

固体表面液滴铺展与润湿接触线的移动分析

焦云龙 刘小君 逢明华 刘焜

Analyses of droplet spreading and the movement of wetting line on a solid surface

Jiao Yun-Long Liu Xiao-Jun Pang Ming-Hua Liu Kun

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 016801 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.016801

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.016801>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I1>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

微液滴在不同能量表面上润湿状态的分子动力学模拟

Molecular dynamics simulation on the wetting characteristic of micro-droplet on surfaces with different free energies

物理学报.2015, 64(21): 216801 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.216801>

微纳复合结构表面稳定润湿状态及转型过程的热力学分析

Thermodynamic analysis of stable wetting states and wetting transition of micro/nanoscale structured surface

物理学报.2015, 64(17): 176801 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.176801>

壁面材质和温度场对熔融硅润湿角的影响

Effect of temperature field and different walls on the wetting angle of molten silicon

物理学报.2015, 64(11): 116801 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.116801>

微液滴在超疏水表面的受迫振动及其接触线的固着-移动转变

Stick-slip transition of a water droplet vibrated on a superhydrophobic surface

物理学报.2014, 63(21): 216801 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.216801>

纳米颗粒吸附岩心表面的强疏水特征

The strong hydrophobic properties on nanoparticles adsorbed core surfaces

物理学报.2012, 61(21): 216801 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.216801>

# 固体表面液滴铺展与润湿接触线的移动分析\*

焦云龙 刘小君 逢明华 刘焜†

(合肥工业大学摩擦学研究所, 合肥 230009)

(2015年4月28日收到; 2015年8月25日收到修改稿)

液滴在固体表面上的铺展行为与润湿特性对许多工业生产过程的研究具有重要意义. 根据液滴在光滑表面上的受力情况, 建立了液滴平壁铺展的动力学模型. 应用润滑近似方法和二维 Navier-Stokes 方程, 建立了液滴沿理想表面铺展的动量和连续性方程. 根据建立的方程, 应用数值解法求解并详细分析了液滴在铺展过程中膜厚、接触线铺展半径以及铺展速度随时间的变化关系. 研究表明: 液滴的铺展过程可分为扩展和收缩两个阶段, 铺展过程伴随着表面能、动能以及各种势能的相互转化, 液滴最终的铺展半径大小由固体基面固有的润湿特性所决定; 液滴在铺展过程中出现的“坍塌效应”与弯曲液面处的 Laplace 压力差有关; 铺展半径随时间变化的标定律近似满足“1/7”次方标度律.

**关键词:** 铺展行为, 润湿特性, 润滑近似, 标度律

**PACS:** 68.08.Bc, 47.55.np

**DOI:** 10.7498/aps.65.016801

## 1 引言

液滴平壁铺展现象在我们日常生活中随处可见, 从最简单的变化过程如雨滴沿着窗户玻璃滑落, 到很复杂的工业过程如半导体元器件的生产<sup>[1]</sup>等. 由于出现在很多工业生产所用到的物理过程中, 液滴铺展动力学引来了来自物理、数学、工程等领域的诸多研究<sup>[2,3]</sup>.

在文献<sup>[4—6]</sup>分别建立了液滴在光滑表面和粗糙表面上的润湿模型之后, 大量关于接触角模型的研究也随之展开. Lafuma 和 Quéré<sup>[7]</sup>在前人的基础之上, 推测液滴在粗糙表面上存在除 Cassie 和 Wenzel 模型外的第三种状态, 该状态下的液滴部分浸入了粗糙表面的微槽内. 华中科技大学 Mei 等<sup>[8]</sup>基于 Wenzel 和 Cassie-Baxter 模型推导了一种粗糙表面上的表观接触角模型, 模型预测的接触角大小与实验数据具有较好的一致性. 上海同济大学王宇翔课题组<sup>[9]</sup>利用多体耗散粒子动力学方法研究了不同粗糙结构下的液滴浸润特性, 并提出一种简

洁的数值方法来计算接触角, 研究结果对理解液滴在超疏水表面的浸润状态与运动过程具有重要的意义.

