

Ket-Bra 纠缠态方法研究含时外场中与热库耦合 Qubit 的演化

任益充 范洪义

Solving the qubit coupled with reservoir under time-varying external field with Ket-Bra entangled state method

Ren Yi-Chong Fan Hong-Yi

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 110301 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.110301

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.110301>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I11>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

利用共振无源腔分析和抑制飞秒脉冲激光噪声的理论和实验研究

[A broadband passive cavity for analyzing and filtering the noise of a femtosecond laser](#)

物理学报.2016, 65(13): 134203 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.134203>

基于 Walsh-Hadamard 变换的单像素遥感成像

[Single-pixel remote imaging based on Walsh-Hadamard transform](#)

物理学报.2016, 65(6): 064201 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.064201>

两能级原子主方程和激光通道主方程的解之间的超对称性

[Supersymmetry of the solution to the master equation between two-level atom and laser channel](#)

物理学报.2016, 65(3): 030301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.030301>

非马尔科夫耗散系统长时演化下的极限环振荡现象

[Phenomena of limit cycle oscillations for non-Markovian dissipative systems undergoing long-time evolution](#)

物理学报.2015, 64(21): 210302 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.210302>

利用量子相干性判定开放二能级系统中非马尔可夫性

[Non-Markovianity of open two-level system by means of quantum coherence](#)

物理学报.2015, 64(14): 140302 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.140302>

Ket-Bra纠缠态方法研究含时外场中与热库耦合 Qubit 的演化*

任益充^{1)†} 范洪义¹⁾²⁾

1) (中国科学技术大学材料科学与工程系, 合肥 230026)

2) (上海交通大学物理与天文系, 上海 200240)

(2015年11月30日收到; 2016年2月29日收到修改稿)

采用 Ket-Bra 纠缠态方法求解主方程, 研究了具有含时外场情况下单 qubit 和无相互作用的两 qubit 与热库耦合时的量子退相干、退纠缠现象. 对两 qubit 情形, 我们以共生纠缠度 (concurrence) 作为纠缠度量, 研究了其纠缠动力学演化过程. 研究表明即使系统内部不存在直接、间接的相互作用, 施加含时外场也能引起纠缠的震荡和复活, 这为通过施加控制外场抑制开放系统的退相干、退纠缠过程提供了理论支持.

关键词: Ket-Bra 纠缠态方法, 主方程, 退相干

PACS: 03.65.Yz, 42.50.Lc, 03.65.Aa

DOI: 10.7498/aps.65.110301

1 引言

对开放量子系统的研究是学界长期关注的课题之一, 这主要是由于两个方面的原因: 1) 物理上没有任何系统能完全独立于外界环境, 即开放系统是普适存在的, 而封闭系统只是其在某些方面的简化与近似; 2) 近年来迅速发展的量子信息及量子计算等激励人们去研究量子系统的退相干问题, 量子信息技术依赖其操作的么正性, 然而系统与环境间不可避免的相互作用将破坏其内部的相干演化, 使得系统逐渐丢失其量子特征如相干性、纠缠性等, 从而使得系统发生退相干和退纠缠现象. 这两者正是实现量子通信及量子计算的最大障碍^[1,2].

为处理开放量子系统的动力学问题, 人们发展出了约化密度算符主方程方法, 即从系统与环境构成的总哈密顿量出发考虑其海森堡方程, 尔后在马尔可夫-玻恩近似下对其海森堡中的环境部分求迹, 将环境部分平均掉就能得到系统的约化密度算符主方程. 主方程是量子系统的约化密度算符在开放

环境下的演化方程, 其在量子光学、凝聚态物理、非平衡态热力学及量子信息等方面有着广泛而重要的应用, 如原子的激发与辐射、激光过程、玻色-爱因斯坦凝聚、量子输运、布朗运动等过程都可以用主方程来描述.

主方程就其数学形式而言是一类复杂的算符方程, 人们提出两大类方法用于精确求解主方程: 第一, 各种 C -数方法^[3], 即利用密度算符的特征函数如 P 表示、 Q 表示、Wigner 函数等将主方程转化为 F - P 方程, 求解之后再特征函数转变为密度算符; 第二, 超算符方法^[4], 即将主方程的 Lindblad 算符写成由常见 Lie 群的生成元构成的超算符形式, 并将由超算符组成的演化算符进行指数分解, 而后将指数分解后的超算符的指数形式进行级数展开并还原, 即可得到 Kraus 算符形式的解. 我们提出的 Ket-Bra 纠缠态方法^[5,6], 能够通过构造的 Ket-Bra 纠缠态将主方程转化为类薛定谔方程, 从而很方便地予以求解; 相比 C -数方法和超算符方法, Ket-Bra 纠缠态方法应用范围广, 理论上能够适用于任意有限能级系统的主方程, 且大多数薛定

* 国家自然科学基金 (批准号: 11574295) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: rych@mail.ustc.edu.cn

谓方程成熟的求解方法通过 Ket-Bra 纠缠态方法都可用于主方程的求解.

