

变系数瞬态热传导问题边界元格式的特征正交分解降阶方法

胡金秀 高效伟

Reduced order model analysis method via proper orthogonal decomposition for variable coefficient of transient heat conduction based on boundary element method

Hu Jin-Xiu Gao Xiao-Wei

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 014701 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.014701

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.014701>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I1>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于超材料的平板二维定向传热结构设计

[Design of two-dimensional plate directional heat transmission structure based on meta materials](#)

物理学报.2015, 64(22): 224401 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.224401>

基于超材料的定向传热结构研究与设计

[Research and design of directional heat transmission structure based on metamaterial](#)

物理学报.2015, 64(8): 084401 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.084401>

基于(火积)理论的轧钢加热炉壁变截面绝热层构形优化

[Constructal optimization of variable cross-section insulation layer of steel rolling reheating furnace wall based on entransy theory](#)

物理学报.2015, 64(5): 054402 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.054402>

亚表面异质缺陷对功能梯度材料表面温度场的影响

[Influence of inclusion in functionally graded materials on the surface temperature distributions](#)

物理学报.2014, 63(19): 194401 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.194401>

基于拉普拉斯方程的任意形状热斗篷研究与设计

[Research and design of thermal cloak with arbitrary shape based on Laplace's equation](#)

物理学报.2014, 63(19): 194402 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.194402>

变系数瞬态热传导问题边界元格式的特征正交分解降阶方法*

胡金秀¹⁾ 高效伟^{2)†}

1) (大连理工大学工程力学系, 大连 116024)

2) (大连理工大学航空航天学院, 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024)

(2015年6月15日收到; 2015年8月24日收到修改稿)

提出了一种基于边界元法求解变系数瞬态热传导问题的特征正交分解(POD)降阶方法, 重组并推导出变系数瞬态热传导问题适合降阶的边界元离散积分方程, 建立了变系数瞬态热传导问题边界元格式的POD降阶模型, 并用常数边界条件下建立的瞬态热传导问题的POD降阶模态, 对光滑时变边界条件瞬态热传导问题进行降阶分析. 首先, 对一个变系数瞬态热传导问题, 建立其边界域积分方程, 并将域积分转换成边界积分; 其次, 离散并重组积分方程, 获得可用于降阶分析的矩阵形式的时间微分方程组; 最后, 用POD模态矩阵对该时间微分方程组进行降阶处理, 建立降阶模型并对其求解. 数值算例验证了本文方法的正确性和有效性. 研究表明: 1) 常数边界条件下建立的低阶POD模态矩阵, 能够用来准确预测复杂光滑时变边界条件下的温度场结果; 2) 低阶模型的建立, 解决了边界元法中采用时间差分推进技术求解大型时间微分方程组时求解速度慢、算法稳定性差的问题.

关键词: 边界元法, 变系数瞬态热传导, 特征正交分解, 降阶模型

PACS: 47.11.Hj, 44.10.+i, 44.05.+e

DOI: 10.7498/aps.65.014701

1 引言

边界单元法^[1]因为其具有只需对问题求解域的边界离散成单元的优点, 越来越多地应用于工程实际中^[2-9], 尤其在瞬态热传导问题^[10-17]的求解中得到广泛应用. 用边界元法求解变系数瞬态热传导问题的一般过程是这样的^[3]: 首先, 采用线性和均质热传导问题的基本解——格林函数, 将控制微分方程转化为边界域积分方程; 其次, 对于出现在积分方程中的域积分, 采用径向积分法^[18-21]或双重互易法^[22]将其转换为边界积分; 最后, 采用时间差分推进技术^[3,10]求解离散后的时间微分方程. 大量的实际算例验证了以上边界元法求解过程的正确性和有效性^[3,10-13], 然而, 稍有不足的是, 在

采用时间差分推进技术求解时间微分方程组时, 一方面算法的稳定性与时间步长的大小息息相关^[17], 另一方面要对所有指定的时间步进行时间推进循环, 在每个时间步推进中, 都要对形成的系统线性方程组进行求解, 当问题的自由度大时, 很多个方程组的求解将是一项耗时耗内存的工作^[23].

为此, 本文将特征正交分解(proper orthogonal decomposition, POD)降阶方法^[23-27]应用于基于边界元法的瞬态热传导问题的求解中, 推导出变系数瞬态热传导问题适合降阶的边界元离散积分方程, 建立了变系数瞬态热传导问题边界元格式的POD降阶模型, 并用常数边界条件下建立的瞬态热传导问题的POD降阶模态, 对光滑时变边界条件瞬态热传导问题进行降阶分析^[28]. 首先, 对一个瞬态热传导问题, 用基本解建立其边界域积分方

* 国家自然科学基金(批准号: 11172055)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: xwgao@dlut.edu.cn

程, 并将域积分转换成边界积分; 其次, 离散并重组积分方程, 得到可用于降阶的矩阵形式的时间微分方程组; 最后, 用POD模态矩阵对该时间微分方程组进行降阶处理, 建立降阶模型并对其求解. 本文所述方法的优点是: 一方面, 可以将数百成千自由度的时间微分方程组降阶成数个自由度的微分方程组求解, 从而节省存储空间, 提高计算速度, 解决了边界元法中采用时间差分推进技术求解大型时间微分方程组时求解速度慢、算法稳定性差(密切依赖于时间步长)的问题; 另一方面, 也可以用在常数边界条件下建立的瞬态热传导问题的POD降阶模态, 对同一求解域问题在光滑时变边界条件下的温度场进行降阶分析. 这在实时控制和快速计算的领域中具有很重要的意义和价值.

本文其余部分安排如下: 首先, 给出边界元法求解变系数瞬态热传导问题的基本过程, 即建立边界域积分方程、转换域积分到边界积分、离散积分方程并用时间差分推进技术求解时间微分方程组; 其次, 重组离散积分方程, 得到可用于降阶的矩阵形式的时间微分方程组, 构建POD降阶模型并对其求解; 最后, 通过对二维和三维瞬态热传导问题的计算验证了本文所提出的方法的正确性和有效性.

2 边界元法求解瞬态热传导问题

2.1 瞬态热传导问题的控制方程

无内部热源的变系数瞬态热传导问题的控制方程可表示为

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(k(\mathbf{x}) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \right) = \rho c \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t}, \quad t \geq t_0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (1)$$

本质边界条件和自然边界条件分别为

$$T(\mathbf{x}, t) = \bar{T}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{在 } \Gamma_1 \text{ 边界上}), \quad (2)$$

$$-k(\mathbf{x}) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} n_i = \bar{q}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{在 } \Gamma_2 \text{ 边界上}). \quad (3)$$

初始条件:

$$\begin{cases} T(\mathbf{x}, t_0) = T_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ q(\mathbf{x}, t_0) = q_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma, \end{cases} \quad (4)$$

式中, $T(\mathbf{x}, t)$ 表示 t 时刻空间坐标 $\mathbf{x}$ 处的温度值, ρ 表示材料密度, c 是材料比热容, $k(\mathbf{x})$ 是随空间

坐标 $\mathbf{x}$ 变化的材料导热系数, $n_i (i = 1, 2, 3)$ 是求解域 Ω 的边界外法线的方向余弦, $\bar{T}$ 是在边界 Γ_1 上给定的温度值, $\bar{q}$ 是在边界 Γ_2 上给定的热流密度. $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ 为计算区域 Ω 的边界. 当 $\bar{T}(\mathbf{x}, t)$, $\bar{q}(\mathbf{x}, t)$ 不随时间变化时, 称为常数边界条件; 否则, 称为时变边界条件.

2.2 建立边界域积分方程

在边界元法中, 通过对(1)式引入权函数 $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, 并采用加权余量法, 对左侧的域积分进行两次分部积分和高斯散度定理, 推导出最终的边界域积分方程为

$$\begin{aligned} a\tilde{T}(\mathbf{y}, t) &= - \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) q(\mathbf{x}, t) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &\quad - \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n} \tilde{T}(\mathbf{x}, t) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &\quad + \int_{\Omega} V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{T}(\mathbf{x}, t) d\Omega(\mathbf{x}) \\ &\quad - \int_{\Omega} \frac{\rho c}{k(\mathbf{x})} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial \tilde{T}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} d\Omega(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (5)$$

其中,

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r} \right), & \text{对于二维问题,} \\ \frac{1}{4\pi r}, & \text{对于三维问题,} \end{cases} \quad (6)$$

$$a = \begin{cases} 1, & \text{对于内部点,} \\ 1/2, & \text{对于光滑边界点,} \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x}, t) &= -k(\mathbf{x}) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} n_i \\ &= -k(\mathbf{x}) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial n}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{k}(\mathbf{x})}{\partial x_i}, \quad (9)$$

$$\tilde{T}(\mathbf{x}, t) = k(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}, t), \quad (10)$$

$$\tilde{k}(\mathbf{x}) = \ln k(\mathbf{x}), \quad (11)$$

这里称 $\tilde{T}(\mathbf{x}, t)$ 为规格化的温度.

2.3 将域积分转换成边界积分^[18]

对于方程(5)中出现的两个域积分, 由于积分核含有未知量, 因此需要将未知量用已知基函数表示后, 再采用径向积分法将其转换到边界上.

这里用径向基函数^[29]与多项式的组合来近似表示场函数. 以第一个域积分的处理为例, 首先, 将 $\tilde{T}(\mathbf{x}, t)$ 用增强径向基函数进行逼近:

$$\tilde{T}(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{A=1}^{N_A} \alpha^A \phi^A(R) + a^0 + \sum_{k=1}^{\beta} a^k x_k, \quad (12)$$

$$\sum_{A=1}^{N_A} \alpha^A = \sum_{A=1}^{N_A} \alpha^A x_k^A = 0, \quad (13)$$

式中, N_A 为配点总数, 包括所有的边界节点和内部节点, 这里假设边界节点数为 N_b , 域内布置了 N_i 个点, 则总的配点数为 $N_A = N_b + N_i$; $R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}^A|$ 表示场点与作用点之间的距离; α^A , a^0 以及 a^k 为待定系数; $\phi^A(R)$ 为径向基函数, 详细介绍请参考文献[3, 29].