随着对表面润湿研究的深入, 研究学者发现单纯地用一个静态接触角模型不能充分描述流体在固体表面上的动态铺展特性, 于是研究热点集中到了润湿接触线<sup>[10]</sup>、液滴铺展动力学方程<sup>[11]</sup>以及前驱膜<sup>[12]</sup>领域. 润湿接触线是指液滴沿固体壁面铺展时在固-液-气三相接触界面上形成的一条动态的接触线, 润湿接触线处复杂的受力问题以及接触线的移动机理是润湿动力学中的核心问题<sup>[13,14]</sup>. 清华大学王晓东等<sup>[15—18]</sup>以及中南大学曹晓平和蒋亦民<sup>[19]</sup>对粗糙表面下的润湿接触线附近的力学问题进行了探索和研究, 分别提出了润湿接触线处的滞后张力与静摩擦阻力模型. 周建臣等<sup>[20]</sup>观察液滴在超疏水表面的受迫振动时, 发现在 80—200 Hz 驱动范围内, 接触线出现了明显的固着-移动现象, 并指出液滴对外界驱动力的不同响应与接触线的振荡行为密切相关. 为了更好地理解润湿接触线的移动机理, 国内外学者结合液滴

\* 国家自然科学基金(批准号: 51375132)和高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 201201111110026)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: liukun@hfut.edu.cn

铺展的动力学方程, 对液滴的铺展和润湿过程进行了定量描述. 陈石等<sup>[21]</sup>通过数学建模从理论上得到了液滴静态平壁铺展半径与液滴物性参数以及接触角之间的数学表达式, 研究结果可用于分析计算液滴在水平壁面上的静态铺展半径和静态高度. Oron 等<sup>[11]</sup>建立了液滴在光滑平坦表面上铺展的三维模型, 利用润滑近似<sup>[22]</sup>的方法, 推导了液滴在光滑平坦表面上铺展的二维 Navier-Stokes 方程. Seong 等<sup>[23]</sup>研究了液滴在超亲水固体表面上的铺展特性, 他们用表面化学的方法对固体表面进行了柱状阵列修饰, 结合实验所得的数据得到润湿接触线位置随时间变化的“1/4”次方定律. 中国科学院力学研究所 Yuan 和 Zhao<sup>[3,24]</sup>也对液滴铺展的标定律展开了系统的研究, 通过实验观测与分子动力学模拟, 采用多尺度相分析方法对液滴在亲水表面的铺展特性进行探索和论证.

虽然有关于液滴铺展的动力学模型建立已久, 但是液滴在固体基面上的铺展过程并没有系统和细致的分析, 润湿接触线的铺展半径随时间的变化规律也没有统一的结论. 基于以上现状, 本文旨在通过建立液滴平壁铺展的动力学模型, 利用数值方法求解膜厚演化方程, 结合模拟结果详细描述液滴在铺展过程中的能量、速度以及半径的变化情况, 为控制和理解液滴铺展方式的演化和发展提供一定的理论基础.

## 2 液滴平壁铺展的动力学模型

考虑图 1 所示的液滴平壁铺展运动问题. 液滴的下表面为光滑的固体基底, 上表面为液气界面, 同时考虑重力作用以及自由界面处的表面张力作用. 为了数学上的处理方便, 黏性液滴的铺展过程一般采用润滑近似方法<sup>[11]</sup>, 该理论假定: 液滴在水平方向上的特征尺度远远大于其在竖直方向上的特征尺度; 液滴铺展由表面张力主导, 且为不可压缩 Newton 流体等温运动. 针对以上假设, 同时考虑到液滴在水平方向上铺展的各向同性特性, 二维情况下液滴铺展的 Navier-Stokes 和连续性方程可以写为

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho G_x = \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho G_z = \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

其中,  $u$  和  $w$  分别为  $x$  和  $z$  方向上的速度分量,  $\rho$  是液体密度,  $\mu$  是液滴的运动黏度,  $p$  为压强,  $G_x$  和  $G_z$  分别是重力沿  $x$  和  $z$  方向上的加速度.

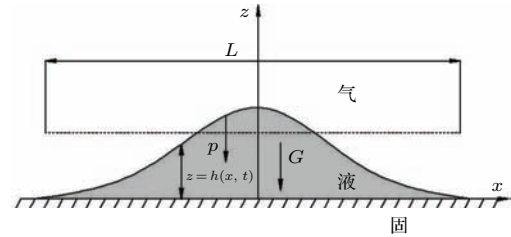


图 1 液滴铺展过程示意图

Fig. 1. A sketch of droplet spreading process.

## 3 边界条件的推导

### 3.1 固液界面处的边界条件

流体沿固体壁面流动时, 传统边界条件为无滑移边界条件, 即在  $z = 0$  处,  $w = 0, u = 0$ . 根据 Navier 线性滑移模型图 2<sup>[25]</sup>, 无边界滑移条件对应的边界滑移长度  $b = 0$ . 由于滑移长度  $b$  可表示为  $u_x \eta / \tau$ , 其中  $u_x$  为流体在  $x$  方向的速度,  $\eta$  为体相黏度,  $\tau$  为剪切应力, 当  $b = 0$  时, 剪切应力  $\tau$  趋向于无穷大, 导致了润湿接触线处的应力奇异性<sup>[10]</sup>. 为了真实地反映液滴在固-液接触界面上的速度, 消除应力奇异性, 这里采用 Navier 线性滑移边界条件, 在  $z = 0$  处:

$$w = 0, \quad (4)$$

$$u = b \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (5)$$

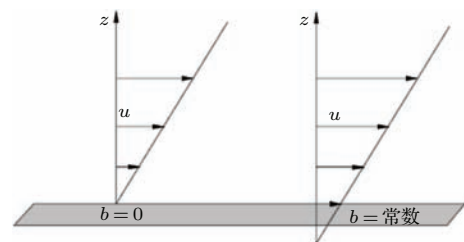


图 2 Navier 线性滑移模型

Fig. 2. Navier linear sliding model.