我们选取含时外场中与热库耦合的 qubit 作为模型, 从哈密顿量出发推导得到主方程, 该主方程较为复杂, 用常规 C -数法和超算符方法难以求解, 故采用 Ket-Bra 纠缠态 (Ket-Bra entangled state, KBES) 方法精确求解了此模型的动力学演化, 并进一步将单个 qubit 的解推广到两个 qubit 的情况, 以共生纠缠度 (concurrence) [7] 来度量研究其纠缠演化.

本文首先系统地介绍求解主方程的超算符方法和 Ket-Bra 纠缠态 [5,6] 方法, 后者通过构造的 Ket-Bra 纠缠态将主方程转化为类薛定谔方程, 从而可以很方便地求解主方程; 随后利用此方法求解了处在含时外场中与热库耦合的 qubit 模型. 由于哈密顿量增加了含时外场使得其主方程用常规方法难以求解, 我们用 Ket-Bra 纠缠态方法精确求解了其动力学演化; 然后我们讨论了单 qubit 的退相干过程, 并研究了两个无耦合 qubit 的共生纠缠度的演化、退纠缠和纠缠死亡现象. 一般认为系统纠缠度的震荡涨落或纠缠复活 (entanglement sudden birth, ESB) 是由子系统间的直接或间接相互作用导致的, 例如子系统间通过非马尔可夫环境的记忆效应存在的间接相互作用 [8,9]、自旋链模型中 qubit 间直接的耦合相互作用 [6,10] 等都可以导致纠缠度的涨落震荡和复活现象. 然而, 本文研究发现即使在无相互作用的情况下, 外场的影响仍可使系统演化过程中出现纠缠涨落震荡及 ESB 现象, 这说明施加控制外场对开放系统的退纠缠过程有一定的抑制作用. 本文最后针对对 Ket-Bra 纠缠态方法和研究结果包括纠缠演化过程中出现的纠缠涨落和 ESB 现象等进行了系统的分析和总结.

2 Ket-Bra 纠缠态方法和超算符方法

本章中我们将简要回顾总结超算符方法的求解过程及其发展, 进一步介绍 Ket-Bra 纠缠态方法对主方程的求解过程. 为进一步说明超算符方法, 考虑最常见的单 qubit 与谐振子热库耦合的情况, 其系统和热库的总哈密顿量为

$$H_{\text{tot}} = \omega_0 \sigma_z + \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k + \sigma^- \sum_k g_k^* a_k^\dagger + \sigma^+ \sum_k g_k a_k. \quad (1)$$

将上述哈密顿量转到相互作用绘景中, 而后给出其海森堡方程并从方程两边对环境部分求迹即可得到系统演化的主方程 (具体的推导过程见文献 [11]):

$$\dot{\rho} = \mathcal{L} \rho, \quad (2)$$

其中 \mathcal{L} 是主方程的 Lindblad 算符,

$$\mathcal{L} \rho = \alpha (2\sigma^- \rho \sigma^+ - \sigma^+ \sigma^- \rho - \rho \sigma^+ \sigma^-) + \beta (2\sigma^+ \rho \sigma^- - \sigma^- \sigma^+ \rho - \rho \sigma^- \sigma^+), \quad (3)$$

式中

$$\alpha = \frac{\gamma}{2} (n+1), \quad \beta = \frac{\gamma}{2} n,$$

γ 代表原子的自发辐射率, $n = 1/(e^{\hbar\omega/k_B T} - 1)$ 代表环境热库的平均光子数. 若算符 \mathcal{L} 不含时, 则 (2) 式的形式解为

$$\rho(t) = e^{\mathcal{L}t} \rho(0). \quad (4)$$

针对主方程 (2) 式中算符 \mathcal{L} 定义如下超算符:

$$L_+ \rho = \sigma^+ \rho \sigma^-, \quad L_- \rho = \sigma^- \rho \sigma^+, \\ L_z \rho = \frac{1}{2} (\sigma^+ \sigma^- \rho - \rho \sigma^+ \sigma^-). \quad (5)$$

容易验证 $L_{\pm, z}$ 构成 $Su(2)$ 李代数满足如下对易关系

$$[L_+, L_-] \rho = 2L_z \rho, \\ [L_z, L_{\pm}] \rho = \pm L_{\pm} \rho. \quad (6)$$