根据(12)和(13)式, 对所有边界点和内部点进行配点, 可得到如下形式的矩阵方程:

$$\{\tilde{T}\} \approx [\phi] \{\alpha\}, \quad (14)$$

其中, 以二维问题为例,

$$[\phi] = \begin{bmatrix} \phi^{11} & \phi^{12} & \dots & \phi^{1N_A} & 1 & x^1 & y^1 \\ \phi^{21} & \phi^{22} & \dots & \phi^{2N_A} & 1 & x^2 & y^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi^{N_A 1} & \phi^{N_A 2} & \dots & \phi^{N_A N_A} & 1 & x^{N_A} & y^{N_A} \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x^1 & x^2 & \dots & x^{N_A} & 0 & 0 & 0 \\ y^1 & y^2 & \dots & y^{N_A} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\{\alpha\} = \begin{bmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^A \\ a^0 \\ a^1 \\ a^2 \end{bmatrix}, \quad \{\tilde{T}\} = \begin{bmatrix} \tilde{T}^1 \\ \tilde{T}^2 \\ \vdots \\ \tilde{T}^{N_A} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

在没有节点相重合的条件下, 矩阵 $[\phi]$ 是可逆的, 于是列向量 $\{\alpha\}$ 可以表示为

$$\{\alpha\} \approx [\phi]^{-1} \{\tilde{T}\}. \quad (16)$$

将(16)式代入(12)式, 可得场变量用所有配点的场变量值近似表示:

$$\tilde{T}(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{A=1}^{N_A} \alpha^A \phi^A(R) + a^0 + \sum_{k=1}^{\beta} a^k x_k$$

$$= \{\phi(\mathbf{x})\}^T \{\alpha\} \approx \{\phi(\mathbf{x})\}^T [\phi]^{-1} \{\tilde{T}\} = N_I(\mathbf{x}) \tilde{T}^I, \quad (17)$$

其中,

$$\{\phi(\mathbf{x})\}^T = [\phi^1(\mathbf{x}), \phi^2(\mathbf{x}), \dots, \phi^{N_A}(\mathbf{x}), 1, x, y], \quad (18)$$

$$\tilde{T}^I = \{\tilde{T}^1, \tilde{T}^2, \dots, \tilde{T}^{N_A}\}, \quad (19)$$

$N_I(\mathbf{x})$ 为向量 $\{\phi(\mathbf{x})\}^T [\phi]^{-1}$ 的前 N_A 列, 称 $N_I(\mathbf{x})$ 为全局插值函数.

将(17)式代入方程(5)中的第一个域积分, 采用径向积分公式^[18,19], 可得下列域积分到边界积分的转换关系:

$$\int_{\Omega} V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{T}(\mathbf{x}, t) d\Omega(\mathbf{x}) \approx \left(\int_{\Gamma} \frac{1}{r^{\alpha}(\mathbf{Q}, \mathbf{y})} \frac{\partial r}{\partial n} F^I(\mathbf{Q}, \mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{Q}) \right) \tilde{T}^I, \quad (20)$$

其中, 径向积分 F^I 为

$$F^I(\mathbf{Q}, \mathbf{y}) = \int_0^{r(\mathbf{Q}, \mathbf{y})} V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_I(\mathbf{x}) r^{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dr(\mathbf{x}). \quad (21)$$

综上, (5)式中的第一个域积分成功地转换为边界积分. 用同样的方法, 对(5)式中的第二个域积分进行转换, 将 $\partial T(\mathbf{x}, t)/\partial t = \dot{T}(\mathbf{x}, t)$ 用增强径向基函数进行逼近, 再采用径向积分法将其转换到边界上, 得

$$\int_{\Omega} \frac{\rho c}{k(\mathbf{x})} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial \tilde{T}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} d\Omega(\mathbf{x}) \approx \left(\int_{\Gamma} \frac{1}{r^{\alpha}(\mathbf{Q}, \mathbf{y})} \frac{\partial r}{\partial n} F^I(\mathbf{Q}, \mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{Q}) \right) \dot{\tilde{T}}^I, \quad (22)$$

其中, 径向积分 F^I 为

$$F^I(\mathbf{Q}, \mathbf{y}) = \int_0^{r(\mathbf{Q}, \mathbf{y})} \frac{\rho c}{k(\mathbf{x})} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_I(\mathbf{x}) \times r^{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dr(\mathbf{x}), \quad (23)$$

$$\dot{\tilde{T}}^I = \begin{bmatrix} \partial \tilde{T}(\mathbf{x}_1, t)/\partial t \\ \partial \tilde{T}(\mathbf{x}_2, t)/\partial t \\ \vdots \\ \partial \tilde{T}(\mathbf{x}_{N_A}, t)/\partial t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{T}}^1 \\ \dot{\tilde{T}}^2 \\ \vdots \\ \dot{\tilde{T}}^{N_A} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

利用上述转换公式, 变系数瞬态热传导问题的边界域积分方程中就不含域积分了, 只需要对边界进行离散就可求解温度场.

2.4 离散积分方程

将计算区域 Ω 的边界 Γ 离散成线性或二次边界单元, 然后将 (5) 式在每一个源点 (由上节知, 源点总数为 N_A , 包括 N_b 个边界节点和 N_i 个内部点, 即 $N_A = N_b + N_i$) 计算各项积分, 最后可组成如下形式的代数方程组:

$$[H]\{\tilde{T}\} - [G]\{q\} = [V]\{\tilde{T}\} - [C]\{\dot{\tilde{T}}\}, \quad (25)$$

其中, 左边两项分别对应 (5) 式中两个边界积分的计算结果, 右端两项是分别根据 (5) 式中两项域积分的计算结果形成的. 具体讲, $\{\tilde{T}\}$ 为由边界节点和内部点的规格化温度组成的 N_A 阶列向量 ((19) 式); $\{\dot{\tilde{T}}\}$ 为这 N_A 个规格化温度的时间导数 ((24) 式); $\{q\}$ 为由边界节点热通量组成的 N_b 阶列向量; $[H]$ 为由 (5) 式中左边项和右边第二个边界积分计算所得的 $N_A \times N_A$ 阶系数矩阵, 对于内部点规格化温度对应的矩阵元素, 只在对角线处取值为 1, 其余为 0; $[G]$ 为由 (5) 式中右边第一个边界积分计算所得的 $N_A \times N_b$ 阶系数矩阵; $[V]$ 为由 (20) 和 (21) 式计算所得的 $N_A \times N_A$ 阶系数矩阵; $[C]$ 为由 (22) 和 (23) 式计算所得的 $N_A \times N_A$ 阶系数矩阵.

2.5 用时间差分推进技术求解时间微分方程^[10]

用时间差分推进技术求解 (25) 式的过程是: 首先, 对变量 $\{\dot{\tilde{T}}\}$, $\{\tilde{T}\}$ 及 $\{q\}$ 采用差分格式, 有

$$\dot{\tilde{T}} = (\tilde{T}^{n+1} - \tilde{T}^n)/\Delta t, \quad (26)$$

$$\tilde{T} = \theta \tilde{T}^{n+1} + (1 - \theta) \tilde{T}^n, \quad (27)$$

$$q = \theta q^{n+1} + (1 - \theta) q^n, \quad (28)$$

其中, $\tilde{T}^{n+1}$ 表示第 $n+1$ 个时间步的规格化温度; θ 为取值在 0 和 1 之间的参数, 当 $\theta = 0$ 时为全隐格式, $\theta = 1$ 为向后差分格式, $\theta = 0.5$ 时为中心差分格式.

将 (26), (27) 及 (28) 式代入 (25) 式, 得

$$\begin{aligned} & [H](\theta \{\tilde{T}\}^{n+1} + (1 - \theta) \{\tilde{T}\}^n) \\ & - [G](\theta \{q\}^{n+1} + (1 - \theta) \{q\}^n) \\ & = [V](\theta \{\tilde{T}\}^{n+1} + (1 - \theta) \{\tilde{T}\}^n) \\ & - [C] \frac{1}{\Delta t} (\{\tilde{T}\}^{n+1} - \{\tilde{T}\}^n). \end{aligned} \quad (29)$$

令

$$[M] = \theta[H] - \theta[V] + [C]/\Delta t,$$

$$[N] = (1 - \theta)[H] - (1 - \theta)[V] - [C]/\Delta t, \quad (30)$$

则 (29) 式可以写成

$$\begin{aligned} & [M]\{\tilde{T}\}^{n+1} - \theta[G]\{q\}^{n+1} \\ & = -[N]\{\tilde{T}\}^n + (1 - \theta)[G]\{q\}^n. \end{aligned} \quad (31)$$

由于第 n 时刻的规格化温度 $\{\tilde{T}\}^n$ 和热通量 $\{q\}^n$ 都是已知的, 因此 (31) 式又可写为

$$[M]\{\tilde{T}\}^{n+1} - \theta[G]\{q\}^{n+1} = \{y\}^n, \quad (32)$$

其中 $\{y\}^n$ 为 (31) 式右端各项之和.

将第 $n+1$ 时间步的边界条件应用到 (32) 式中, 可形成下列代数方程组:

$$[A]\{x\}^{n+1} = \{y\}^{n+1}, \quad (33)$$

其中, $\{x\}^{n+1}$ 为第 $n+1$ 时间步未知的边界规格化温度和未知的边界热通量以及内部点规格化温度组成的 N_A 阶列向量.

用时间推进法求解瞬态问题时, 要对所有指定的时间步进行时间推进循环, 在每个时间步推进中, 都要形成 (33) 式所示的线性方程组, 对其求解则可得到每个时间步的未知量值.

3 构建 POD 降阶模型并求解

为了构建时间微分方程组 ((25) 式) 的降阶模型, 需要对 (25) 式重新组织.

3.1 重组离散积分方程

观察 (25) 式, 时间导数项的未知量全是规格化温度, 但方程中的零阶未知量除了规格化温度外, 也可能是边界上的热流密度. 故为了获取降阶模型, 首先要将变量统一. 下面分两种情况讨论.

首先, 对于简单情形, 假设边界条件全部为自然边界条件, 即已知边界热流密度, 则 (25) 式可以写成:

$$[C]\{\dot{\tilde{T}}\} + [K]\{\tilde{T}\} = [F], \quad (34)$$

其中, $[K] = [H] - [V]$, $[F] = [G]\{q\}$. 从而可以对 (34) 式进行降阶处理.