### 3.2 液气界面处的边界条件

在液气界面  $z = h(x, t)$  处, 液滴沿  $z$  方向上的速度为

$$w = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = u \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (6)$$

另外, 在液气界面  $z = h(x, t)$  处, 由于认为空气没有黏性, 则液气表面张力是连续的, 所以有

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=h} = 0. \quad (7)$$

最后考虑液气界面处的 Laplace-Young 边界条件. 对于弯曲液面来说, 由于液气界面处表面张力  $\gamma_{lv}$  的存在, 在靠近液面的两侧会形成压力差  $p$ , 如图 3 所示. 根据 Laplace 压强公式, 液气界面处的 Laplace-Young 边界条件为

$$p = -\gamma_{lv} \cdot \kappa. \quad (8)$$

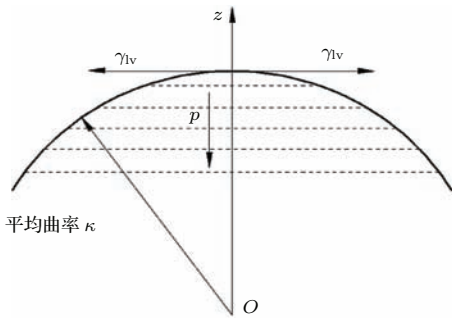


图 3 球冠状液滴表面的 Laplace 压力  
Fig. 3. Laplace pressure at curved surface inner a droplet.

## 4 方程简化及数值计算流程

### 4.1 方程的无量纲化

润滑近似理论<sup>[11]</sup>中假定: 液滴在水平方向上的特征尺度远远大于竖直方向上的特征尺度, 本文定义如下特征变量:  $L$  为  $x$  方向上的特征长度,  $h_0$  为  $z$  方向上的特征高度,  $U_0$  为  $x$  方向上的特征速度,  $W_0$  为  $z$  方向上的特征速度. 在此基础上, 引入如下无量纲量:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{h_0}{L} \ll 1, \quad Z = \frac{z}{h_0}, \\ X &= \frac{x}{L} = \frac{x\varepsilon}{h_0}, \quad W = \frac{w}{\varepsilon U_0}, \\ U &= \frac{u}{U_0}, \quad T = \frac{\varepsilon U_0}{h_0} t, \quad P = \frac{\varepsilon h_0}{\mu U_0} p. \end{aligned}$$

将以上无量纲量代入 (1)–(3) 式, 根据润滑近似理论中的薄膜运动特性,  $h_0$  相对于  $L$  非常的小, 即  $\varepsilon$  非常的小, 则在无量化后的控制方程中, 可以将含有  $\varepsilon$  的项舍去. 最后, 将无量纲量还原, 得到最终结果:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (11)$$

其中  $g$  为重力加速度.

### 4.2 考虑弯曲液面曲率的膜厚演化方程

经过润滑近似下的无量纲化过程, 液滴在光滑表面上铺展的动量控制方程和连续性方程已经化为简单格式. 结合 2.1 节和 2.2 节中所给出的边界条件, 推导得到速度函数  $u(x, z, t)$  和压强函数  $p(x, z, t)$  的数学表达式. 最后在连续性方程 (11) 两侧对  $z$  从 0 到  $h$  积分, 代入边值条件 (4)–(6) 式以及速度函数  $u(x, z, t)$ , 得到考虑弯曲液面曲率的膜厚演化方程:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{1}{3} h^3 + b h^2 \right) \rho g \frac{\partial h}{\partial x} \right] \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{1}{3} h^3 + b h^2 \right) \gamma_{lv} \frac{\partial \kappa}{\partial x} \right] = 0, \\ \kappa = \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}}{\left[ 1 + \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

### 4.3 数值计算流程

(12) 式给出了考虑重力和表面张力以及边界滑移影响下的膜厚演化方程, 本文在结合润湿性实验的基础之上, 给出液滴铺展的初值以及边界条件, 并对 (12) 式进一步简化. 最后利用 Matlab 编写膜厚方程求解程序得到方程的数值解, 数值计算流程图如图 4 所示.

