有较大的提升.

关键词: 压缩感知, 低信噪比, 测量矩阵设计

PACS: 43.60.Dh, 43.50.+y, 43.60.Mn

DOI: 10.7498/aps.64.084301

1 引言

近年来, 压缩感知 (compressive sensing, CS)^[1] 理论引起了国内外学者极大的兴趣. CS理论指出, 如果信号在某个变换域是稀疏的, 则可以通过一个与变换域不相关的观测矩阵将高维信号投影到低维空间中, 通过求解优化问题, 从少量的低维数据中大概率地重构高维信号. 与传统的信号处理方法不同, CS系统的前端往往运行在较低的速率下, 以便于减少数据采集系统的尺寸和功耗, 同时也便于数据的传输, 而后端数据处理系统的计算能力一般较强, 这种信号处理方法与目前硬件发展的水平是相符合的 (当前射频段模拟-数字转换器采样速率每六年提升一倍, 而数字信号处理器处理速率几乎每两年提升一倍). 目前, CS理论在宽带信号采集与处理^[2,3]、图像处理^[4-6]、数据压缩等^[7,8] 诸多领域被广泛应用, CS理论的迅猛发展可能引起未来数据采集、传输、处理等领域的革命.

CS理论中的噪声按照产生机理的不同可以分为信号噪声和测量噪声. 前一种主要由信道的物理特征及干扰所引起, 是无可避免地会存在于信号中的; 后一种主要是由测量系统硬件水平而造成的. 现有的文献在建立CS模型时一般将信号噪声归为一种特殊的测量噪声来处理, 在设计测量矩阵时更多考虑的是等距同构条件 (restricted isometry property, RIP)^[9] 是否满足, 通过优化测量矩阵使得感知矩阵列相关性尽量小. 常见的抑噪方法是在重构时考虑噪声的干扰, 将稀疏求解问题转化为带约束的优化问题, 对噪声采用 l_2 范数约束. 此外, 在考虑对噪声的约束时也有部分学者采用对信号稀疏性进行 p 范数约束处理^[10]. 上述各种方法在一定程度上都能提高重构性能, 然而在低信噪比应用场景下这些优化方法一般难以达到较好的重构效果. 近年来的研究表明, 通过随机测量过程, 信号噪声会被高倍放大, 因而引起重构信噪比下降, 这种现象被称为CS中的噪声折叠 (noise folding, NF) 现象^[11]. 针对这种现象, 有学者提出

^{*} 国家自然科学基金 (批准号: 61071163, 61201367, 61271327, 61471191)、南京航空航天大学博士学位论文创新与创优基金 (批准号: BCXJ14-08)、江苏省研究生培养创新工程 (批准号: KYLX_0277)、中央高等学校基本科研业务费专项资金 (批准号: NP2015504) 和江苏高等学校优势学科建设工程资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: gzhang@nuaa.edu.cn

增强型最小化 l_1 范数的算法^[12]以抑制信号噪声,取得了较好的重构效果.但是,目前还鲜有文献从设计测量矩阵方面来开展相关工作.

针对现有研究的不足,本文提出一种面向近似稀疏信号的自适应压缩感知(adaptive compressive sensing)方案.受传统信号采集中的防混叠滤波器应用的启发,为从源头上滤除噪声干扰,感知矩阵被赋予方向性,其根据噪声信息自适应地感知可能的稀疏信号.为提高噪声信息估计的鲁棒性,利用CS中的多测量矢量(multiple measurement vectors, MMV)模型^[13]对观测矢量进行建模,并通过子空间分离的方法估计噪声信息.根据后端处理中心反馈的噪声信息调整测量矩阵的系数,再对信号进行压缩测量.经过优化测量的低维信号中噪声分量会减少,从而能有效地提高重构性能.

2 CS理论基础

CS理论本身所关注的问题可以表述为通过对信号的高度不完备线性测量,从较少的测量数据中精确地重建原始信号.不失一般性,考虑一个近似稀疏信号 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ 的数学模型

$$\mathbf{x} = \Psi(\mathbf{s} + \mathbf{n}), \quad (1)$$

式中, $\Psi \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 为某一标准正交基; $\mathbf{n}$ 为信号噪声,其被假设为一零均值高斯随机过程; $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ 为稀疏矢量,其仅有 K ($K \ll N$) 个非零元素,即 $\|\mathbf{s}\|_0 = K$, $\|\mathbf{s}\|_0$ 表示 $\mathbf{s}$ 的 l_0 范数, $\mathbf{x}$ 被称为在基 Ψ 上 K -稀疏的.在上述假设下,CS理论指出,可以通过一个随机观测过程获取 M ($K < M < N$) 维观测数据,然后从这些 M 维数据中高概率地重构出原始稀疏矢量 $\mathbf{s}$,从而还原出 $\mathbf{x}$.CS中的随机观测过程可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \Phi \mathbf{x} + \mathbf{w} = \Phi \Psi \mathbf{s} + \Phi \Psi \mathbf{n} + \mathbf{w} \\ &= \Theta \mathbf{s} + \mathbf{e}, \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{M \times 1}$ 为测量(压缩)后的信号; $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$ 为随机测量矩阵; $\mathbf{w}$ 为测量噪声,其被假设为零均值高斯过程; $\Theta = \Phi \Psi$ 为感知矩阵; $\mathbf{e} = \Theta \mathbf{n} + \mathbf{w}$ 也是一零均值高斯过程,其方差被假设为 σ_e^2 .由(2)式求解稀疏矢量的过程可表述为求解如下约束问题:

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \min \|\mathbf{s}\|_0, \quad \text{s.t. } \|\mathbf{y} - \Theta \mathbf{s}\|_2^2 \leq \sigma_e^2, \quad (3)$$

式中 $\|\mathbf{y} - \Theta \mathbf{s}\|_2$ 表示 l_2 范数.由于 $M < N$, 上述逆过程为NP-hard问题,一般无确定的解,但是由于 $\mathbf{s}$ 稀疏性的存在,则有望通过线性规划找出确定解.在一定的条件下, l_0 优化问题可以通过一个 l_1 优化问题来近似逼近^[14],即

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \min \|\mathbf{s}\|_1, \quad \text{s.t. } \|\mathbf{y} - \Theta \mathbf{s}\|_2^2 \leq \sigma_e^2, \quad (4)$$

式中 $\|\mathbf{s}\|_1$ 表示 $\mathbf{s}$ 的 l_1 范数.(3)和(4)式的等价条件是感知矩阵 Θ 满足 RIP 条件^[9]

$$(1 - \delta_K) \|\mathbf{s}\|_2^2 \leq \|\Theta \mathbf{s}\|_2^2 \leq (1 + \delta_K) \|\mathbf{s}\|_2^2, \quad (5)$$

式中 δ_K 为一很小的常数.一般来说信号的稀疏性是未知的,(4)式中的寻优问题可以被转化为一个带约束的二次规划问题:

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \min (\|\mathbf{y} - \Theta \mathbf{s}\|_2^2 + \eta \|\mathbf{s}\|_1), \quad (6)$$

式中 η 为优化质量平衡参数.(6)式一般可以通过常见的优化算法如正交匹配追踪(orthogonal matching pursuit, OMP)算法^[15]、稀疏贝叶斯学习(sparse Bayesian learning, SBL)^[16]算法等求解.此外,也可以通过对信号稀疏性进行 p 范数约束,采用规则化的聚焦算法(regularized FOCUSS, RFOCUSS)^[13]进行求解.

3 CS中的NF分析

文献[11]从测量矩阵白化效应的角度出发,通过对白化过程后观测噪声的方差分析,说明(2)式中的随机测量过程会使得信号噪声被放大约 N/M 倍.本文从严格意义上的数学表述出发,对比了重构的信噪比相对原始信噪比的变化,进一步说明了CS中的NF现象,并分析了该现象产生的原因.在数学推导前,对(2)式表述的模型进行如下假设:

- 1) 感知矩阵 Θ 满足(5)式表述的 RIP 条件;
- 2) 测量噪声 $\mathbf{w} = 0$, 即 $\mathbf{e} = \Theta \mathbf{n}$, 信号噪声 $\mathbf{n}$ 满足高斯分布 $N(0, \sigma_n^2)$;

3) 感知矩阵 Θ 的列向量经过归一化处理,即 $\|\Theta_{\cdot n}\|_2 = 1$ ($n = 1, 2, \dots, N$); 感知矩阵 Θ 的行向量满足理想的正交特性,即

$$\Theta_{i \cdot} \Theta_{j \cdot}^H = \begin{cases} 0 & (i \neq j), \\ 1 & (i = j), \end{cases}$$

式中, $i, j \in 1, 2, \dots, M$; Θ^H 表示对矩阵的共轭转置运算.

在下面的表述中, 定义 $\lambda_j(\boldsymbol{\Theta})$ 为 $\boldsymbol{\Theta}$ 的第 j 个最大的特征值, $s_j(\boldsymbol{\Theta})$ 为 $\boldsymbol{\Theta}$ 的第 j 个最大的奇异值, 因此 $s_j(\boldsymbol{\Theta}) = \lambda(\boldsymbol{\Theta}^H \boldsymbol{\Theta})$. 同时引入如下引理^[17].

引理 假设 $\boldsymbol{\Theta}$ 为一个 $M \times N$ ($M < N$) 矩阵, Λ 是一个下标集合且 $|\Lambda|_0 \leq K$. 如果 $\boldsymbol{\Theta}$ 满足常数为 δ_K 的 RIP 条件, 则下式成立

$$\frac{1}{\sqrt{1+\delta_K}} \leq s_k(\boldsymbol{\Theta}_\Lambda^\dagger) \leq \frac{1}{\sqrt{1-\delta_K}}, \quad (7)$$

式中, $\boldsymbol{\Theta}_\Lambda$ 表示 $\boldsymbol{\Theta}$ 中索引值在集合 Λ 中的所有列组成的矩阵, $\boldsymbol{\Theta}_\Lambda^\dagger$ 表示矩阵 $\boldsymbol{\Theta}_\Lambda$ 的最小二乘广义逆.