其次, 对于一般情况, 边界条件可能是本质边界条件和自然边界条件的组合. 不妨假设给定温度的边界节点个数为 N_{b1} (即 (2) 式中在 Γ_1 边界上的节点个数), 给定热流密度的边界节点个数为 N_{b2} (即 (3) 式中在 Γ_2 边界上的节点个数), 则有 $N_b = N_{b1} + N_{b2}$. 此时, 未知量有给定温度的边

界节点的热流密度向量 $\mathbf{q}_{N_{b1}}$, 给定热流密度的边界节点的规格化温度向量 $\tilde{\mathbf{T}}_{N_{b2}}$ 以及内部节点的温度向量 $\tilde{\mathbf{T}}_{N_i}$. 将已知边界条件代入 (25) 式中的左边两项, 合并已知量, 并将未知量重新排序整理后, 得

$$[\mathbf{A}]\{\mathbf{X}\} + \{\mathbf{Y}\} = [\mathbf{V}]\{\tilde{\mathbf{T}}\} - [\mathbf{C}]\{\dot{\tilde{\mathbf{T}}}\}, \quad (35)$$

其中

$$\begin{aligned} \{\mathbf{X}\} &= \{\{\mathbf{q}_{N_{b1}}\}^T, \{\tilde{\mathbf{T}}_{N_{b2}}\}^T, \{\tilde{\mathbf{T}}_{N_i}\}^T\}^T \\ &= \{\{\mathbf{q}_{N_{b1}}\}^T, \{\tilde{\mathbf{T}}_W\}^T\}^T. \end{aligned} \quad (36)$$

为表述方便, 将方程组 (35) 中的系数矩阵及向量写成分块形式:

$$\begin{cases} [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_{11})_{N_{b1} \times N_{b1}} & (\mathbf{A}_{12})_{N_{b1} \times (N_{b2} + N_i)} \\ (\mathbf{A}_{21})_{(N_{b2} + N_i) \times N_{b1}} & (\mathbf{A}_{22})_{(N_{b2} + N_i) \times (N_{b2} + N_i)} \end{bmatrix}, \\ [\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} (\mathbf{C}_{11})_{N_{b1} \times N_{b1}} & (\mathbf{C}_{12})_{N_{b1} \times (N_{b2} + N_i)} \\ (\mathbf{C}_{21})_{(N_{b2} + N_i) \times N_{b1}} & (\mathbf{C}_{22})_{(N_{b2} + N_i) \times (N_{b2} + N_i)} \end{bmatrix}, \\ [\mathbf{V}] = \begin{bmatrix} (\mathbf{V}_{11})_{N_{b1} \times N_{b1}} & (\mathbf{V}_{12})_{N_{b1} \times (N_{b2} + N_i)} \\ (\mathbf{V}_{21})_{(N_{b2} + N_i) \times N_{b1}} & (\mathbf{V}_{22})_{(N_{b2} + N_i) \times (N_{b2} + N_i)} \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (37)$$

$$\begin{cases} \{\mathbf{Y}\} = \{\{\mathbf{Y}_{N_{b1}}\}^T, \{\mathbf{Y}_{N_{b2}}\}^T, \{\mathbf{Y}_{N_i}\}^T\}^T = \{\{\mathbf{Y}_{N_{b1}}\}^T, \{\mathbf{Y}_W\}^T\}^T, \\ \{\tilde{\mathbf{T}}\} = \{\{\tilde{\mathbf{T}}_{N_{b1}}\}^T, \{\tilde{\mathbf{T}}_{N_{b2}}\}^T, \{\tilde{\mathbf{T}}_{N_i}\}^T\}^T = \{\{\tilde{\mathbf{T}}_{N_{b1}}\}^T, \{\tilde{\mathbf{T}}_W\}^T\}^T, \\ \{\dot{\tilde{\mathbf{T}}}\} = \{\{\dot{\tilde{\mathbf{T}}}_{N_{b1}}\}^T, \{\dot{\tilde{\mathbf{T}}}_{N_{b2}}\}^T, \{\dot{\tilde{\mathbf{T}}}_{N_i}\}^T\}^T = \{\{\dot{\tilde{\mathbf{T}}}_{N_{b1}}\}^T, \{\dot{\tilde{\mathbf{T}}}_W\}^T\}^T. \end{cases} \quad (38)$$

从而, 方程组 (35) 可以写成分块形式:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{T}}}_{N_{b1}}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{T}}}_W \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}_{N_{b1}}} \\ \tilde{\mathbf{T}}_W \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{N_{b1}}} \\ \tilde{\mathbf{T}}_W \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} Y_{N_{b1}}} \\ Y_W \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (39)$$

方程组 (39) 可以等价地写成:

$$\begin{cases} C_{11}\dot{\tilde{\mathbf{T}}}_{N_{b1}} + C_{12}\dot{\tilde{\mathbf{T}}}_W - V_{11}\tilde{\mathbf{T}}_{N_{b1}} + (A_{12} - V_{12})\tilde{\mathbf{T}}_W + A_{11}q_{N_{b1}} = -Y_{N_{b1}}, \\ C_{21}\dot{\tilde{\mathbf{T}}}_{N_{b1}} + C_{22}\dot{\tilde{\mathbf{T}}}_W - V_{21}\tilde{\mathbf{T}}_{N_{b1}} + (A_{22} - V_{22})\tilde{\mathbf{T}}_W + A_{21}q_{N_{b1}} = -Y_W. \end{cases} \quad (40)$$

通过 (40) 式中的第一个方程求 $q_{N_{b1}}$, 得

$$\begin{aligned} q_{N_{b1}} &= A_{11}^{-1} \left(V_{11}\tilde{\mathbf{T}}_{N_{b1}} - C_{11}\dot{\tilde{\mathbf{T}}}_{N_{b1}} - C_{12}\dot{\tilde{\mathbf{T}}}_W \right. \\ & \quad \left. - (A_{12} - V_{12})\tilde{\mathbf{T}}_W - Y_{N_{b1}} \right). \end{aligned} \quad (41)$$

将 (41) 式代入 (40) 式中的第二个方程, 得

$$\tilde{C}\dot{\tilde{\mathbf{T}}}_W + K\tilde{\mathbf{T}}_W = F, \quad (42)$$

其中,

$$\tilde{C} = C_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}C_{12}, \quad (43)$$

$$K = A_{22} - V_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}(A_{12} - V_{12}), \quad (44)$$

$$\begin{aligned} F &= (A_{21}A_{11}^{-1}C_{11} - C_{21})\dot{\tilde{\mathbf{T}}}_{N_{b1}} \\ & \quad + (V_{21} - A_{21}A_{11}^{-1}V_{11})\tilde{\mathbf{T}}_{N_{b1}} \\ & \quad + A_{21}A_{11}^{-1}Y_{N_{b1}} - Y_W. \end{aligned} \quad (45)$$

(42) 式即为一般边界条件情况下, 离散积分方程式 (25) 的重组形式. 下面, 对方程 (42) 进行降阶处理.

3.2 获取瞬像矩阵并建立 POD 模态

瞬像, 也称快照, 是指物理场的数值解在不同时刻的空间分布值. 对于瞬态热传导问题 (42) 式中的温度场 $\tilde{\mathbf{T}}_W$, 取瞬像矩阵为

$$\mathbf{S} = \{\tilde{\mathbf{T}}_W(t_1), \tilde{\mathbf{T}}_W(t_2), \dots, \tilde{\mathbf{T}}_W(t_L)\}, \quad (46)$$

式中, L 为瞬像时刻数或快照数. 由 (42) 式知, $\mathbf{S} \in \mathbf{R}^{(N_{b2} + N_i) \times L}$, $\mathbf{S}$ 的每一列表示一个快照. 瞬像矩阵一般由实验、经验、边界元法等数值求解方法的结果获得, 通常 $(N_{b2} + N_i) \gg L$.

下面, 建立 POD 模态. 由 POD 方法知, 要寻找一组最优的 POD 模态 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_r$ (其中 ϕ_i 为

列向量), 使得结构模型任意节点上任意时刻的规格化温度可以表示为POD模态的线性组合, 即

$$\tilde{T}_W(t) \approx \alpha_1(t)\phi_1 + \alpha_2(t)\phi_2 + \cdots + \alpha_r(t)\phi_r, \quad (47)$$

其中, $\alpha_i(t)$ 表示POD模态的系数 ($i = 1, 2, \cdots, r$). 为了寻求满足(47)式的最优POD模态, 采用(46)式的瞬像矩阵 S . 定义相关矩阵 R 如下:

$$R = S^T S, \quad (48)$$

则 $R \in R^{L \times L}$, 求相关矩阵 R 的非零特征值及特征向量:

$$R\varphi_j = \lambda_j \varphi_j, \quad j = 1, 2, \cdots, l, \quad l \leq L, \\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_l > 0. \quad (49)$$

最优POD模态可以表示如下 [24, 25]

$$\phi_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} S \varphi_j, \quad j = 1, 2, \cdots, l, \quad l \leq L. \quad (50)$$

可以证明 ϕ_j ($j = 1, 2, \cdots, l$) 是一组标准正交基, 即

$$\phi_i \cdot \phi_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

只选取前 r 阶模态进行分析, $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_r$, 选取规则如下:

$$r = \arg \min \left\{ I(r) : I(r) \geq \frac{\gamma}{100} \right\}, \quad (51)$$

其中

$$I(r) = \sum_{i=1}^r \lambda_i / \left[\sum_{i=1}^l \lambda_i \right]. \quad (52)$$

一般取 $\gamma = 99.9999$.

3.3 构建降阶模型

瞬态热传导问题中, 任意节点上任意时刻的规格化温度可以表示为POD基的线性组合, 如(47)式所示, 记 $\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \cdots \ \phi_r]$, 则 $\Phi \in R^{(N_{b2}+N_i) \times r}$, ($N_{b2} + N_i$) $\gg r$, 称 Φ 为POD模态矩阵. 记 $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_r]^T$, 则(47)式又可表示如下:

$$\tilde{T}_W \approx \Phi \alpha. \quad (53)$$

将(53)式代入(42)式, 得

$$\tilde{C} \Phi \dot{\alpha} + K \Phi \alpha = F. \quad (54)$$

上式左右两边同乘以 Φ^T , 得

$$\Phi^T \tilde{C} \Phi \dot{\alpha} + \Phi^T K \Phi \alpha = \Phi^T F. \quad (55)$$

综上, 将自由度为 ($N_{b2} + N_i$) 的一阶微分方程组(42)降阶为自由度为 r 的降阶模型(55)式. 将(53)式代入初始条件(见(4)及(1)式), 得降阶模型的初始条件

$$\alpha(0) = \Phi^T \tilde{T}_{W0}. \quad (56)$$

求解方程组(55), 可得到各个所需时刻的系数 α 值, 然后将其代回到(53)式则可得温度场结果.

3.4 降阶模型误差评估

POD模态表示俘获物理场的主要特征, 截断后的前 r 阶POD模态较全阶模态所俘获的能量用(52)式表示. 故定义相对截断误差如下:

$$\varepsilon_r = \sum_{i=r+1}^l \lambda_i / \left[\sum_{i=1}^l \lambda_i \right]. \quad (57)$$

下节将通过二维和三维瞬态热传导实例来验证本文方法的有效性和准确性. 需要注意的是, 在这两个例子中, 我们都采用常数边界条件下一次计算的POD模态来准确预测和拟合新的光滑时变边界条件下的温度场结果, 这属于用常数边界问题的POD模态拟合时变边界问题的分析方法 [28]. 简言之, 就是按第3.2节所述方法求出常数边界条件下问题的瞬像矩阵 S 及POD模态矩阵 Φ , 对于时变边界条件问题, 不需要再重新计算该时变边界条件下问题的瞬像矩阵及POD模态矩阵, 可用常数边界条件下的 Φ 对时变问题进行降阶模型分析. 详细过程见文献 [28].