#### 4.3.1 初边值条件

规定  $t = 0$  时为液滴铺展运动的初始时刻, 此时液滴刚接触固体表面形成一球状液滴, 则有

$$\begin{aligned} h(x, 0) &= \sqrt{R^2 - x^2}, \\ -R &\leq x \leq R. \end{aligned} \quad (13)$$

结合润湿性试验, 数值模拟过程给定液滴体积为  $1.5 \mu\text{L}$ , 利用球体积公式得到初始球状液滴半径  $R = 0.7 \text{ mm}$ . 在 SL200KS 接触角测量仪上, 测得体积为  $1.5 \mu\text{L}$  的液滴实际铺展半径  $L_0$ , 则有

$$h(x, t) = 0, \quad x = \pm L_0. \quad (14)$$

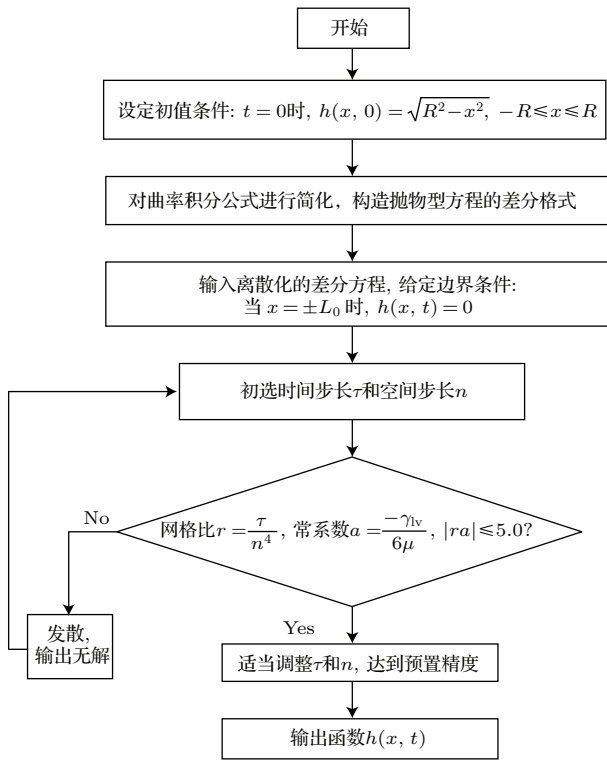


图4 数值计算流程图

Fig. 4. Flow chart of numerical calculation.

### 4.3.2 重力项简化

流体力学中,  $Bo$ (邦德数)是由于表面张力的影响确定的一个无量纲量.  $Bo$ 越大,表明重力与表面张力相比占主导作用,反之表面张力占主导作用.在初值条件中,给定液滴体积为  $1.5 \mu\text{L}$ ,液滴半径为  $0.71 \text{ mm}$ ,表面张力为  $72 \text{ N/mm}$ .

$$Bo = \frac{\rho g r^2}{\gamma_{lv}} = \frac{1000 \times 10 \times 0.71^2 \times 10^{-6}}{0.072} = 0.07.$$

表明在液滴体积很小的情况下,重力在液滴的铺展过程中几乎不起作用,铺展过程由表面张力主导.因此,忽略重力项后膜厚演化方程进一步简化为

$$\mu \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{1}{3} h^3 + b h^2 \right) \gamma_{lv} \frac{\partial \kappa}{\partial x} \right] = 0,$$

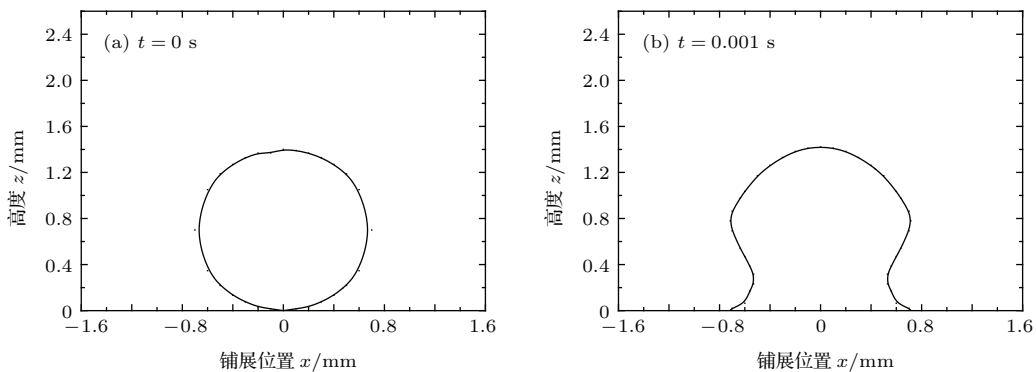
$$\kappa = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \left[ 1 + \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right]^{3/2}. \quad (15)$$