在假设条件 3) 成立时, 可得

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\Theta}\|_F &= \sqrt{\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N |\theta_{m,n}|^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^N \|\boldsymbol{\Theta}_{\cdot n}\|_2^2} \\ &= \sqrt{N} = \sqrt{\sum_{n=1}^N \|\boldsymbol{\Theta}_{m\cdot}\|_2^2} \\ &= \sqrt{M \|\boldsymbol{\Theta}_{m\cdot}\|_2^2}, \end{aligned} \quad (8)$$

式中 $\|\boldsymbol{\Theta}\|_F$ 表示矩阵 $\boldsymbol{\Theta}$ 的 Frobenius 范数. 由 (8) 式可知, 在上述假设下有 $\|\boldsymbol{\Theta}_{m\cdot}\|_2^2 = N/M$, 故 $\boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\Theta}^H = \frac{N}{M} \mathbf{I}_M$. 因此, 噪声方差的期望为

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{n} (\boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{n})^H) &= \boldsymbol{\Theta} E(\boldsymbol{n} \boldsymbol{n}^H) \boldsymbol{\Theta}^H \\ &= \frac{N \sigma_n^2}{M} \mathbf{I}_M, \end{aligned} \quad (9)$$

即 $\sigma_e^2 = \frac{N \sigma_n^2}{M}$. 因此

$$\begin{aligned} E(\|\boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{n}\|_2^2) &= E(\text{tr}(\boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{n} (\boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{n})^H)) \\ &= \text{tr}\left(\frac{N \sigma_n^2}{M} \mathbf{I}_M\right) = N \sigma_n^2. \end{aligned}$$

若引理中的 Λ 表示稀疏矢量非零元素所对应的索引位置, 则由最小二乘 (least-squares) 优化准则得到 $\hat{\mathbf{s}}$ 的最优估计为

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{s} + \boldsymbol{\Theta}_\Lambda^\dagger \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{n}. \quad (10)$$

由 RIP 条件可知, $\frac{\|\boldsymbol{\Theta} \mathbf{s}\|_2^2}{\|\mathbf{s}\|_2^2} \approx 1$, 即经过随机测量, 信号功率近似不变. 为衡量信号噪声对重构性能的影响, 定义噪声增益为重构噪声功率与原信号噪声功率之比, 即

$$\text{Gain}_{\text{noise}} = \frac{E(\|\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{s}\|_2^2)}{E(\|\boldsymbol{n}_\Lambda\|_2^2)}. \quad (11)$$

由于 $\boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{n}$ 是一个高斯过程, 所以

$$E(\|\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{s}\|_2^2)$$

$$\begin{aligned} &= E(\|\boldsymbol{\Theta}_\Lambda^\dagger \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{n}\|_2^2) = E(\text{tr}(\boldsymbol{\Theta}_\Lambda^\dagger \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{n} (\boldsymbol{\Theta}_\Lambda^\dagger \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{n})^H)) \\ &= \text{tr}(\boldsymbol{\Theta}_\Lambda^\dagger E(\boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{n} (\boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{n})^H) (\boldsymbol{\Theta}_\Lambda^\dagger)^H) \\ &= \frac{N \sigma_n^2}{M} \text{tr}(\boldsymbol{\Theta}_\Lambda^\dagger (\boldsymbol{\Theta}_\Lambda^\dagger)^H) \\ &= \frac{N \sigma_n^2}{M} \sum_{k=1}^K s_k(\boldsymbol{\Theta}_\Lambda^\dagger)^2. \end{aligned} \quad (12)$$

结合 (7) 式表述的引理, 有 $E(\|\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{s}\|_2^2) = \frac{N K \sigma_n^2}{M}$. 而 $\boldsymbol{n}$ 是一个高斯噪声, 所以 $E(\|\boldsymbol{n}_\Lambda\|_2^2) = K \sigma_n^2$, 因此, 噪声增益

$$\text{Gain}_{\text{noise}} = \frac{N}{M}. \quad (13)$$

也就是说, 经过随机测量, 信号中的噪声会被放大 N/M 倍, 这种现象被称为 CS 中的 NF 现象. 由于采用随机测量矩阵对信号进行观测的过程实际上就是一个白化的过程, 其将信号的能量和噪声的能量重新均匀分布. 感知矩阵列的非正交特性使得压缩域中的噪声分量与信号分量串扰. 信号噪声会破坏信号的稀疏性, 噪声越大, 串扰越严重, 重构性能就越差.

4 自适应 CS 方案

由上小节分析可知, $\text{Gain}_{\text{noise}}$ 与测量矩阵的行数和列数密切相关. 一般来说, 测量矩阵的列数 M 是一个定值, 其选取与 RIP 条件有关 (一般与 K , N 及 δ_K 密切相关), 而 N 值只与信号的变换基有关. 实际上, 感知矩阵 $\boldsymbol{\Theta}$ 中仅有 $\boldsymbol{\Theta}_\Lambda$ 感知信号稀疏谱, 而 $\boldsymbol{\Theta}_\Lambda^\perp$ 全部感知噪声谱 ($\boldsymbol{\Theta}_\Lambda^\perp$ 为 $\boldsymbol{\Theta}_\Lambda$ 的正交补). 如果能从源头上剔除部分噪声谱, 则会减小 $\text{Gain}_{\text{noise}}$ 中的 N 值, 从而提升重构性能. 现有的 CS 方案中, 为提高稀疏信号的重构性能, 常见的方法是优化感知矩阵, 使其列之间的相关性尽可能小^[18], 这样测量值能提供更多关于稀疏向量的信息; 也有学者从重构算法出发, 对信号和噪声联合约束求解优化问题, 或者引入信号统计特性模型, 利用贝叶斯算法优化求解. 上述都是在对信号及所有的噪声进行感知后的优化方法. 在传统的射频采样前端, 为滤除感兴趣频带外的噪声和干扰, 一般在采样前使用一个防混叠滤波器. 受此启发, 测量矩阵被设计成如下形式:

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathfrak{F}_\Omega(\mathbf{A}) \boldsymbol{\Psi}^{-1}, \quad (14)$$

其中, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ 为一个伪随机矩阵; Ω 为一个索引集合, 记录列向量的位置; $\mathfrak{S}_\Omega(\mathbf{A})$ 表示将矩阵 $\mathbf{A}$ 的第 i 列 ($i \in \Omega$) 置零. 所提的自适应 CS 方案如图 1 所示. 索引集 Ω 初始化为空集 $\emptyset$, 通过传统 CS 方法获取观测值后, 通过某种方法获得噪声的位置信息, 将其所对应的索引值记录于 Ω , 更新观测矩阵 Φ 后再对信号进行压缩测量. 在获取稀疏矢量的估计 $\hat{\mathbf{s}}$ 后, 再重构出原信号.

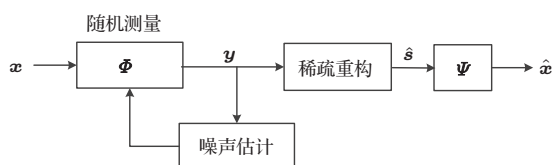


图 1 自适应 CS 方案图

Fig. 1. Scheme of the proposed adaptive CS.

为准确地获取噪声的位置信息, 对信号使用同一观测矩阵获得多个观测样本,

$$\mathbf{y}_l = \Theta \mathbf{s} + \mathbf{e} \quad (l = 1, 2, \dots, L). \quad (15)$$

假设信号在上述观测过程中其稀疏性保持不变, 即 $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_L$ 有相同的行稀疏结构, 只是稀疏系数的大小不同, 噪声的统计特性也保持不变. 在上述假设下 (15) 式的观测过程可以表示成如下 MMV 模型:

$$\mathbf{Y} = \Theta \mathbf{S} + \mathbf{E}, \quad (16)$$

其中, $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_L]$ 为多维测量矩阵, $\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_L]$ 为多维稀疏向量组成的矩阵, $\mathbf{E}$ 为测量后的总噪声. 一般情况下, 由于信号的时变特性, 可获取的测量矢量的维数 $1 \leq L \leq M$.

本文使用子空间的方法估计噪声索引值的信息. 由压缩样本获取信号的协方差矩阵 $\mathbf{R}$ 的估计 $\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{y}_l \mathbf{y}_l^H$, 在理想情况下信号协方差矩阵可以划分成两个子空间:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{U}^H = \sum_{m=1}^M \lambda_m \mathbf{u}_m \mathbf{u}_m^H \\ &= \mathbf{U}_s \mathbf{\Sigma}_s \mathbf{U}_s^H + \mathbf{U}_n \mathbf{\Sigma}_n \mathbf{U}_n^H, \end{aligned} \quad (17)$$

其中, $\mathbf{U}^{M \times N}$ 为特性矩阵; 特征值对角矩阵 $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M)$, 且特征值按从大到小排列 $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_K > \lambda_{K+1} = \dots = \lambda_M$; $\mathbf{u}_m$ 为特征值 λ_m 所对应的特征向量; 信号子空间 $\mathbf{U}_s = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_K]$, 其对应的特征值矩阵 $\mathbf{\Sigma}_s = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K]$; 相应地, 噪声子空间

$\mathbf{U}_n = [\mathbf{u}_{K+1}, \mathbf{u}_{K+2}, \dots, \mathbf{u}_M]$, 相应的特征值矩阵 $\mathbf{\Sigma}_n = [\lambda_{K+1}, \lambda_{K+2}, \dots, \lambda_M]$. 令 Λ 表示由 $\mathbf{S}$ 中的 K 个非零行的索引位置所构成的集合, 则有

$$\mathbf{R} \mathbf{U}_n = \Theta_\Lambda \mathbf{R}_{\mathbf{S}_\Lambda} \Theta_\Lambda^H \mathbf{U}_n + \sigma_n^2 \mathbf{U}_n = \sigma_n^2 \mathbf{U}_n, \quad (18)$$

其中, $\Theta_\Lambda \in \mathbb{R}^{M \times K}$ 表示 Θ 中索引值属于集合 Λ 的所有列构成的矩阵, $\mathbf{R}_{\mathbf{S}_\Lambda}$ 为行向量所构成的矩阵 $\mathbf{S}_\Lambda \in \mathbb{R}^{K \times L}$ 的协方差矩阵. 由 (18) 式可得 $\Theta_\Lambda \mathbf{R}_{\mathbf{S}_\Lambda} \Theta_\Lambda^H \mathbf{U}_n = 0$, 由于 $\mathbf{R}_{\mathbf{S}_\Lambda}$ 是一个非奇异的矩阵, 所以有

$$\Theta_\Lambda^H \mathbf{U}_n = 0. \quad (19)$$

也就是说 Θ_Λ 中的每个列向量与噪声子空间正交. 由上述正交关系, 可以得到感知矩阵方向性的谱函数

$$f_n = \frac{1}{\Theta_{\cdot n}^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \Theta_{\cdot n}} \quad (n = 1, 2, \dots, N). \quad (20)$$