\mathcal{L} 利用 (5) 式中定义的超算符可表示为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (2n+1) \gamma + n \gamma L_- + (n+1) \gamma L_+ - \gamma L_z. \quad (7)$$

进一步地, 主方程 (4) 式的解可写为如下形式:

$$\rho(t) = e^{-\frac{1}{2}(2n+1)\gamma t + n\gamma L_- + (n+1)\gamma t L_+ - \gamma t K_z} \rho(0), \\ = e^{x_+(t)L_+} e^{\ln x_z(t)L_z} e^{x_-(t)L_-} \rho(0), \quad (8)$$

其中 $x_{\pm}(t)$, $x_z(t)$ 的具体形式见文献 [12]. 注意到在上述式子的推导过程中利用 $L_{\pm, z}$ 的 $Su(2)$ 李群的对易性质才能将超算符的指数形式拆分开, 因此若 \mathcal{L} 不能分解成 $Su(1, 1)$ 或者 $Su(2)$ 李群的生成元, 则 (8) 式中的指数分解无法完成, 超算符方法也不再适用.

国内外对于超算符方法进行了发展, 例如王书金等 [13] 提出了左乘、右乘算符的概念从而能够给出超算符的具体表达, 然而就其求解过程的物理本质而言仍然属于超算符方法的范畴. 文献 [14,15] 更进一步提出热纠缠态表象 $|I\rangle = e^{a^\dagger \tilde{a}^\dagger} |0, \tilde{0}\rangle$ 能够将玻色算符在实模和虚模之

间转换 $a|I\rangle = \tilde{a}^\dagger|I\rangle, a^\dagger|I\rangle = \tilde{a}|I\rangle$, 从而能方便地求解主方程, 不足之处在于 $|I\rangle$ 仅对玻色系统适用, 更多例子请参考文献^[16].

针对 C -数方法和超算符方法的不足, 我们发展出 Ket-Bra 纠缠态方法, 用于求解主方程, 针对希尔伯特空间 \mathcal{H} 中的密度算符 $\rho = \sum_{m,n} \rho_{m,n} |m\rangle\langle n|$, 引入额外的虚模构造 Ket-Bra 纠缠态 $|\eta\rangle = \sum_m |m, \tilde{m}\rangle$. 对算符基矢 $|m\rangle\langle n|$ 有

$$|m\rangle\langle n|\eta\rangle = \sum_{m'} |m\rangle\langle n||m', \tilde{m}'\rangle = |m, \tilde{n}\rangle. \quad (9)$$

利用以上性质即可将密度算符 ρ 转化为态矢 $|\rho\rangle$,

$$|\rho\rangle = \rho|\eta\rangle = \sum_{m,n} \rho_{m,n} |m\rangle\langle n|\eta\rangle = \sum_{m,n} \rho_{m,n} |m, \tilde{n}\rangle. \quad (10)$$

更一般地, 对任意 $A = \sum_{m,n} a_{mn} |m\rangle\langle n|$, a_{mn} 是实数, 有

$$A|\eta\rangle = \sum_{m,n} a_{mn} |\tilde{m}\rangle\langle \tilde{n}| \sum_{n'} |n', \tilde{n}'\rangle = \tilde{A}^\dagger|\eta\rangle, \quad (11)$$

(9)–(11) 式可用于将主方程转化为类薛定谔方程; 注意到 $|\eta\rangle$ 的实模部分是右矢 Ket, 而虚模部分实质上代表左矢 Bra 部分, 故将 $|\eta\rangle$ 称之为 Ket-Bra 纠缠态.

以主方程 (2) 为例, 首先定义相应的 Ket-Bra

纠缠态 $|\eta_2\rangle = |0\tilde{0}\rangle + |1\tilde{1}\rangle$, 易验证有如下关系:

$$\sigma_+|\eta_2\rangle = \tilde{\sigma}_-|\eta_2\rangle, \sigma_-|\eta_2\rangle = \tilde{\sigma}_+|\eta_2\rangle. \quad (12)$$

利用此关系即可将主方程转化为类薛定谔方程

$$\frac{d}{dt}|\rho(t)\rangle = \mathcal{F}|\rho(t)\rangle, \quad (13)$$

其中

$$\mathcal{F} = \alpha(2\sigma_- \tilde{\sigma}_- - \sigma_+ \sigma_- - \tilde{\sigma}_+ \tilde{\sigma}_-) + \beta(2\sigma_+ \tilde{\sigma}_+ - \sigma_- \sigma_+ - \tilde{\sigma}_- \tilde{\sigma}_+). \quad (14)$$