## 5 结果与讨论

### 5.1 液滴铺展过程分析

#### 5.1.1 液滴铺展过程中的能量变化

图5(a)–(i)为液滴在铺展过程中各个时刻的轮廓示意图.根据液滴在铺展过程中的半径变化,液滴的铺展过程可分为扩展和收缩两个阶段.图5(a)–(g)为扩展阶段,液滴的铺展半径随着时间的增加而增大,直到半径达到最大值;图5(g)–(i)为收缩阶段,扩展半径开始变小,并最终稳定至平衡位置.液滴在不同时刻的铺展半径大小反映了铺展过程中能量的变化情况.初始时刻,液滴在表面张力  $\gamma_{lv}$  的作用下呈球状,表面能最小<sup>[12]</sup>,见图5(a);当液滴刚接触到固体壁面时,在表面张力  $\gamma_{sl}$  的作用下,位于铺展前沿的表面层分子由于受到固体分子强烈的吸附作用而向前加速运动,随着固-液接触面积的不断增大,液滴的表面能也逐渐增大,当铺展半径达到最大时,液滴的表面能也达到最大,见图5(g);此后,由于固体表面固有的润湿特性,润湿接触线在三相表面张力共同作用下开始收缩,并最终在平衡接触角位置趋于稳定<sup>[4]</sup>,见图5(i).



(Continued)



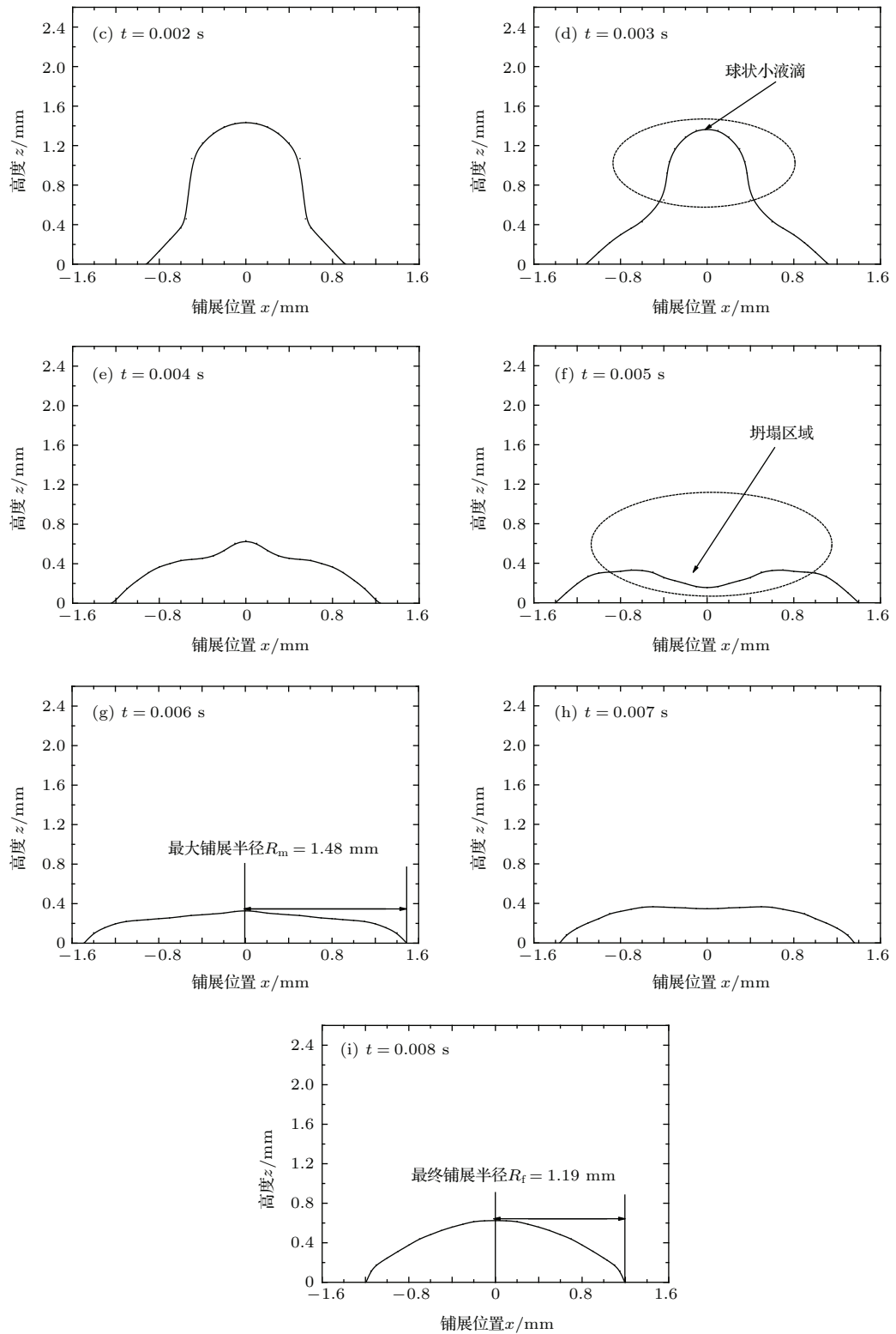


图5 液滴在不同时刻的铺展轮廓示意图

Fig. 5. Droplet contours at different spreading time.