4 算例分析

算例1 含圆孔的长方形平板的瞬态传热问题

分析算例的几何参数及常数边界条件如图1所示. 板的长度为15 cm, 宽度为5 cm, 其中间有一个半径为1 cm的圆孔. 板的密度 $\rho = 5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 比热 $c = 200 \text{ J/(kg} \cdot ^\circ\text{C)}$, 导热系数 $k_x = k_y = 100 \text{ W/(m} \cdot ^\circ\text{C)}$. 板的初始温度为 20°C , 板的左端有 $q = 5 \times 10^5 \text{ W/m}^2$ 的热流密度流入, 板的右边、上边、下边及圆孔边缘绝热.

图2给出了板的边界元计算模型. 该模型包含100个边界节点, 92个内部节点, 100个线性边

界单元. 用边界元法计算出该常数边界条件下, 时间 $t = 4, 8, 12, \dots, 100$ s (总计 25 个) 时刻板内各节点的温度, 作为 25 个快照向量, 构成瞬像矩阵 S , 代入 (48), (49) 和 (5) 式中, 计算 POD 模态向量 ϕ_j , $j = 1, 2, \dots, 25$.

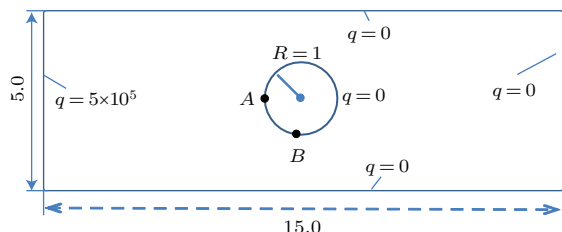


图 1 板的几何尺寸及常数边界条件

Fig. 1. Geometry and constant boundary conditions of the rectangular plate with a hole.

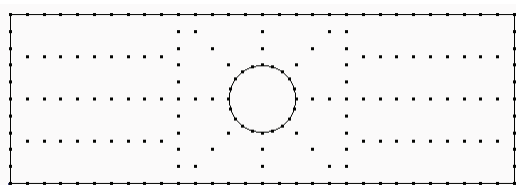


图 2 板的边界元模型

Fig. 2. Boundary element method model of the rectangular plate with a hole.

图 3 给出了板的各阶模态所对应的特征值比重. 第 i 个特征值对应的比重定义为

$$\frac{\lambda_i}{\sum_k \lambda_k}, \quad i = 1, 2, \dots, 25,$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{25} \geq 0.$$

由图 3 可以看出, 从第 6 阶模态开始, 其特征值所占比重就已经非常小, 大约为 1.69233×10^{-9} .

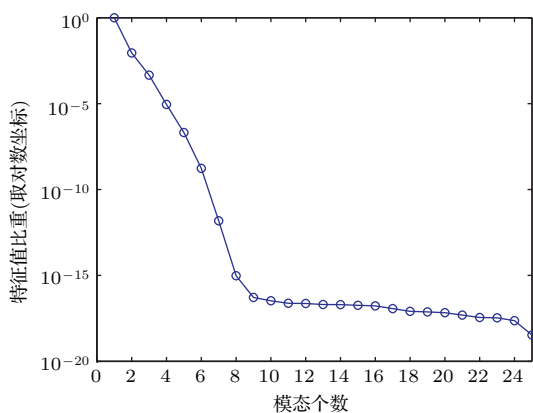


图 3 特征值比重与模态个数的关系

Fig. 3. Proportion of each eigenvalue to the sum of all eigenvalues.

图 4 给出各阶模态所对应的相对截断误差, 由 (57) 式计算, 前 i 阶模态所对应的相对截断误差为

$$\varepsilon_i = \frac{\sum_{k=i+1}^{25} \lambda_k}{\sum_j \lambda_j}, \quad i = 1, 2, \dots, 24.$$

由图 4 可以看出, 前 5 阶模态捕捉了全阶模型高达 99.999998% 的能量. 故由图 3 和图 4 可知, 取前 5 阶模态的降阶模型足以准确表达全阶模型.

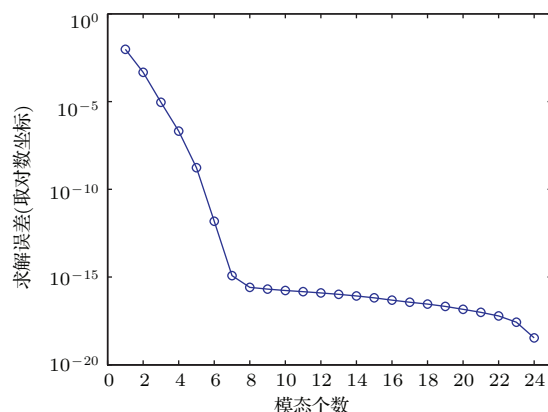


图 4 求解误差与模态个数的关系

Fig. 4. Relative truncation error versus the number of POD mode.

取 POD 模态矩阵 $\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_5]$. 用 $\tilde{T}_W \approx \Phi \alpha$ 分别降阶分析下列情况, 并计算相应的温度场.

1) $t = 2, 4, 6, \dots, 100$ s 时的温度值, 结果见图 5、图 6 和表 1;

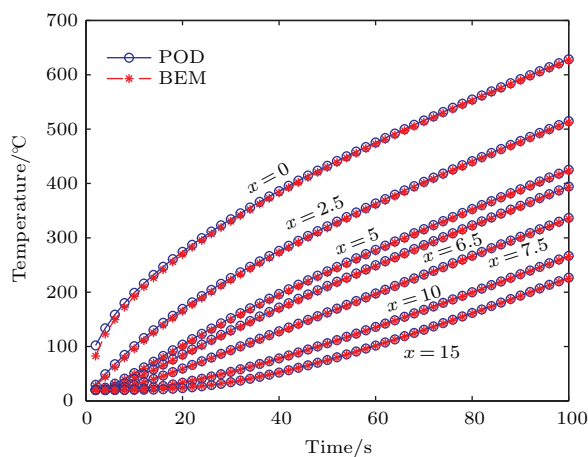


图 5 (网刊彩色) 平板沿 x 轴方向数个节点的温度随时间的变化 (常数边界条件 1)

Fig. 5. (color online) Temperature versus time at different points under constant boundary condition 1.

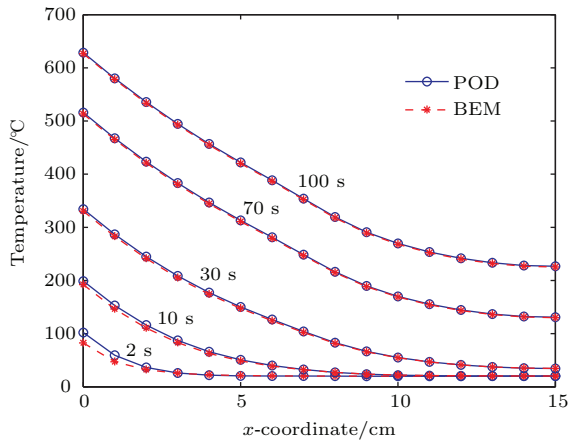


图6 (网刊彩色) 板的上边界在不同时刻的计算温度(常数边界条件1)

Fig. 6. (color online) Temperature on the up side of the plate at different time under constant boundary condition 1.

2) 左边热流密度为周期变化 $q = -500000[1 - \cos(\omega t)]$ W/m² (其中 $\omega = \pi/24$) 时, $t = 2, 4, 6, \dots, 100$ s 时的温度值, 结果见图7、图8和表2;

3) 左边热流密度为周期变化 $q = -500000[1 - \cos(\omega t)]$ W/m² (其中 $\omega = \pi/24$), 右边热流密度为周期变化 $q = 100000[1 - \cos(\omega t)]$ W/m² (其中 $\omega = \pi/24$) 时, $t = 2, 4, 6, \dots, 100$ s 时的温度值, 结果见图9、图10和表3;

4) 左边热流密度为周期变化 $q = -500000[1 - \cos(\omega t)]$ W/m² (其中 $\omega = \pi/24$), 右边热流密度为线性变化 $q = 2500t$ W/m² 时, $t = 2, 4, 6, \dots, 100$ s 时的温度值, 结果见图11、图12和表4.

本文方法将192个自由度的常微分方程组求解问题, 降阶为5个自由度的常微分方程组求解问题. 图5给出了常数边界条件1下, 平板沿 x 轴方向分布的数个节点的温度随时间的变化. 从图5可以看出, 同一时刻, 沿 x 轴, 左侧温度高于右侧, 并且各点的温度都随时间升高. 这符合左边有热流密度流入, 其他边界绝热的传热规律. 图6给出了板的上边界在不同时刻的计算温度. 从另一个角度刻画出该常数边界条件下, 同一时刻, 温度左高右低, 并且板上各点都随时间升温的传热规律. 图中, BEM表示用边界元法所求得的结果; POD表示用本文所提出的POD降阶方法对边界元离散格式降阶后, 5阶降阶模型所求得的结果. 表1列出了板的左边界、中线及右边界处点在各个时刻的计算温度, 以及当前POD 5阶降阶模型结果对BEM结果

的相对误差.

从图5、图6以及表1可以看出, 除了板的左边界 ($x = 0$) 在初始时段 (0—20 s) 误差较大外 (这是由于左边界由初始热流密度为0到突然施加一个非零热流密度 $q = 5 \times 10^5$ W/m², 当用边界元法计算时, 时间步长的大小影响边界附近初始时段计算结果的精度, 一般在结果稳定的情况下小的时间步长可以改善边界附近初始时段计算结果的精度, 详细情况请参考文献[13]), 整体上, 由常数边界条件下, $t = 4, 8, 12, \dots, 100$ s 时刻的温度场结果作为瞬像矩阵 S , 获得的前5阶POD模态矩阵, 降阶模型所得结果与边界元法分析结果符合得非常好.