通过索引值 n 的变换, 来寻找信号所对应的索引值. 由于低信噪比条件下这种正交性并不明显, 特别是测量矢量的维数 L 较小时, 这种峰值特性较差. 但是由于噪声方向所对应的函数值一般较小, 谱函数 f_n 的几个最小值一般是由噪声所引起的, 因此可以通过 f_n 的几个最小值估计部分噪声所对应的索引值. 由上节内容可知, 噪声往往会随着随机观测过程而引入观测矢量中, 从而引起重构性能的下降. 本文通过噪声信息优化观测矩阵的目的就是为了从源头上“剔除”部分噪声对重构性能的影响.

实际工程中如何确定与噪声空间所对应的最小值数量是一个难题. 当信噪比较高, 测量矢量维数 L 较大或者稀疏度 K 较小等情况下, 往往能够准确完成这项任务. 实际工程中这些都很难达到. 本文的做法是选择一个固定的数值作为噪声空间所对应的最小值数量的阈值 (硬阈值), 如何根据不同的条件确定这个数值将是未来继续研究的重点. (20) 式也可以表示为

$$\begin{aligned} g_n &= 1/f_n = \text{tr}(\mathbf{P}_n \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H) \\ &\quad (n = 1, 2, \dots, N), \end{aligned} \quad (21)$$

其中, $\mathbf{P}_n = \Theta_{\cdot n} [\Theta_{\cdot n}^H \Theta_{\cdot n}]^{-1} \Theta_{\cdot n}^H$ 为 $\Theta_{\cdot n}$ 的投影矩阵. 通过 (21) 式的几个最大值同样可以估计出部分噪声所对应的索引值.

综上所述, 现将本文所提出的自适应 CS 方案步骤归纳如下.

步骤 1 按 (14) 式初始化测量矩阵 Φ , 其中 $\Omega = \emptyset$. 获取测量值矩阵 $\mathbf{Y}$, 利用多个测量值构造 (16) 式中的 MMV 模型.

步骤2 计算 $\mathbf{Y}$ 的协方差矩阵 $\mathbf{R}$, 并对其进行特征值分解, 将特征值从大到小排列, 获得噪声子空间 $\mathbf{U}_n$.

步骤3 使 n 变换, 计算(20)或者(21)式中的谱函数, 记下(20)式中的 T 个最小值所对应的索引值, 或者记下(21)式中 T 个最大值所对应的索引值, 将这些索引值存放于集合 Ω .

步骤4 更新(14)式中的测量矩阵, 重新获取测量矢量, 按照传统CS重构方法估计稀疏向量 $\hat{\mathbf{s}}$, 重构原始信号 $\hat{\mathbf{x}}$.

5 实验系统及测量结果

为验证本文所提的自适应方案的有效性, 使用Matlab对该方案进行仿真. 其中, 稀疏基矩阵 Ψ 为傅里叶基, 信号长度 $N = 150$, 测量长度 $M = 50$, 信号稀疏度 $K = 3$, 测量矢量维数

$L = 10$, 索引集合 Ω 元素的个数 $T = 50$. 仿真中的信噪比定义为稀疏信号功率和信号噪声功率之比, $SNR = 10 \lg(\|\mathbf{s}\|_2^2 / \|\mathbf{n}\|_2^2)$, 系统观测噪声 $w = 0$. 本文选取OMP算法、FOCUSS算法、SBL算法对方案进行评测, 仿真结果中“非自适应”是指按照常规CS方法进行观测和重构过程的仿真结果, “自适应”表示使用本文所提的自适应CS方案抑噪方法进行测量和重构的仿真结果. 为评价重构效果, 选择失败率^[19]和正则化均方误差(regularization mean square error, RMSE)作为重构性能评价标准. 其中, 若重构矢量的前 K 个最大的系数所在的索引位置与原始稀疏矢量非零元素的位置不匹配(只要索引位置与原始稀疏矢量非零元素位置出现一个不同), 则将该次重构实验标记为失败. 所有的方案进行1000次蒙特卡罗仿真, 每次仿真所用的稀疏矢量非零元素的大小和位置随机生成, 噪声为高斯白噪声.