### 5.1.2 液滴铺展过程中的“坍塌效应”

当液滴铺展到一定位置时, 在中央位置出现了坍塌, 如图 5(f) 所示. 液滴铺展过程的这种“坍塌效应”与弯曲液面处的 Laplace 压力差有关. 在初

始扩展阶段, 最靠近固-液接触面的液体分子由于最先受到固体分子的牵引, 因而向前的铺展速度较快, 形成前驱膜分子层 [26], 而远离接触面的液体分子在表面张力的作用下依然呈球状 [12], 见图 5(b).

当两侧的液体分子铺展至一定位置时, 处于上端位置的液体形成另一球状小液滴, 如图 5(d) 所示, 小液滴内部的 Laplace 压力随着弯曲液面的曲率不断增大而增大, 当压力达到一定程度时, 液滴沿  $z$  方向上的速度突然增大, 从而导致液滴在中央位置发生坍塌. 正因为“坍塌效应”的存在, 两侧的液体分子会继续向前铺展, 形成最大铺展半径  $R_m$ , 如图 5(g) 所示. 由于固体表面固有润湿特性的作用, 此时三相接触线处的表面张力不满足 Young 方程平衡条件, 因而接触线开始向液滴中央收缩, 并最终在平衡接触角处稳定.

总之, 液滴在光滑表面上的铺展过程本质上是液体分子、气体分子以及固体表面分子的相互作用过程, 固液分子的相互吸引牵引着润湿接触线不断向前运动, 并伴随着液滴表面各种能量的相互转化, 而接触线处的三相表面张力  $\gamma_{lv}$ ,  $\gamma_{sl}$  以及  $\gamma_{sv}$  则共同决定了液滴的最终铺展半径的大小. 为了进一步验证数值模拟过程的正确性, 我们对比了液滴在近似光滑的表面上的铺展半径. 在 SL200KS 接触角测量仪测得体积为  $1.5 \mu\text{L}$  的水滴的实际铺展半径约为  $1.21 \text{ mm}$ , 如图 6 所示. 对比数值模拟结果, 如图 5(i) 所示, 液滴铺展至平衡位置时铺展半径约为  $1.19 \text{ mm}$ , 两者也具有较好的一致性.

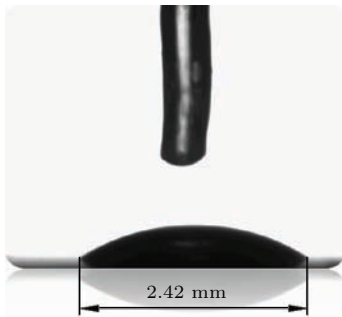


图 6  $1.5 \mu\text{L}$  水滴实际铺展轮廓图

Fig. 6. The spreading contour of  $1.5 \mu\text{L}$  droplet.

### 5.2 液滴铺展半径随时间变化的标定律

本文在 4.3 节中通过给定初边值条件以及对重力项的简化, 得到了只考虑表面张力作用下的液滴膜厚演化方程 (15), 通过数值模拟计算得到图 7 所示的铺展半径随时间变化的关系. 从图 7 可以很明显的看出液滴铺展主要分为两个阶段: 在达到最大铺展半径  $R_m$  之前, 液滴处于扩展阶段, 随着时间的推移, 铺展半径按照一定的规律线性增加, 在到达最大铺展直径  $R_m$  之后, 液滴则在表面张力的

作用下收缩直至平衡位置. 通过坐标系变换, 可以发现无论是在扩展阶段还是在收缩阶段, 液滴铺展半径随时间大致都满足“ $1/7$ ”次方标度律, 这与 Barenblatt 等 [22] 的结论具有较好的一致性.

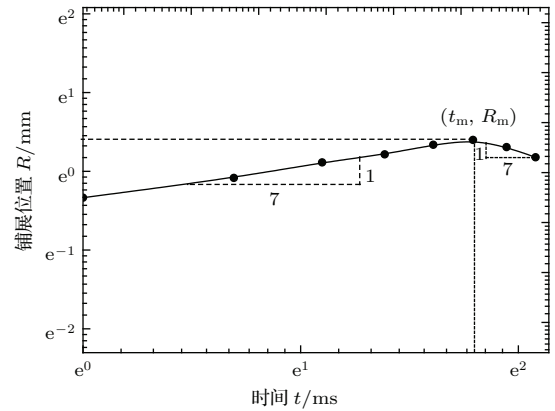


图 7 铺展半径随时间的变化关系

Fig. 7. Spreading radius  $R$  as a function of time  $t$ .