(13) 式形式上与薛定谔方程类似, 不同之处在于 \mathcal{F} 一般为非厄米的, 故称之为类薛定谔方程. 类薛定谔方程 (13) 的形式解为

$$|\rho(t)\rangle = e^{\mathcal{F}t}|\rho(0)\rangle. \quad (15)$$

为求出其解析式需利用 \mathcal{F} 在直积空间 $\mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$ 中的矩阵表示 (采用 $|0\rangle = (0, 1)^\top, |1\rangle = (1, 0)^\top, \sigma_- = |0\rangle\langle 1|, \sigma_+ = |1\rangle\langle 0|$)

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} -2\alpha & 0 & 0 & 2\beta \\ 0 & -\alpha - \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha - \beta & 0 \\ 2\alpha & 0 & 0 & -2\beta \end{pmatrix}, \quad (16)$$

因此只需计算 $e^{\mathcal{F}t}$ 即可得到类薛定谔方程的解析解, 其中 \mathcal{F} 是 4×4 的矩阵, 我们可以通过矩阵对角化来计算 $e^{\mathcal{F}t}$ 且这一过程可由计算机完成, 故

$$|\rho(t)\rangle = \left(\frac{\beta + e^{-2(\alpha+\beta)t}(\alpha\rho_{11} - \beta\rho_{00})}{\alpha + \beta} e^{-(\alpha+\beta)t} \rho_{10} \quad e^{-(\alpha+\beta)t} \rho_{01} \quad \frac{\alpha + e^{-2(\alpha+\beta)t}(\beta\rho_{00} - \alpha\rho_{11})}{\alpha + \beta} \right)^\top. \quad (17)$$

将 $|\rho(t)\rangle$ 转换为矩阵形式后有

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \frac{\beta + e^{-2(\alpha+\beta)t}(\alpha\rho_{11} - \beta\rho_{00})}{\alpha + \beta} & e^{-(\alpha+\beta)t} \rho_{10} \\ e^{-(\alpha+\beta)t} \rho_{01} & \frac{\alpha + e^{-2(\alpha+\beta)t}(\beta\rho_{00} - \alpha\rho_{11})}{\alpha + \beta} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

式中 $\rho_{ij} = \rho_{ij}(0)$, 此即为主方程 (2) 的解.

由于 Ket-Bra 纠缠态方法将主方程转化为类薛定谔方程然后求解, 这一特性使得大多数薛定谔方程的求解方法可用于求解主方程. 以定态方法为例, 首先考虑 \mathcal{F} 的本征值与本征态

$$\mathcal{F}|\varphi_i\rangle = \lambda_i|\varphi_i\rangle. \quad (19)$$

则类薛定谔方程 (13) 的解即可表示为

$$|\rho(t)\rangle = \sum_i C_i e^{\lambda_i t} |\varphi_i\rangle, \quad (20)$$

其中所有的本征值 $\lambda_i \leq 0$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时所有本征值小于零的本征态部分将会随时间指数衰减趋向于零, 故本征值 $\lambda = 0$ 对应的本征态 φ_0 实际上代表最终的稳定态即 $\rho(\infty)$. 此外, 易观察到 Ket-Bra 纠缠态方法理论上能够求解任意有限能级系统的主方程, 针对 N 能级的系统在求解过程中只需对角化 $N^2 \times N^2$ 的矩阵即可, 且可由计算机来完成此类繁琐的工作.

综上所述, 相比超算符方法, Ket-Bra 纠缠态

方法在求解主方程有如下优势:

1) Ket-Bra 纠缠态方法应用范围广, 理论上能求解任意有限维能级系统的主方程, 而超算符方法则依赖主方程的 Lie 代数结构, 即使主方程的细微改变即可导致超算符方法不再适用;

2) Ket-Bra 纠缠态方法求解过程简单方便、物理意义清晰, 且主要计算可以通过计算机来完成; 一般来说 N 能级系统主方程需对角化 N^2 阶矩阵, 我们在本文中主要使用 Mathematica 9.0 为工具, 其内部命令 MatrixExp[\mathbf{F}] 可直接给出矩阵 \mathbf{F} 的指数 $e^{\mathbf{F}}$ 的解析式; 此外, 密度矩阵重整化群算法 (即 DMRG 方法) 已经可对 32-qubit 的自旋链进行对角化, 因此 Ket-Bra 纠缠态方法结合 DMRG 算法能够处理具有更大自由度的开放系统的主方程;

3) Ket-Bra 纠缠态方法能够将主方程转化为薛定谔方程, 这使得薛定谔方程的方法同样可用于求解主方程, 而针对薛定谔方程目前学界已有许多成熟方法, 例如演化算符法、定态方法、微扰法、不变算符法等都可通过 Ket-Bra 纠缠态方法用于求解主方程.