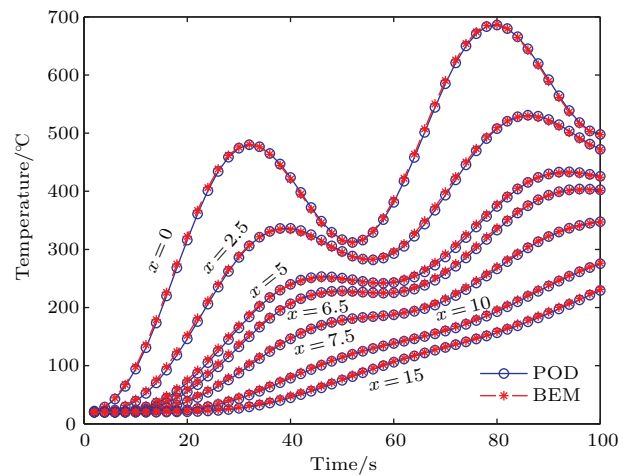


图7 (网刊彩色) 平板沿 x 轴方向数个节点的温度随时间的变化 (时变边界条件2)

Fig. 7. (color online) Temperature versus time at different points under time-varying boundary condition 2.

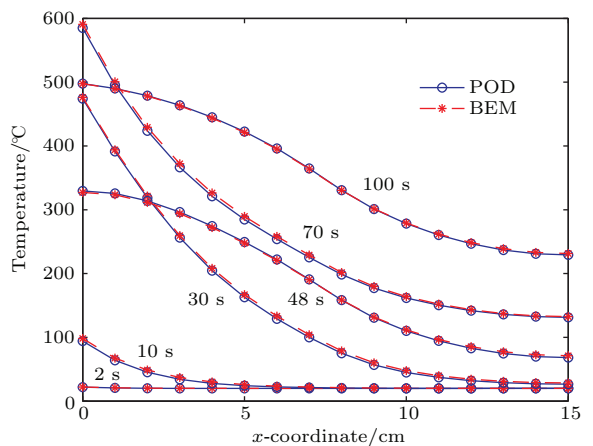


图8 (网刊彩色) 板的上边界在不同时刻的计算温度 (时变边界条件2)

Fig. 8. (color online) Temperature on the up side of the plate at different time under time-varying boundary condition 2.

表1 平板左边界、中线、右边界的计算温度及相对误差 (常数边界条件 1)

Table 1. Computed temperatures and relative errors on the left side, midline and right side of the plate under constant boundary condition 1.

Time/s	$x = 0$			$x = 7.5$			$x = 15$		
	POD	BEM	Errors/%	POD	BEM	Errors/%	POD	BEM	Errors/%
2	102.127	82.516	23.766	20.107	20.157	0.245	20.179	20.070	0.542
6	158.670	149.879	5.865	22.103	22.646	2.395	20.030	20.111	0.402
10	198.813	192.180	3.451	29.732	29.519	0.723	20.253	20.343	0.443
14	231.842	226.255	2.469	40.557	39.758	2.012	20.815	21.093	1.315
18	260.836	255.879	1.937	52.994	51.821	2.264	22.306	22.735	1.887
22	287.154	282.619	1.605	66.209	64.805	2.166	25.038	25.515	1.869
26	311.497	307.274	1.374	79.791	78.248	1.971	29.076	29.512	1.478
30	334.284	330.310	1.203	93.544	91.920	1.767	34.359	34.698	0.975
50	432.611	429.497	0.725	162.923	161.191	1.075	75.253	74.896	0.477
70	515.849	513.287	0.499	232.410	230.672	0.753	131.000	130.095	0.696
90	591.923	589.704	0.376	301.891	300.160	0.576	193.902	192.655	0.647

表2 平板左边界、中线、右边界的计算温度及相对误差 (时变边界条件 2)

Table 2. Computed temperatures and relative errors on the left side, midline and right side of the plate under time-varying boundary condition 2.

Time/s	$x = 0$			$x = 7.5$			$x = 15$		
	POD	BEM	Errors/%	POD	BEM	Errors/%	POD	BEM	Errors/%
10	94.065	98.152	4.163	20.885	21.529	2.993	20.106	20.072	0.169
20	316.121	322.422	1.954	37.773	40.856	7.545	20.801	21.250	2.115
30	474.106	476.133	0.426	87.430	91.290	4.229	26.620	28.577	6.849
40	423.700	420.817	0.685	146.225	147.842	1.093	44.898	48.078	6.616
50	316.832	315.426	0.446	178.295	177.882	0.232	74.766	77.469	3.489
60	381.085	385.258	1.083	187.579	188.332	0.400	105.857	107.217	1.268
70	584.921	590.504	0.945	211.817	215.194	1.569	131.396	132.541	0.864
80	686.127	686.911	0.114	266.581	270.151	1.321	156.589	158.916	1.465
90	592.025	588.984	0.516	322.190	323.240	0.325	189.750	192.836	1.600
100	497.657	497.505	0.031	347.707	347.267	0.127	229.181	231.408	0.962

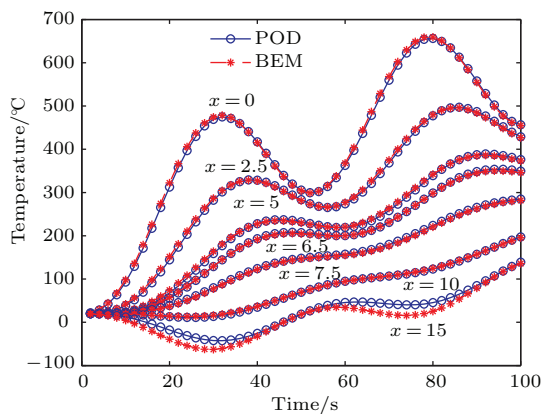
图9 (网刊彩色) 平板沿 x 轴方向数个节点的温度随时间的变化 (时变边界条件 3)

Fig. 9. (color online) Temperature versus time at different points under time-varying boundary condition 3.

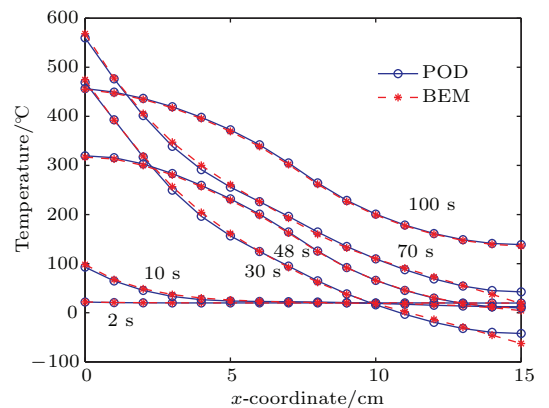


图10 (网刊彩色) 板的上边界在不同时刻的计算温度 (时变边界条件 3)

Fig. 10. (color online) Temperature on the up side of the plate at different time under time-varying boundary condition 3.

表3 平板左边界、中线、右边界的计算温度及相对误差(时变边界条件3)

Table 3. Computed temperatures and relative errors on the left side, midline and right side of the plate under time-varying boundary condition 3.

Time/s	$x = 0$			$x = 7.5$			$x = 15$		
	POD	BEM	Errors/%	POD	BEM	Errors/%	POD	BEM	Errors/%
10	92.928	98.137	5.308	22.156	21.223	4.397	12.245	4.441	175.705
20	312.659	322.172	2.953	39.093	36.685	6.566	-17.964	-39.234	-54.214
30	469.173	474.417	1.106	79.696	77.032	3.459	-42.128	-62.649	-32.755
40	417.081	415.201	0.453	124.139	122.273	1.526	-25.573	-32.085	-20.296
50	305.648	303.932	0.565	147.960	146.306	1.130	18.632	18.384	1.352
60	362.614	367.814	1.414	157.418	154.665	1.780	45.623	34.165	33.536
70	559.613	567.996	1.476	180.077	176.155	2.227	42.485	18.440	130.392
80	656.230	659.128	0.440	223.932	220.121	1.731	45.426	25.534	77.903
90	557.763	554.416	0.604	265.552	262.592	1.127	84.728	79.040	7.196
100	456.560	455.223	0.294	284.819	281.813	1.066	138.908	135.907	2.208

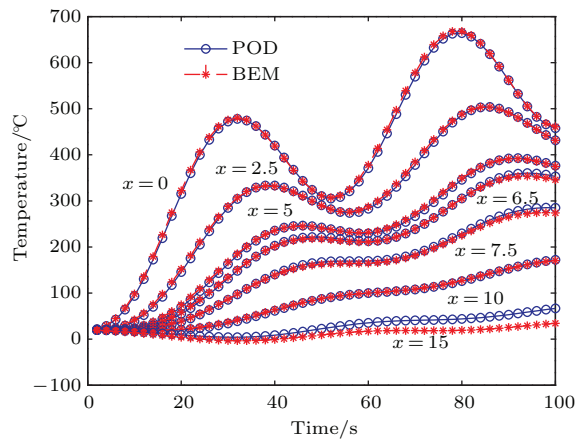
图11 (网刊彩色) 平板沿 x 轴方向数个节点的温度随时间的变化(时变边界条件4)

Fig. 11. (color online) Temperature versus time at different points under time-varying boundary condition 4.

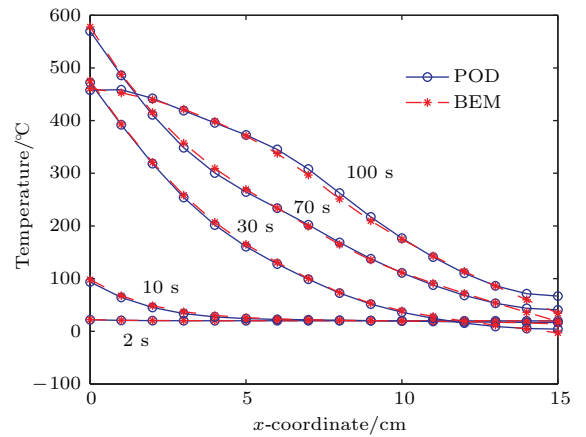


图12 (网刊彩色) 板的上边界在不同时刻的计算温度(时变边界条件4)

Fig. 12. (color online) Temperature on the up side of the plate at different time under time-varying boundary condition 4.

表4 平板左边界、内部点、右边界的计算温度及相对误差(时变边界条件4)

Table 4. Computed temperatures and relative errors on the left side, interior point and right side of the plate under time-varying boundary condition 4.