### 5.3 接触线移动速度随时间的变化规律

图 8 为液滴铺展过程中接触线移动速度随时间的变化. 液滴在初始时刻的速度为 0, 刚接触到固体表面时, 由于固液间表面张力  $\gamma_{sl}$  的作用, 靠近固-液接触面的那层液体分子受到强烈的吸引而向前加速运动, 接触线的移动速度迅速增大. 随着时间的推移, 运动液滴内部的黏性阻力开始阻碍接触线的移动, 接触线的移动速度逐渐降低并到达临界点  $A(6.273, 0)$ , 如图 8 所示. 临界点  $A$  表示液滴铺展过程中扩展阶段的结束和收缩阶段的开始, 此时液滴向前的移动速度为 0, 铺展半径最大. 处于临界位置的液滴不稳定, 因为接触线处的表面张力不满足 Young 方程平衡条件, 故液滴将开始反向收缩, 并最终稳定在平衡接触角处.

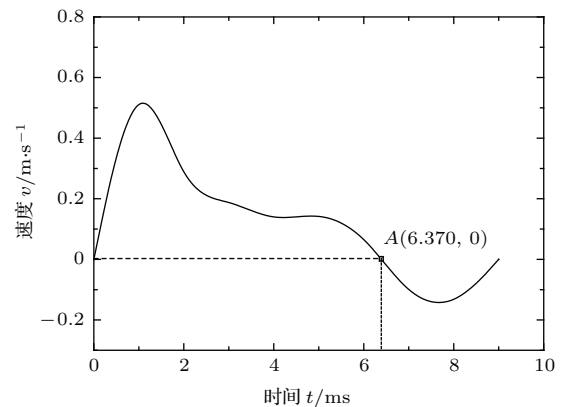


图 8 接触线移动速度随时间的变化

Fig. 8. Velocity of contact line  $v$  as a function of time  $t$ .

## 6 结 论

本文首先根据液滴在光滑表面上的受力情况,建立了液滴平壁铺展的动力学模型,之后基于二维 Navier-Stokes 方程,推导并利用数值方法求解了液滴铺展过程中考虑弯曲液面曲率的膜厚演化方程,定量分析了液滴在铺展过程中膜厚、接触线铺展半径以及移动速度与时间的变化关系. 数值结果表明: 1) 液滴在光滑表面上的铺展过程可分为扩展和收缩两个阶段,铺展半径呈现先增大后减小的变化趋势,铺展过程伴随着表面能、动能以及各种能量的相互转化; 2) 液滴在铺展过程中出现的“坍塌效应”与弯曲液面处的 Laplace 压力差有关,液滴最终的铺展半径  $R_f$  由固体基面固有的润湿特性所决定; 3) 润湿接触线半径随时间变化的标定律近似满足“ $1/7$ ”次方标度律,与 Barenblatt 通过自相似变换得到的结论具有较好的一致性; 4) 接触线移动速度的变化规律表明,液滴在铺展过程中存在速度为 0 的临界点,此时液滴即将进入液滴铺展过程的第二阶段,即收缩阶段,并最终收缩至平衡接触角位置.

需要注意的是,本文所研究的液滴铺展过程是基于光滑理想表面,而真实固体基面由于表面粗糙度的存在,液滴的铺展过程以及润湿接触线的移动规律会有所不同. 另外,本文膜厚演化方程的推导只考虑了重力和表面张力的作用,当液滴体积发生变化时,液滴铺展过程中出现的“坍塌效应”就可能与液滴自身的重力有关,这些问题都有待进一步的探讨和研究.