3 含时外场中 qubit 的主方程

量子调控旨在通过对系统的影响以控制量子系统的动力学过程, 而量子调控中常见的 Lyapunov 方法能够通过系统施加一系列不同频率, 振幅随时间变化的外场来控制系统的演化 [17]; 此外亦可通过施加外场等手段使得 qubit 频繁反转, 从而抑制系统的退相干过程 [18,19], 此方法即为动力学解耦 (dynamic decoupling). 由此可见合适的外场有助于抑制开放系统的退相干和退纠缠过程, 为寻找抑制开放量子系统的退相干和退纠缠过程的方法, 我们将考察含时外场中开放 qubit 的动力学演化过程.

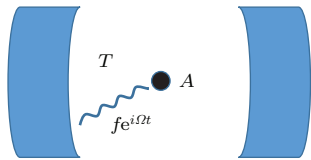


图 1 含时外场中二能级原子与热库耦合模型

Fig. 1. The model of 2-level atom coupled with reservoir.

为简单起见, 我们仅考虑单一频率固定振幅的控制外场, 即 qubit 处在某频率固定振幅的外场中

与热库耦合. 如图 1 所示, 二能级原子 Q 处腔中与温度为 T 的热库相互作用, 腔中存在有 $f e^{i\Omega t}$ 的含时外场.

在旋波近似下包含系统、热库、相互作用部分的整个哈密顿量为

$$H = \omega_0 \sigma_z + \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k + f \left(\sigma^+ e^{i\Omega t} + \sigma^- e^{-i\Omega t} \right) + \sigma^- \sum_k g_k^* a_k^\dagger + \sigma^+ \sum_k g_k a_k. \quad (21)$$

将上述哈密顿量转到相互作用绘景下有:

$$H_I = e^{iH_0 t} (H - H_0) e^{-iH_0 t} = H' + H'_I,$$

其中 $\Lambda = \omega_0 - \Omega$ 且

$$\begin{aligned} H_0 &= \Omega \sigma_z + \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k, H' \\ &\equiv \Lambda \sigma_z + f (\sigma^+ + \sigma^-) \\ H'_I &= \sigma^- e^{i\Omega t} \sum_k g_k^* a_k^\dagger e^{i\omega_k t} \\ &\quad + \sigma^+ e^{-i\Omega t} \sum_k g_k a_k e^{-i\omega_k t}. \end{aligned} \quad (22)$$

利用哈密顿量 H_I 推导得到主方程

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -i [H', \rho] \\ &\quad + \beta (2\sigma^+ \rho \sigma^- - \sigma^- \sigma^+ \rho - \rho \sigma^- \sigma^+) \\ &\quad + \alpha (2\sigma^- \rho \sigma^+ - \sigma^+ \sigma^- \rho - \rho \sigma^+ \sigma^-), \end{aligned} \quad (23)$$

式中 $\alpha = \gamma(n+1)/2$, $\beta = \gamma n/2$, γ 是原子自发辐射率, $n = 1/(e^{\hbar\omega/k_B T} - 1)$ 与环境温度 T 正相关代表环境的平均光子数. 利用 Ket-Bra 纠缠态 $|\eta_2\rangle = |\tilde{0}\tilde{0}\rangle + |\tilde{1}\tilde{1}\rangle$ 同样将上式转化为类薛定谔方程:

$$\frac{d}{dt} |\rho\rangle = \mathcal{F} |\rho\rangle, \quad (24)$$

其中 \mathcal{F} 为包含实模和虚模的非厄米型算符, 类似于薛定谔方程中的哈密顿算符,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= i(\tilde{H}' - H') + \alpha (2\sigma^- \tilde{\sigma}^- - \sigma^+ \sigma^- - \tilde{\sigma}^+ \tilde{\sigma}^-) \\ &\quad + \beta (2\sigma^+ \tilde{\sigma}^+ - \sigma^- \sigma^+ - \tilde{\sigma}^- \tilde{\sigma}^+). \end{aligned}$$

\mathcal{F} 在直积空间中矩阵形式的表示为

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} -2\alpha & if & -if & 2\beta \\ if & -\alpha - \beta - 2i\Lambda & 0 & -if \\ -if & 0 & -\alpha - \beta + 2i\Lambda & if \\ 2\alpha & -if & if & -2\beta \end{pmatrix}. \quad (25)$$

故通过此矩阵表示, 利用 (15) 式 $|\rho(t)\rangle = e^{\mathcal{F}t}|\rho(0)\rangle$ 直接可以求得解析解, 此过程我们已用 Mathematica 9.0 给出解析结果, 然而由于相应的解析式过于复杂冗长, 这里未给出.