Time/s	$x = 0$			$x = 10$			$x = 15$		
	POD	BEM	Errors/%	POD	BEM	Errors/%	POD	BEM	Errors/%
10	93.656	98.144	4.573	19.385	19.598	1.087	16.643	13.871	19.989
20	315.149	322.312	2.222	20.383	21.861	6.757	9.433	4.018	134.759
30	472.203	475.533	0.700	34.156	36.933	7.518	4.185	-2.998	-239.564
40	420.143	418.980	0.278	61.630	64.038	3.760	8.743	-0.608	-1537.687
50	310.612	311.315	0.226	87.300	88.183	1.001	22.548	9.227	144.365
60	370.993	377.625	1.756	99.929	100.138	0.209	35.442	17.193	106.143
70	569.601	577.952	1.445	107.898	108.846	0.870	40.789	18.657	118.633
80	664.127	667.940	0.571	125.921	127.338	1.113	43.896	19.196	128.667
90	561.825	562.022	0.035	152.644	152.855	0.138	53.146	25.379	109.409
100	457.688	460.931	0.703	172.248	170.544	0.999	66.886	34.360	94.661

类似于图5和图6, 图7—图12分别给出了三种时变边界条件下, 由常数边界条件1所得的POD模态矩阵来降阶求解相应时变边界条件问题时, 所求得的5阶降阶模型的结果与边界元法分析的结果. 表2—表4列出了板的左边界、中线(或内部点)及右边界处点在各个时刻的计算温度, 以及当前POD5阶降阶模型结果对BEM结果的相对误差.

从上述图和表可以得出如下结果. 1) 与图5相比较, 图7、图9和图11中的温度结果随时间上下波动, 尤其是板的左侧的点(x 值较小)比右侧的点(x 值较大)波动剧烈. 这是由于板的左边界上有周期时变热流密度 $q = -500000[1 - \cos(\omega t)]$ 流入的缘故, 随着热流向板的右侧进一步传导, 波动减弱. 2) 三种时变边界条件的区别是, 板的右边界条件不同, 分别为绝热、周期时变热流密度 $q = 100000[1 - \cos(\omega t)]$ 流出、线性时变热流密度 $q = 2500t$ 流出. 这种不同在计算结果中体现在, 图9(右边界热流周期时变流出)比起图7(右边界绝热), 各点的温度随时间升高的速度比较缓慢, 尤其对靠近板的右边界的点, 在图9中温度随时间下降再回升, 而在图7中, 没有下降, 只有上升; 图11(右边界热流线性时变流出)中靠近右边界的点的温度随时间变化平缓, 不像图9中有波动. 3) 对于三种时变边界条件, 只有后两种时变边界条件下板的右边界上结果误差很大以致不能采用. 这是由于采用常数边界条件下的POD模态矩阵来降阶求解时变边界条件问题所致. 即常数边界条件1的右边界是绝热的, 时变边条2的右边界也绝热, 但时变边条3和4的右边界有非零热流密度流出, 故用常数边界条件1所得的POD模态矩阵来降阶求解时变边界条件问题2时误差不大, 但求解时变边界条件问题3和4时误差很大. 由此得出, 对于该问题, 除了后两种时变边界条件下板的右边界上结果误差很大外, 由常数边界条件1所得的POD模态矩阵来降阶求解相应时变边界条件问题时, 所求得的5阶降阶模型的结果与边界元法分析的结果符合得非常好.

算例2 双空心圆柱体瞬态传热问题

考虑如图13所示的空心圆柱体的瞬态传热问题, 其几何参数及常数边界条件如图13所示. 内、外空心圆柱的高度分别为5和1 cm; 内空心圆柱的内、外半径分别为2和3 cm; 外空心圆柱的内、外半径分别为3和4 cm. 材料的密度

$\rho = 7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 比热 $c = 460 \text{ J/(kg} \cdot ^\circ\text{C)}$, 导热系数随高度方向变化 $k = k_1 \exp(\gamma z) \text{ W/(m} \cdot ^\circ\text{C)}$, 其中 $\gamma = (1/H) \ln(k_2/k_1)$, $k_1 = 35 \text{ W/(m} \cdot ^\circ\text{C)}$, $k_2 = 85 \text{ W/(m} \cdot ^\circ\text{C)}$, $H = 0.05$. 零件的初始温度为 0°C , 上边有 $q = 5 \times 10^5 \text{ W/m}^2$ 的热流流进来, 零件的其他边缘绝热.

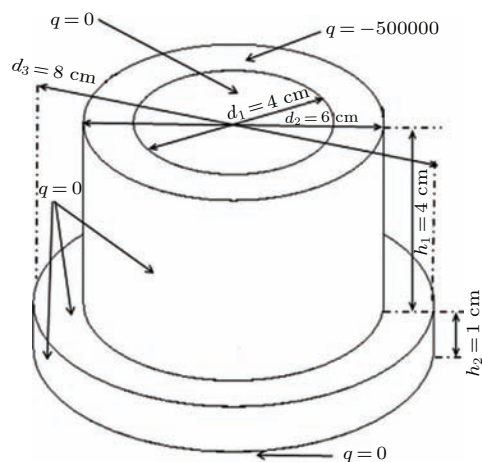


图13 双空心圆柱体的几何参数及边界条件

Fig. 13. Geometry and boundary conditions of the cylinder parts.

根据双空心圆柱体的几何及边界条件的对称性, 对它的1/4进行分析, 图14给出了双空心圆柱体的边界元模型. 该模型包含1700个四边形边界单元, 1702个边界节点, 608个内部节点, 总计2310个节点. 用边界元法计算出该常数边界条件下, 时间 $t = 4, 8, 12, \dots, 100 \text{ s}$ (总计25个)时刻板内各节点的温度, 作为25个快照向量, 构成瞬像矩阵 S , 代入(48), (49)和(50)式中, 计算POD模态向量 ϕ_j , $j = 1, 2, \dots, 25$.

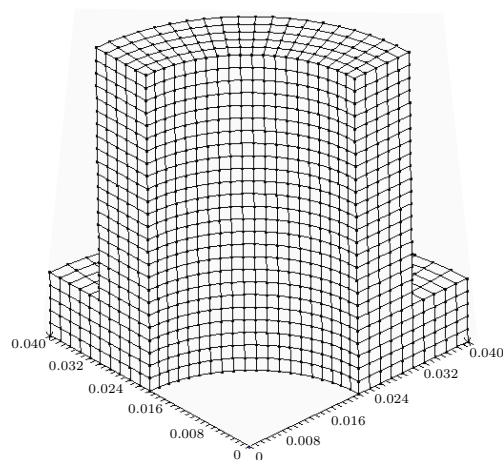


图14 双空心圆柱体的边界元模型

Fig. 14. BEM model of the cylinder parts.

图 15 和图 16 给出该双空心圆柱体模型的各阶 POD 模态所对应的特征值比重和相对截断误差. 可以看出, 从第 6 阶模态开始, 其特征值所占比重就已经非常小, 大约为 1.20428×10^{-9} , 前 5 阶模态捕捉了全阶模型高达 99.999998% 的能量. 故由图 15 和图 16 可知, 取前 5 阶模态的降阶模型足以准确表达全阶模型.

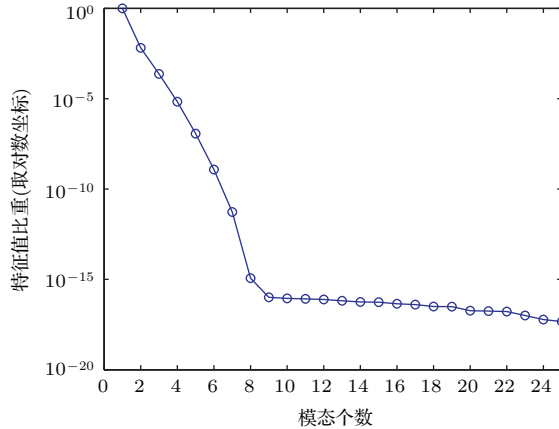


图 15 特征值比重与模态个数的关系
Fig. 15. Proportion of each eigenvalue to the sum of all eigenvalues.

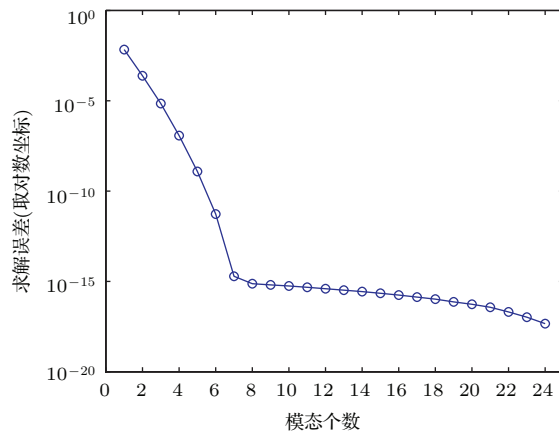


图 16 求解误差与模态个数的关系
Fig. 16. Relative truncation error versus the number of POD mode.

取 POD 模态矩阵 $\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \cdots \ \phi_5]$. 用 $\tilde{T}_W \approx \Phi \alpha$ 分别降阶分析下列情况, 并计算相应温度场.

1) $t = 2, 4, 6, \dots, 100$ s 时的温度值, 结果见图 17、图 18 和表 5;

2) 上边热流密度为周期变化 $q = -500000[1 - \cos(\omega t)]$ W/m² (其中 $\omega = \pi/20$), $t = 2, 4,$

$6, \dots, 100$ s 时的温度值, 结果见图 19、图 20 和表 6;

3) 上边热流密度随空间坐标及时间变化

$$q = \frac{-10000}{\sqrt{x^2 + y^2}} [1 - \cos(\omega t)] \text{ W/m}^2$$

(其中 $\omega = \pi/20$), $t = 2, 4, 6, \dots, 100$ s 时的温度值, 结果见图 21、图 22、图 23 和表 7.

其中, 三个参考点的坐标分别为 A ($x = 0.01697, y = 0.01697, z = 0.002$), B ($x = 0.01697, y = 0.01697, z = 0.024$), C ($x = 0.01697, y = 0.01697, z = 0.048$), 即三个参考点为半径 0.024 m 处的沿轴向分布的内部点 (见图 14). 另外, 图 18 中的 z 向轴线的方程为 ($x = 0.01697, y = 0.01697$).

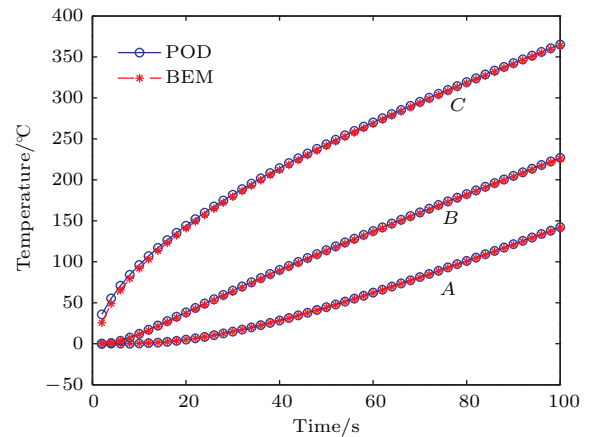


图 17 (网刊彩色) 节点温度随时间的变化 (常数边界条件 1)
Fig. 17. (color online) Temperature versus time at different points under constant boundary condition 1.