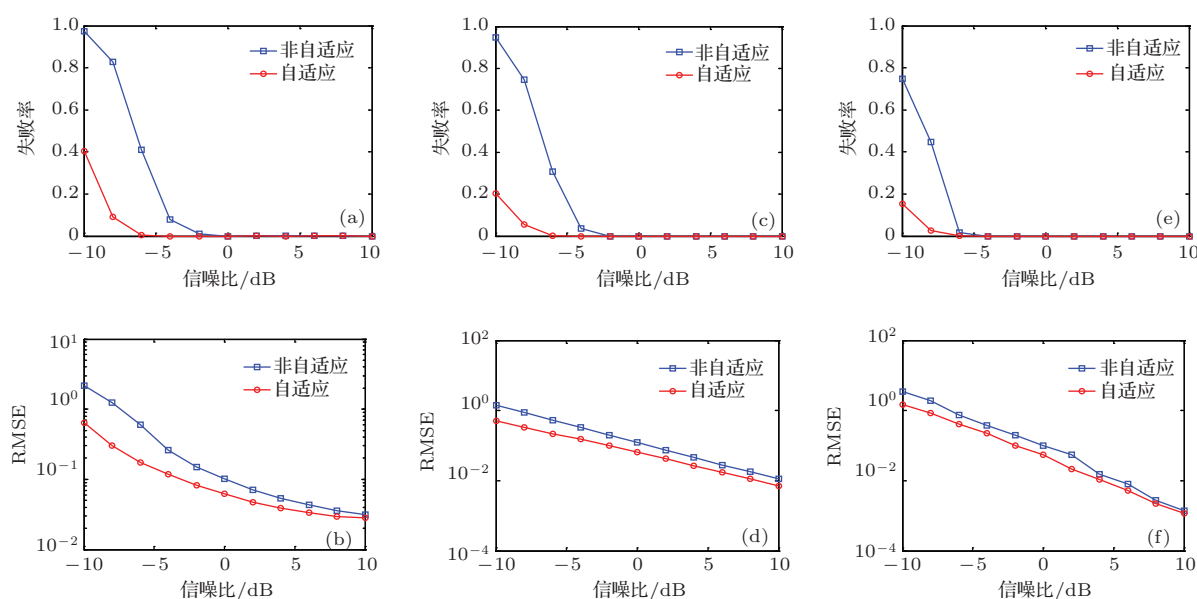


图2 (网刊彩色) 不同信噪比下重构性能的比较 (a) OMP算法失败率对比; (b) OMP算法RMSE对比; (c) FOCUSS算法失败率对比; (d) FOCUSS算法RMSE对比; (e) SBL算法失败率对比; (f) SBL算法RMSE对比

Fig. 2. (color online) Recovery performance comparison under different signal-to-noise ratios: (a) failure rate comparison for OMP algorithm; (b) RMSE comparison for OMP algorithm; (c) failure rate comparison for FOCUSS algorithm; (d) RMSE comparison for FOCUSS algorithm; (e) failure rate comparison for SBL algorithm; (f) RMSE comparison for SBL algorithm.

在不同信噪比条件下自适应方案和非自适应方案的性能如图2所示. 由图2可知, 随着信噪比的增加, 各种算法的性能都会提升. 但各种算法在低信噪比下重构性能普遍较差, 特别是当信噪比 $SNR \leq -4$ dB时, 失败率会显著上升, 而使用自适应方案能有效地抑制噪声干扰, 提升重构性能.

在不同信号稀疏度 K 下自适应方案和非自适应方案的仿真结果如图3所示. 由图3可知, 随着稀疏度 K 值上升到一定程度, 感知矩阵 Θ 的RIP特性会被严重破坏, 所有的算法重构性能会随之变差. 但相同的稀疏度条件下, 本文所提的自适应方案能取得更好的重构性能.

图4显示了MMV中测量矢量的维数 L 与重构性能的关系. 从图4可以看出, 测量矢量维数越多, 重构效果就越好. 由于 L 对本文所提的自适应方案中噪声信息估计非常重要, 当 $L > K$ 后, 基于子空

间方法的噪声信息估计会非常稳定, 因此重构性能会比较稳定, 不会显著变化. 而在矢量维数 L 相同的条件下, 自适应方案的重构性能要优于非自适应方案.