综上, 我们已经求解出含时外场中单个 qubit 与热库耦合的主方程, 进一步考虑两个无耦合的二能级原子 Q_A 和 Q_B 的情况, 则其解的形式为

$$|\rho_{AB}(t)\rangle = e^{\mathcal{F}_A t + \mathcal{F}_B t} |\rho_{AB}(0)\rangle = e^{\mathcal{F}_A t} \otimes e^{\mathcal{F}_B t} |\rho_{AB}(0)\rangle. \quad (26)$$

通过上式即可由单个 qubit 的解推广到两个的情况, 下面我们将针对二能级原子的退相干过程、终稳态 $\rho(\infty)$ 以及两个无耦合 qubit 的纠缠演化进行分析讨论.

4 退相干演化及其终稳态

首先, 我们考虑单个 qubit 的约化密度矩阵的演化和退相干过程, 设系统的初态为

$$\rho(0) = |\psi_{ini}\rangle \langle \psi_{ini}|, \quad (27)$$

其中 $|\psi_{ini}\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$, a 是实数且有 $|a|^2 + |b|^2 = 1$; 将 $\rho(0)$ 作用到 Ket-Bra 纠缠态上有

$$|\rho(0)\rangle = a^2|0\tilde{0}\rangle + |b|^2|1\tilde{1}\rangle + ab|1\tilde{0}\rangle + ab^*|0\tilde{1}\rangle. \quad (28)$$

代入到 (15) 式即可得到主方程的解析解.

为进一步研究其退相干演化, 将约化密度矩阵的非对角项 $|\rho_{10}|$ 在不同参数下的含时演化示于图 2 中.

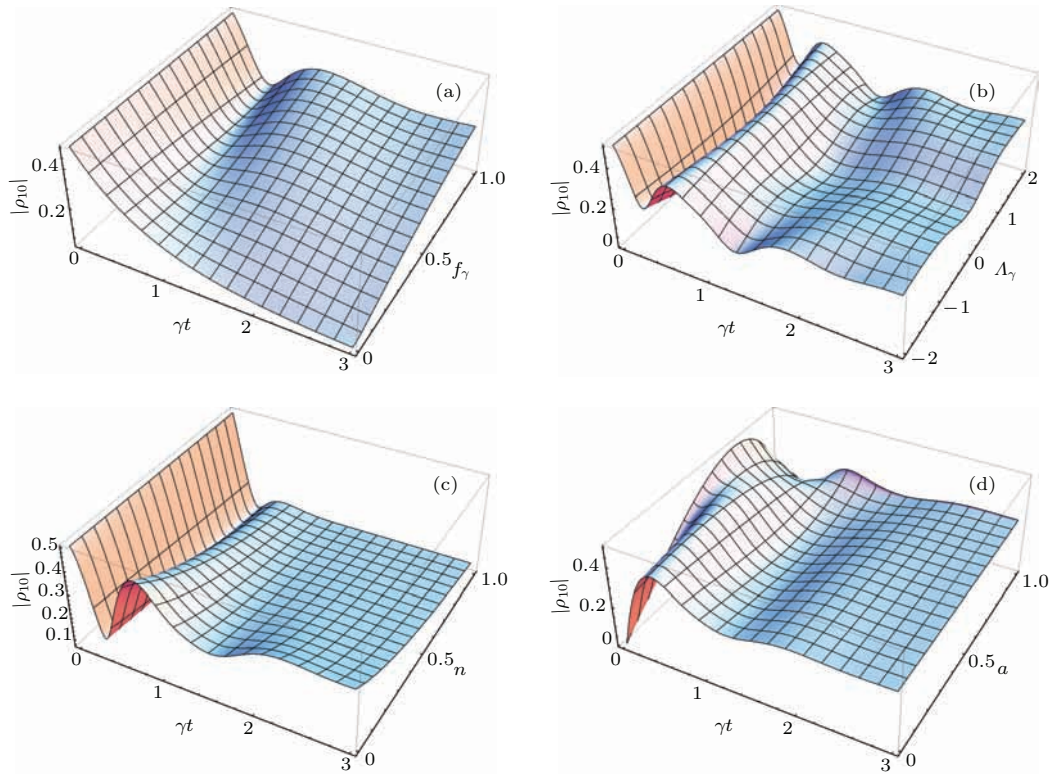


图2 (网刊彩色) 外场、环境及初态对 $|\rho_{10}|$ 相干演化的影响 (a) $\Lambda_\gamma = 1, m = 0.1, a = b = 1/\sqrt{2}$; (b) $f_\gamma = 2, m = 0.1, a = b = 1/\sqrt{2}$; (c) $\Lambda_\gamma = 1, f_\gamma = 2, a = b = 1/\sqrt{2}$; (d) $\Lambda_\gamma = 1, f_\gamma = 2, m = 0.1$

Fig. 2. (color online) The impact of external field, environment and initial state on the evolution of coherence: (a) $\Lambda_\gamma = 1, m = 0.1, a = b = 1/\sqrt{2}$; (b) $f_\gamma = 2, m = 0.1, a = b = 1/\sqrt{2}$; (c) $\Lambda_\gamma = 1, f_\gamma = 2, a = b = 1/\sqrt{2}$; (d) $\Lambda_\gamma = 1, f_\gamma = 2, m = 0.1$.