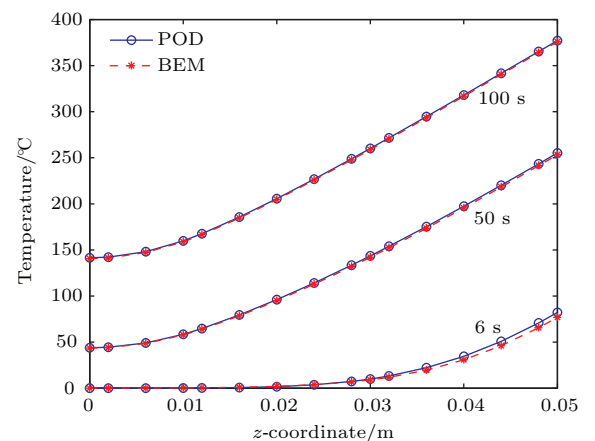


图 18 (网刊彩色) z 向轴线在不同时刻的计算温度 (常数边界条件 1)
Fig. 18. (color online) Temperature along z -direction axis of the cylinder parts at different time under constant boundary condition 1.

表5 圆柱体 A, B, C 点处的计算温度及相对误差 (常数边界条件 1)Table 5. Computed temperatures and relative errors at the points A, B and C of the cylinder parts under constant boundary condition 1.

Time/s	A			B			C		
	POD	BEM	Errors/%	POD	BEM	Errors/%	POD	BEM	Errors/%
10	0.248	0.484	48.762	12.089	11.420	5.858	96.048	91.931	4.478
20	4.905	5.045	2.770	38.330	36.972	3.672	143.910	140.922	2.120
30	14.825	14.739	0.583	64.823	63.355	2.318	181.831	179.321	1.399
40	28.400	28.136	0.937	90.056	88.618	1.623	214.368	212.168	1.037
50	44.487	44.067	0.953	114.191	112.816	1.219	243.432	241.475	0.810
60	62.299	61.741	0.904	137.533	136.221	0.963	270.146	268.388	0.655
70	81.295	80.618	0.839	160.323	159.066	0.790	295.254	293.656	0.544
80	101.104	100.329	0.773	182.734	181.522	0.668	319.259	317.787	0.463
90	121.472	120.615	0.711	204.884	203.709	0.577	342.506	341.133	0.403
100	142.223	141.300	0.653	226.855	225.709	0.508	365.233	363.935	0.357

本文方法将 2310 个自由度的常微分方程组求解问题, 降阶为 5 个自由度的求解问题. 图 17 给出了常数边界条件 1 下, 圆柱体内三个节点的温度随时间的变化. 从图 17 可以看出, 同一时刻圆柱体上面节点的温度高于下面节点的温度, 并且, 各点的温度都随时间升高. 这符合圆柱体上表面有热流密度流入, 其他边界绝热的传热规律. 图 18 给出了圆柱体内一条轴线在不同时刻的计算温度. 从另一个角度刻画出该常数边界条件下, 同一时刻温度上高下低, 并且圆柱体内各点都随时间升温的传热规律. 表 5 列出了圆柱体内三个节点在各个时刻的计算温度以及当前 POD 5 阶降阶模型结果对 BEM 结果的相对误差.

从图 17、图 18 和表 5 可以看出, 除了圆柱体靠

近上边界的 C 点在初始时段 (0—10 s) 误差较大外 (原因与上文表 1 平板情况相似), 整体上, 由常数边界条件下, $t = 4, 8, 12, \dots, 100$ s 时刻的温度场结果作为瞬像矩阵 S , 获得的前 5 阶 POD 模态矩阵, 降阶模型所得结果与边界元法分析结果符合得非常好.

同样地, 图 19—图 23 分别给出了两种时变边界条件下, 由常数边界条件 1 所得的 POD 模态矩阵来降阶求解相应时变边界条件问题时, 所求得的 5 阶降阶模型的结果与边界元法分析的结果. 表 5—表 7 相应地列出了采用两种方法计算所得的温度结果以及当前 POD 5 阶降阶模型结果对 BEM 结果的相对误差.

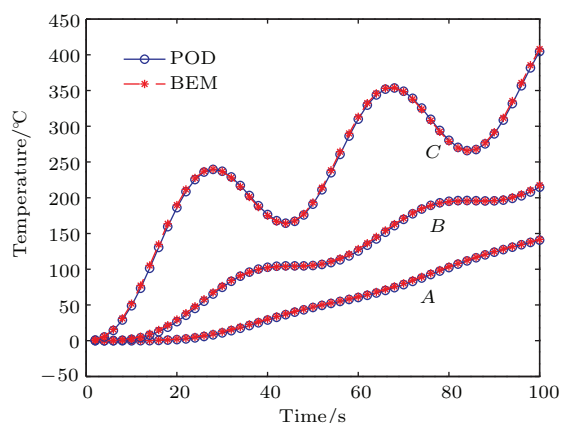


图 19 (网刊彩色) 节点温度随时间的变化 (时变边界条件 2)

Fig. 19. (color online) Temperature versus time at different points under time-varying boundary condition 2.

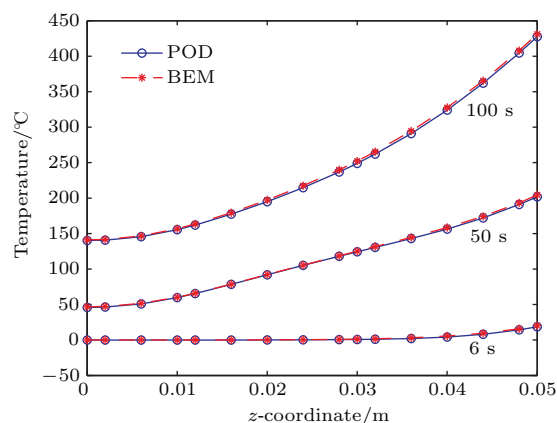
图 20 (网刊彩色) z 向轴线在不同时刻的计算温度 (时变边界条件 2)Fig. 20. (color online) Temperature along z -direction axis of the cylinder parts at different time under time-varying boundary condition 2.

表6 圆柱体 A, B, C 点处的计算温度及相对误差 (时变边界条件 2)Table 6. Computed temperatures and relative errors at the points A, B and C of the cylinder parts under time-varying boundary condition 2.

Time/s	A			B			C		
	POD	BEM	Errors/%	POD	BEM	Errors/%	POD	BEM	Errors/%
10	-0.063	0.064	198.991	1.968	2.898	32.089	48.851	51.865	5.812
20	1.516	2.302	34.142	26.615	29.604	10.094	186.066	189.736	1.934
30	10.905	12.523	12.923	74.668	76.388	2.252	237.111	236.557	0.234
40	28.845	30.250	4.644	102.775	102.036	0.724	176.557	174.888	0.955
50	46.384	47.205	1.739	105.229	105.574	0.327	190.950	193.264	1.197
60	60.464	61.604	1.850	125.452	128.192	2.137	309.849	313.189	1.067
70	78.444	80.180	2.165	169.729	171.377	0.961	349.030	348.390	0.184
80	102.284	103.663	1.331	195.120	194.390	0.376	280.445	278.827	0.580
90	123.874	124.596	0.580	195.688	196.077	0.198	289.340	291.770	0.833
100	140.735	141.747	0.713	214.613	217.408	1.286	404.466	407.941	0.852

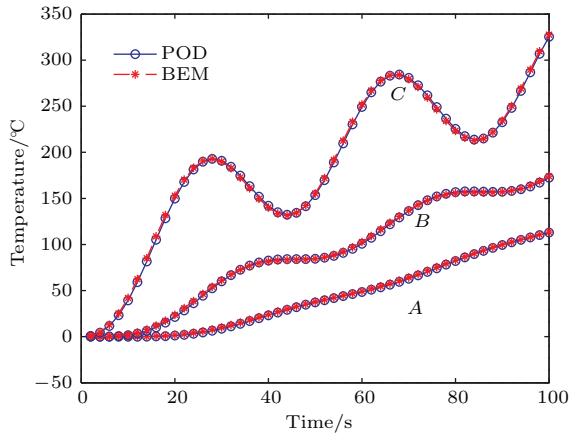


图21 (网刊彩色) 节点温度随时间的变化 (时变边界条件 3)

Fig. 21. (color online) Temperature versus time at different points under time-varying boundary condition 3.

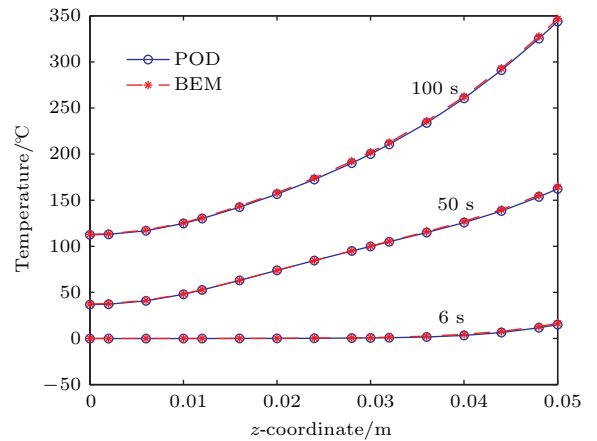
图22 (网刊彩色) z 向轴线在不同时刻的计算温度 (时变边界条件 3)Fig. 22. (color online) Temperature along z -direction axis of the cylinder parts at different time under time-varying boundary condition 3.

表7 圆柱体底面径向线在不同时刻的计算温度及相对误差 (时变边界条件 3)

Table 7. Computed temperatures and relative errors along the radial line on the bottom surface of the cylinder parts at different time under time-varying boundary condition 3.