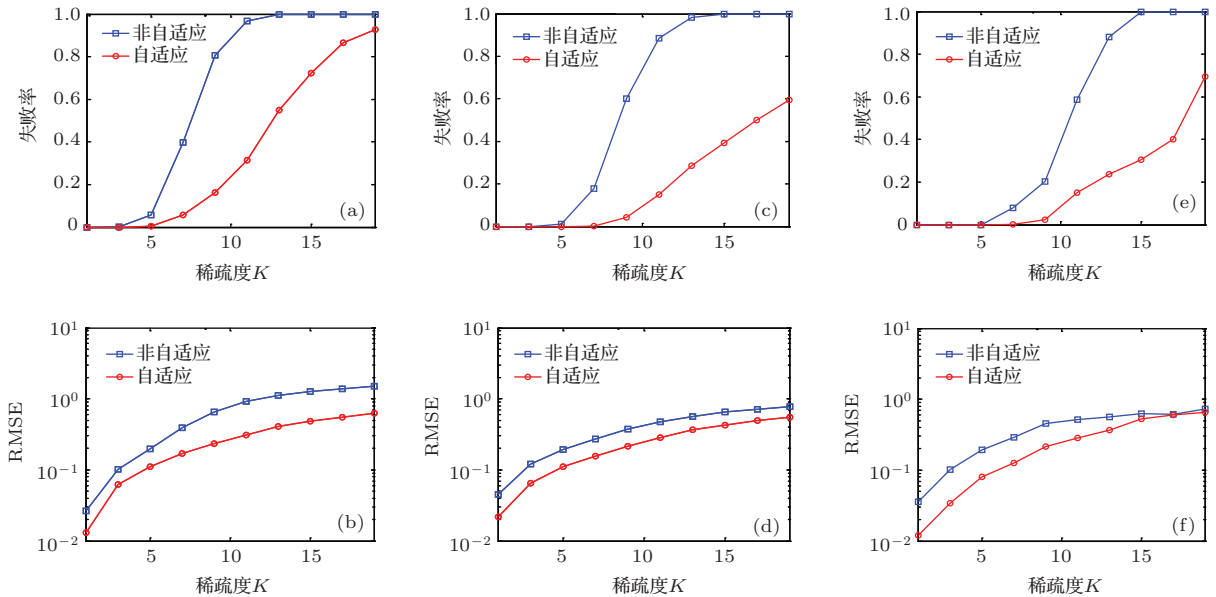


图3 (网刊彩色) 不同稀疏度 K 下重构性能的比较 (a) OMP算法失败率对比; (b) OMP算法RMSE对比; (c) FOCUSS算法失败率对比; (d) FOCUSS算法RMSE对比; (e) SBL算法失败率对比; (f) SBL算法RMSE对比

Fig. 3. (color online) Recovery performance comparison under different sparsity K : (a) failure rate comparison for OMP algorithm; (b) RMSE comparison for OMP algorithm; (c) failure rate comparison for FOCUSS algorithm; (d) RMSE comparison for FOCUSS algorithm; (e) failure rate comparison for SBL algorithm; (f) RMSE comparison for SBL algorithm.

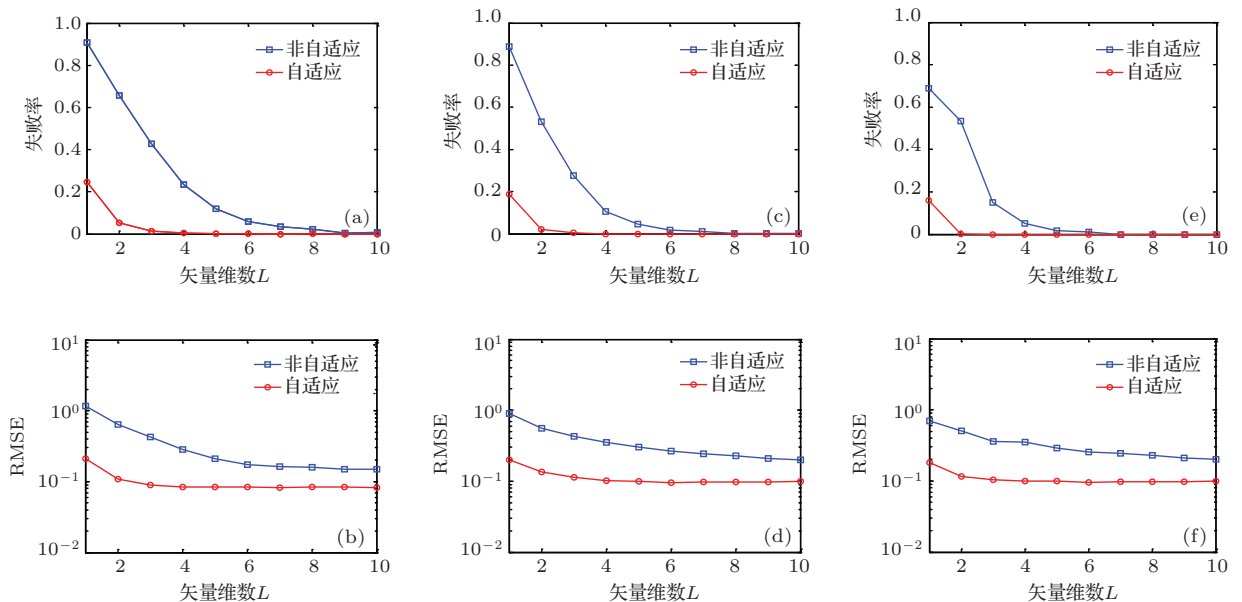


图4 (网刊彩色) 不同矢量维数 L 下重构性能的比较 (a) OMP算法失败率对比; (b) OMP算法RMSE对比; (c) FOCUSS算法失败率对比; (d) FOCUSS算法RMSE对比; (e) SBL算法失败率对比; (f) SBL算法RMSE对比

Fig. 4. (color online) Recovery performance comparison under different vector dimension L : (a) failure rate comparison for OMP algorithm; (b) RMSE comparison for OMP algorithm; (c) failure rate comparison for FOCUSS algorithm; (d) RMSE comparison for FOCUSS algorithm; (e) failure rate comparison for SBL algorithm; (f) RMSE comparison for SBL algorithm.

6 结 论

本文在分析CS中噪声对重构性能的影响的基础上提出了一种自适应的CS方案. 通过合理地设计测量矩阵, 使得感知矩阵具有方向性, 能有效地抑制噪声的干扰, 提高低信噪比下稀疏信号的重构性能. 通过仿真程序对比了常规CS方案与本文所提的自适应CS方案的重构性能, 验证了所提方案的有效性. 本文的设计思想可作为未来模拟信息转换器、近似稀疏信号压缩、宽带干扰抑制等领域CS应用的参考. 当然, 如何更高效准确地估计噪声信息、合理地选取感知方向的维数等问题还需要深入研究.