为方便起见, 定义 $f_\gamma = f/\gamma, \Lambda_\gamma = \Lambda/\gamma$, 图 2 (a), (b) 分别描述外场场强 f 及频率 Λ 对 $|\rho_{10}|$ 演化过程的影响, 而图 2 (c), (d) 则描述环境平均光子数 n 和系统初态参数 a 的影响. 图 2 (a) 显示 $f_\gamma = 0$, 当无外场时, $|\rho_{10}|$ 呈现指数衰减, 即为普通的退相干过程, 然而 $f_\gamma \neq 0$ 时 $|\rho_{10}|$ 开始出现波动, 不再

单调衰减, 这说明外场的存在对退相干有一定的抑制作用; 此外当 $t \rightarrow \infty$ 时 $|\rho_{10}|$ 随 f_γ 的增大而增大. 图 2 (b) 显示 $|\rho_{10}|$ 的起伏波动频率随 Λ_γ 值的增大而相应增大, 且关于 $\Lambda_\gamma = 0$ 对称. 图 2 (c) 显示 $|\rho_{10}|$ 随着 n 的增大而快速减小, 即环境温度越高, 系统退相干越快. 而图 2 (d) 则说明 $|\rho_{10}(t \rightarrow \infty)|$

与 a 无关, 即系统的最终稳态与其初态无关, 仅受环境温度 n 、外场强度 f 、频率差 Λ 的影响; 综上, 系统的最终稳态 $\rho(\infty)$ 与初态无关, 仅受系统和环境的哈密顿量内参数影响.

如上所述, 利用定态方法我们可以将类薛定谔的解表示为 $|\rho(t)\rangle = \sum_i C_i e^{\lambda_i t} |\varphi_i\rangle$, 其中 $\lambda_i, |\varphi_i\rangle$ 分别表示 Lindblad 算符 \mathcal{L} 的本征值和本征态且所有 $\lambda_i \leq 0$; 显然 $t \rightarrow \infty$ 时, 对所有 $\lambda_i < 0$ 的本征值 $e^{\lambda_i t} \rightarrow 0$ 该项消失, 仅有 $\lambda_i = 0$ 对应的本征态不为零, 该本征态即代表系统的终稳态 $\rho(\infty)$. 对于此

模型, 该零本征值对应的态为

$$|\varphi_0\rangle = \begin{pmatrix} f^2 + \beta^2 + \alpha\beta + \frac{4\beta\Lambda^2}{\alpha+\beta} \\ if_\gamma(\alpha + \beta - 2i\Lambda_\gamma) \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta} \\ if_\gamma(\alpha + \beta - 2i\Lambda_\gamma) \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \\ f_\gamma^2 + \alpha^2 + \alpha\beta + \frac{4\alpha\Lambda_\gamma^2}{\alpha + \beta} \end{pmatrix}. \quad (29)$$

利用上述本征态对其进行归一化后即可得 $|\rho(\infty)\rangle$, 进而求得 $\rho(\infty)$

$$\rho(\infty) = \frac{1}{2n+1} \begin{pmatrix} n + \frac{f_\gamma^2}{M(n, f_\gamma, \Lambda_\gamma)} & \frac{-if_\gamma(n + 1/2 - 2i\Lambda_\gamma)}{M(n, f_\gamma, \Lambda_\gamma)} \\ \frac{if_\gamma(n + 1/2 + 2i\Lambda_\gamma)}{M(n, f_\gamma, \Lambda_\gamma)} & \frac{(n+1)M(n, f_\gamma, \Lambda_\gamma) - f_\gamma^2}{M(n, f_\gamma, \Lambda_\gamma)} \end{pmatrix}. \quad (30)$$

注意到式中 $M(n, f_\gamma, \Lambda_\gamma)$ 的表达式为

$$M(n, f_\gamma, \Lambda_\gamma) = (n + 1/2)^2 + 2(f_\gamma^2 + 2\Lambda_\gamma^2). \quad (31)$$

为进一步研究系统的终稳态 $\rho(\infty)$ 与参数间的关系, 将 $\rho(\infty)$ 与环境、外场参数的关系示于图 3 中.