## 参考文献

- [1] Becker J, Grun G 2005 *J. Phys.: Condens. Mat.* **17** 291
- [2] Liu X C 2010 *Ph. D. Dissertation* (Xi'an: Northwest University) (in Chinese) [刘小川 2010 博士学位论文 (西安: 西北大学)]
- [3] Yuan Q Z, Zhao Y P 2013 *Sci. Rep.* **3** 1944
- [4] Young T 1805 *Phil. Trans.* **95** 65
- [5] Wenzel R N 1936 *J. Ind. Eng. Chem.* **28** 988
- [6] Cassie A B D, Baxter S 1944 *Trans. Faraday. Soc.* **40** 546
- [7] Lafuma A, Quéré D 2003 *Nat. Mater.* **2** 457
- [8] Mei M F, Yu B M, Luo L, Cai J C 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 076802
- [9] Wang Y X, Chen S 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 054701 (in Chinese) [王宇翔, 陈硕 2015 物理学报 **64** 054701]
- [10] Blake T D 1969 *J. Colloid Interf. Sci.* **299** 1
- [11] Oron A, Davis S H, Bankoff S G 1997 *Rev. Mod. Phys.* **69** 931
- [12] de Gennes P G 1985 *Rev. Mod. Phys.* **57** 827
- [13] Das S, Marchand A, Andreotti B, Snoeijer J H 2011 *Phys. Fluids* **23** 072006
- [14] Yu Y S 2010 *Ph. D. Dissertation* (Beijing: Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences) (in Chinese) [余迎松 2010 博士学位论文 (北京: 中国科学院力学研究所)]
- [15] Wang X D, Peng X F, He J C, Liu T 2002 *J. Eng. Thermophys.* **23** 67 (in Chinese) [王晓东, 彭晓峰, 阎敬春, 刘涛 2002 工程热物理学报 **23** 67]
- [16] Wang X D, Peng X F, Li D Z 2003 *Sci. China Ser. E* **33** 625 (in Chinese) [王晓东, 彭晓峰, 李笃中 2003 中国科学 E 辑 **33** 625]
- [17] Wang X D, Peng X F, Wang B X 2003 *J. Basic Sci. Eng.* **11** 396 (in Chinese) [王晓东, 彭晓峰, 王补宣 2003 应用基础与工程科学学报 **11** 396]
- [18] Wang X D, Peng X F, Li D Z 2004 *J. Chem. Ind. Eng.* **55** 402 (in Chinese) [王晓东, 彭晓峰, 李笃中 2004 化工学报 **55** 402]
- [19] Cao X P, Jiang Y M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2202 (in Chinese) [曹晓平, 蒋亦民 2005 物理学报 **54** 2202]
- [20] Zhou J C, Geng X G, Lin K J, Zhang Y J, Zang D Y 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 216801 (in Chinese) [周建臣, 耿兴国, 林可君, 张永健, 臧渡洋 2014 物理学报 **63** 216801]
- [21] Chen S, Tao Y, Shen S Q, Li D W 2014 *Acta Mech. Sin.* **46** 329 (in Chinese) [陈石, 陶英, 沈胜强, 李德伟 2014 力学学报 **46** 329]
- [22] Barenblatt G I, Beretta E, Bertsch M 1977 *Proc. Nat. Acad. Sci.* **94** 10024
- [23] Seong J K, Myoung W M, Kwang R L, Dae Y L, Woung S C, Ho Y K 2011 *J. Fluid Mech.* **680** 477
- [24] Yuan Q Z, Zhao Y P 2013 *J. Fluid Mech.* **716** 171
- [25] Navier C L M H 1823 *Memories. De France VI.* **6** 389
- [26] Yuan Q Z, Zhao Y P 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 246101



# Analyses of droplet spreading and the movement of wetting line on a solid surface\*

Jiao Yun-Long Liu Xiao-Jun Pang Ming-Hua Liu Kun<sup>†</sup>

(Institute of Tribology, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

( Received 28 April 2015; revised manuscript received 25 August 2015 )

## Abstract

Droplet spreading behavior on a substrate is closely bound up with the wettability of the substrate, and plays a critical role in many industrial applications, such as lubrication, painting, coating, and mineral flotation. In this paper, a dynamical model of droplet spreading on a smooth substrate is established through a mechanical analysis. According to the lubrication approximation theory and Navier-Stokes equation, a general nonlinear evolution equation or equations are derived, including the momentum equation, the continuity equation, and the evolution equation of film thickness. We adopt numerical methods to solve these equations, and also quantitatively analyze the relation among film thickness, spreading radius, speed of wetting contact line and time in detail. The results show that the droplet spreading process is mainly divided into two phases, namely expansion phase and contraction phase. Moreover, the spreading process is along with mutual transformation among surface energy, kinetic energy, and different kinds of potential energies. In addition, the final spreading radius  $R_f$  of droplet is determined by the inherent wettability of solid surface, and the “collapse effect”, which emerges at  $t = 0.006$  s in the spreading process, is related to Laplace pressure difference of curved liquid surface. Finally, by controlling the droplet size, we obtain the scaling law of droplet spreading radius with time, which approximately meets  $R \sim t^{1/7}$ . The scaling law is validated both experimentally and numerically. The results of this study are expected to enhance our knowledge of the movement of wetting contact line and also provide some guidance for the wetting theory.

**Keywords:** spreading behavior, wettability, lubrication approximation, scaling law

**PACS:** 68.08.Bc, 47.55.np

**DOI:** 10.7498/aps.65.016801

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51375132) and the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 201201111110026).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [liukun@hfut.edu.cn](mailto:liukun@hfut.edu.cn)