Radius/m	50 s			70 s			90 s		
	POD	BEM	Errors/%	POD	BEM	Errors/%	POD	BEM	Errors/%
0.02	37.650	38.266	1.611	63.315	64.668	2.092	100.019	100.382	0.361
0.022	37.412	38.033	1.633	63.047	64.399	2.100	99.719	100.086	0.367
0.024	36.771	37.407	1.700	62.360	63.709	2.117	98.905	99.288	0.386
0.026	35.778	36.438	1.811	61.298	62.640	2.143	97.643	98.052	0.417
0.028	34.517	35.207	1.960	59.949	61.282	2.176	96.043	96.483	0.456
0.03	33.105	33.830	2.142	58.438	59.761	2.214	94.253	94.729	0.503
0.032	31.690	32.450	2.341	56.921	58.234	2.254	92.458	92.971	0.551
0.034	30.427	31.218	2.534	55.567	56.871	2.291	90.857	91.402	0.596
0.036	29.448	30.263	2.694	54.519	55.815	2.322	89.615	90.185	0.632
0.038	28.835	29.666	2.800	53.864	55.155	2.342	88.837	89.424	0.656
0.04	28.725	29.557	2.817	53.752	55.044	2.346	88.696	89.284	0.659

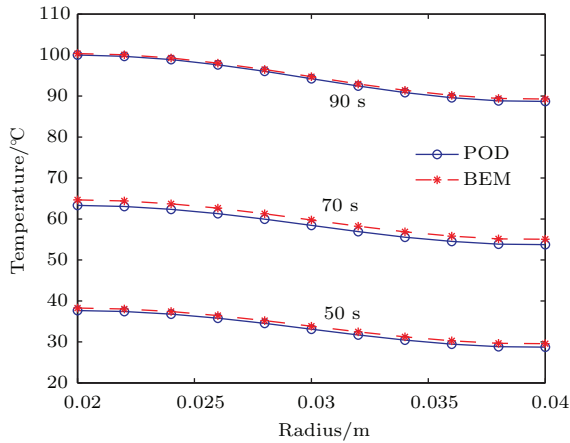


图 23 (网刊彩色) 圆柱体底面径向线在不同时刻的计算温度 (时变边界条件 3)

Fig. 23. (color online) Temperature along the radial line on the bottom surface of the cylinder parts at different time under time-varying boundary condition 3.

从这些图和表可以看出, 两种方法的计算结果符合得非常好。需要注意的是, 情形 2 中的热流密度边界条件为周期时变的, 情形 3 中的热流密度边界条件不仅是周期时变的, 而且也随空间坐标变化。这表明, 常数边界条件下建立的 POD 模态矩阵能够用来很好地降阶拟合光滑时变边界情况的温度场。

5 结 论

在用边界元法求解变系数瞬态热传导问题时, 一般采用时间差分推进技术求解时间微分方程组, 这时要对所有指定的时间步进行时间推进循环, 在每个时间步推进中, 都要形成一个系统线性方程组有待求解, 当问题的自由度比较大时, 很多个方程组的求解将是一项耗时耗内存的工作。为此, 实行模型降阶方法将是一个好的选择。

本文将 POD 降阶技术应用于边界元法求解变系数瞬态热传导问题中, 做了以下工作并得出相应结论。

1) 重组并推导出变系数瞬态热传导问题适合降阶的边界元离散积分方程。将时间导数变量为温度、零阶未知量为混合变量 (热流密度, 温度) 的边界元离散积分方程 (见 (25) 式), 依据边界条件不同, 节点重新分组, 推导出变量统一的 (此时的变量为温度未知的那些节点的规格化温度) 的可用于降阶的时间微分方程组 (见 (42) 式)。

2) 建立了变系数瞬态热传导问题边界元格式

的 POD 降阶模型。低阶模型的建立, 使得数千个自由度的问题可以降阶为几个自由度的问题进行分析, 解决了边界元法中, 采用时间差分推进技术求解大型时间微分方程组时, 求解速度慢、算法稳定性差 (密切依赖于时间步长) 的问题。

3) 采用常数边界条件下建立的瞬态热传导问题的 POD 降阶模态, 对光滑时变边界条件下的问题进行了降阶分析。同样的 POD 模态能准确预测和拟合求解域不变但边界条件以各种不同方式光滑时变时的除光滑时变边界以外的瞬态传热问题的温度场, 在气动热力学等需实时控制或快速计算的问题中具有很好的发展前景。

4) 数值算例表明, 本文所述方法正确有效。

参考文献

- [1] Brebbia C A, Dominguez J 1992 *Boundary Elements: an Introductory Course* (London: McGraw-Hill Book Co.) pp52-57
- [2] Gao X W, Davies T G 2002 *Boundary Element Programming in Mechanics* (Cambridge: Cambridge University Press) pp25-33
- [3] Gao X W, Peng H F, Yang K, Wang J 2015 *Advanced Boundary Element Method—Theory and Application* (Beijing: Science Press) pp110-129 (in Chinese) [高效伟, 彭海峰, 杨凯, 王静 2015 高等边界元法——理论与程序 (北京: 科学出版社) 第 110—129 页]
- [4] Ciskowski R D, Brebbia C A 1991 *Boundary Element Methods in Acoustics* (Southampton: Elsevier)
- [5] Gao X W, Hu J X 2012 *Acta Mech. Sin.* **44** 361 (in Chinese) [高效伟, 胡金秀 2012 力学学报 **44** 361]
- [6] Zhang A M, Yao X L 2008 *Chin. Phys. B* **17** 927
- [7] Li S D, Huang Q B, Li T Y 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 64301 (in Chinese) [李善德, 黄其柏, 李天匀 2012 物理学报 **61** 64301]
- [8] Xu J, Xie W H, Deng Y, Wang K, Luo Z Y, Gong H 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 104204 (in Chinese) [许军, 谢文浩, 邓勇, 王侃, 罗召洋, 龚辉 2013 物理学报 **62** 104204]
- [9] Li S, He H L 2013 *Chin. Phys. B* **22** 24701
- [10] Yang K, Gao X W 2010 *Eng. Anal. Bound. Elem.* **34** 557
- [11] Gao X W, Wang J 2009 *Eng. Anal. Bound. Elem.* **33** 539
- [12] Gao X W, Peng H F, Liu J 2013 *Int. J. Heat Mass Transf.* **63** 183
- [13] Peng H F, Bai Y G, Yang K, Gao X W 2013 *Eng. Anal. Bound. Elem.* **37** 1545
- [14] Sutradhar A, Paulino G H 2004 *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* **193** 4511
- [15] Erhart K, Divo E, Kassab A J 2006 *Eng. Anal. Bound. Elem.* **30** 553

- [16] Mohammadi M, Hematiyan M R, Marin L 2010 *Eng. Anal. Bound. Elem.* **34** 655
- [17] Yu B, Yao W A, Gao X W Gao Q 2014 *Numer. Heat Transf. Part B: Fundam.* **65** 155
- [18] Gao X W 2002 *Eng. Anal. Bound. Elem.* **26** 905
- [19] Gao X W 2005 *J. Comput. Appl. Math.* **175** 265
- [20] Hu J X, Peng H F, Gao X W 2014 *Math. Probl. Eng.* **2014** 284106
- [21] Hu J X, Zheng B J, Gao X W 2013 *Bound. Elem. Mesh. Reduc. Meth. XXXVI* **56** 153
- [22] Nardini D, Brebbia C A 1982 *Boundary Element Methods in Engineering* (Berlin: Springer) pp312–326
- [23] Jiang Y L 2010 *Model Reduction Method* (Beijing: Science Press) pp1–4 (in Chinese) [蒋耀林 2010 模型降阶方法 (北京: 科学出版社) 第1—4页]
- [24] Chatterjee A 2000 *Curr. Sci.* **78** 808
- [25] Liang Y C, Lee H P, Lim S P, Lin W Z, Lee K H Wu C G 2002 *J. Sound Vib.* **252** 527
- [26] Fic A, Bialecki R A, Kassab A J 2005 *Numer. Heat Transf. Part B: Fundam* **48** 103
- [27] Nie X Y, Yang G W 2015 *Acta Aeronaut. Astronaut. Sin.* **36** 1103 (in Chinese) [聂雪媛, 杨国伟 2015 航空学报 **36** 1103]
- [28] Hu J X, Zheng B J, Gao X W 2015 *Sci. China Ser. G* **45** 014602 (in Chinese) [胡金秀, 郑保敬, 高效伟 2015 中国科学 G 辑 **45** 014602]
- [29] Dai B D, Cheng Y M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 597 (in Chinese) [戴保东, 程玉民 2007 物理学报 **56** 597]

Reduced order model analysis method via proper orthogonal decomposition for variable coefficient of transient heat conduction based on boundary element method*

Hu Jin-Xiu¹⁾ Gao Xiao-Wei²⁾†

1) (Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

2) (State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, School of Aeronautics and Astronautics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

(Received 15 June 2015; revised manuscript received 24 August 2015)

Abstract

Boundary element method (BEM) is widely used in engineering analysis, especially in solving the transient heat conduction problem because of the advantage that only boundary of the problem needs to be discretized into elements. The general procedure of solving the variable-coefficient transient heat conduction problem by using the BEM is as follows. First, the governing differential equations are transformed into the boundary-domain integral equations by adopting the basic solution of the linear and homogeneous heat conduction problem—Green function. Second, domain integrals in the integral equation are converted into boundary integrals by the radial integral method or the dual reciprocity method. Finally, the time difference propulsion technology is used to solve the discrete time differential equations. A large number of practical examples verify the correctness and validity of the BEM in solving the variable coefficient of transient heat conduction problem. However, two deficiencies are encountered when the system of time differential equations is solved with the time difference method, i.e., one is the stability of the algorithm, which is closely related to the time step size, and the other is time-consuming when the freedom degree of the problem is large and all specified time steps are considered, because a system of linear equations needs to be solved in each time step. Therefore, in this paper we present

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11172055).

† Corresponding author. E-mail: xwgao@dlut.edu.cn

a reduced order model analysis method of solving the variable-coefficient transient heat conduction problem based on BEM by using the model reduction method of proper orthogonal decomposition (POD). For variable-coefficient transient heat conduction problems, the discrete integral equations which are suitable for order reduction operation are deduced by using the BEM, the reduced order model is established by using the model reduction method of POD, and a low-dimensional approximate description of the transient heat conduction problem under time-varying boundary condition is obtained by projection of the initial discrete integral equations on some few dominant POD modes obtained from the problem under constant boundary conditions. First, for a variable coefficient transient heat conduction problem, boundary-domain integral equations are established and the domain integrals are transformed into boundary integrals by using the radial integration method. Second, the time differential equations with discrete format which is suitable for order reduction operation are obtained by reorganizing the integral equations. Third, the POD modes are developed by calculating the eigenvectors of an autocorrelation matrix composed of snapshots which are clustered by the given results obtained from experiments, BEM or other numerical methods for transient heat transfer problem with constant boundary conditions. Finally, the reduced order model is established and solved by projecting the time differential equations on reduced POD modes. Examples show that the method developed in this paper is correct and effective. It is shown that 1) the low order POD modes determined under constant boundary conditions can be used to accurately analyze the temperature field of transient heat conduction problems with the same geometric domain but a variety of smooth and time-varying boundary conditions; 2) the establishment of low order model solves the problem of heavy workload encountered in BEM where a set of large linear equations will be formed and solved in each time step when using the time difference method to solve the large time differential equations.

Keywords: boundary element method, variable coefficient of transient heat conduction, proper orthogonal decomposition, reduced order model

PACS: 47.11.Hj, 44.10.+i, 44.05.+e

DOI: [10.7498/aps.65.014701](https://doi.org/10.7498/aps.65.014701)