参考文献

- [1] Donoho D L 2006 *IEEE Trans. Inform. Theory* **52** 1289
- [2] Mishali M, Eldar Y C 2009 *IEEE Trans. Signal Process.* **57** 993
- [3] Zhang J C, Fu N, Qiao L Y 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 030701 (in Chinese) [张京超, 付宁, 乔立岩 2014 物理学报 **63** 030701]
- [4] Wang L Y, Li L, Yan B, Jiang C S, Wang H Y, Bao S L 2010 *Chin. Phys. B* **19** 088106
- [5] Zhao S M, Zhuang P 2014 *Chin. Phys. B* **23** 054203
- [6] Sun Y L, Tao J X 2014 *Chin. Phys. B* **23** 078703
- [7] Wang Z, Wang B Z 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 120202 (in Chinese) [王哲, 王秉中 2014 物理学报 **63** 120202]
- [8] Yang F Q, Zhang D H, Huang K D 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 058701 (in Chinese) [杨富强, 张定华, 黄魁东 2014 物理学报 **63** 058701]
- [9] Candes E J, Tao T 2005 *IEEE Trans. Inform. Theory* **51** 4203
- [10] Rao B D, Engan K, Cotter S F 2003 *IEEE Trans. Signal Process.* **51** 760
- [11] Castro E A, Eldar Y C 2011 *IEEE Signal Process. Lett.* **18** 478
- [12] Davenport M A, Laska J N, Treichler J, Baraniuk R G 2012 *IEEE Trans. Signal Process.* **60** 4628
- [13] Cotter S F, Rao B D, Engan K, Delgado K K 2005 *IEEE Trans. Signal Process.* **53** 2477
- [14] Candes E J 2008 *Comptes Rendus Mathematique* **346** 589
- [15] Tropp J A, Gilbert A C 2007 *IEEE Trans. Inform. Theory* **53** 4655
- [16] Ji S H, Xue Y, Carin L 2008 *IEEE Trans. Signal Process.* **56** 2346
- [17] Davenport M A 2010 *Ph. D. Dissertation* (Texas: Rice University)
- [18] Zhang J D, Zhu D Y, Zhang G 2012 *IEEE Trans. Signal Process.* **60** 1718
- [19] Wipf D P, Rao D B 2007 *IEEE Trans. Signal Process.* **55** 3704

Adaptive compressive sensing toward low signal-to-noise ratio scene^{*}

Wen Fang-Qing¹⁾²⁾ Zhang Gong^{1)2)†} Tao Yu¹⁾²⁾ Liu Su¹⁾²⁾ Feng Jun-Jie¹⁾

1) (*College of Electronic and Information Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China*)

2) (*Key Laboratory of Radar Imaging and Microwave Photonics, Ministry of Education, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China*)

(Received 23 July 2014; revised manuscript received 24 October 2014)

Abstract

As an alternative paradigm to the Shannon-Nyquist sampling theorem, compressive sensing enables sparse signals to be acquired by sub-Nyquist analog-to-digital converters thus may launch a revolution in signal collection, transmission and processing. In the practical compressive sensing applications, the sparse signal is always affected by noise and interference, and therefore the recovery performance reduces based on the conventional compressive sensing, especially in the low signal-to-noise scene, the sparse recovery is usually unavailable. In this paper, the influence of noise on recovery performance is analyzed, so as to provide the theoretical basis for the noise folding phenomenon in compressive sensing. From the analysis, we find that the expected noise gain in the random measure process is closely related to the row and column of the measurement matrix. However, only those columns corresponding to the support for the sparse signal contribute to the sparse vector. In the traditional Shannon-Nyquist sampling system, an antialiasing filter is applied before the sampling process, so as to filter the noise beyond the passband of interest. Inspired by the necessity of antialiasing filtering in bandpass signal sampling, we propose a selective measurement scheme, namely adapted compressive sensing, whose measurement matrix can be updated according to the noise information fed back by the processing center. The measurement matrix is specially designed, and the sensing matrix has directivity so that the signal noise can be suppressed. The measurement matrix senses only the spectrum of interest, where the sparse spectrum is most likely to lie. Moreover, we compare the recovery performance of the proposed adaptive scheme with those of the non-adaptive orthogonal matching pursuit algorithm, FOCal underdetermined system solver algorithm, and sparse Bayesian learning algorithm. Extensive numerical experiments show that the proposed scheme has a better improvement in the performance of the sparse signal recovery. From the viewpoint of implementation, the measurement noise should be taken into consideration in the system, and more efficient algorithms will be developed for source pre-estimation at lower signal-to-noise ratio.

Keywords: compressive sensing, low signal-to-noise ratio, measurement matrix design

PACS: 43.60.Dh, 43.50.+y, 43.60.Mn

DOI: 10.7498/aps.64.084301

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61071163, 61201367, 61271327, 61471191), the Funding for Outstanding Doctoral Dissertation of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, China (Grant No. BCXJ14-08), the Innovation Program for Graduate Education of Jiangsu Province, China (Grant No. KYLX_0277), the Fundamental Research Funds for the Central Universities, China (Grant No. NP2015504), and the Priority Discipline Development Program of Jiangsu Higher Education Institutions, China.

[†] Corresponding author. E-mail: gzhang@nuaa.edu.cn