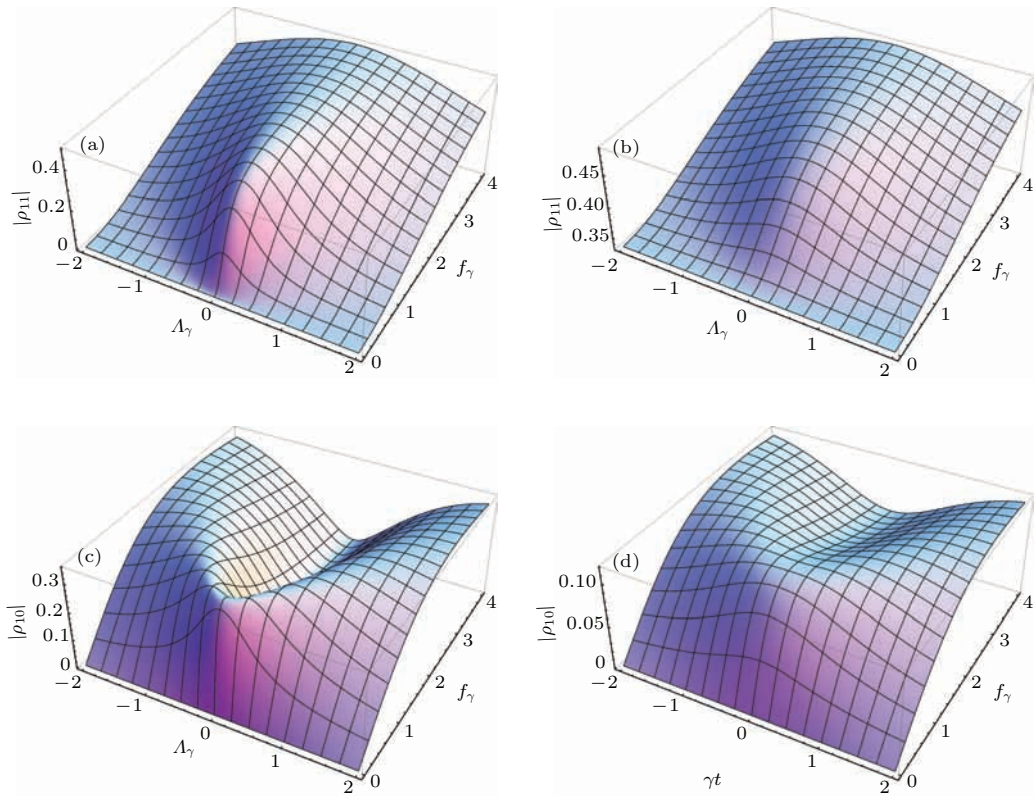


图 3 (网刊彩色) 最终稳态 ρ_∞ 矩阵元与环境、外场参数关系 (a) $n = 0$; (b) $n = 1$; (c) $n = 0$; (d) $n = 1$

Fig. 3. (color online) Relation between the final state ρ_∞ and parameters of external field: (a) $n = 0$; (b) $n = 1$; (c) $n = 0$; (d) $n = 1$.

首先观察对角项 $\rho_{11}(\infty)$, 图 3(a), (b) 显示 $\rho_{11}(\infty)$ 与 n 正相关, 且 $\Lambda_\gamma = 0$ 时 $\rho_{11}(\infty)$ 有极大值并随着 f_γ 的增长而增长; f 代表外场强度而 Λ 代表

原子与外场的频率之差, $\Lambda = 0$ 时意味着 $\omega_0 = \Omega$, 原子频率与外场频率相等出现谐振现象, 原子更容易从外场中吸收能量跃迁到更高能级. 图 3(c), (d)

则 $|\rho_{10}(\infty)|$ 与 n 呈现反相关, 同时与 f_γ, Λ_γ 关系复杂. 由 (26) 式可推出, 当 $f_\gamma, \Lambda_\gamma, n$ 满足如下关系时,

$$f_\gamma^2 - 2\Lambda_\gamma^2 = (n + 1/2)^2 / 2, \quad (32)$$

$|\rho_{10}(\infty)|$ 取极大值, 如图 3(c), (d) 所示, 这说明通过对原子施加合适的外场能够有效维持原子的相干性, 抑制退相干作用.

5 系统的纠缠演化

我们已经在第三部分求得单个 qubit 的主方程的解, 对于两个无耦合 qubit 的情况, 由于两体间无

耦合则其 Lindblad 算符互相对易, 如 (26) 式所示, 只需对 $e^{\mathcal{L}t}$ 进行直积即可得到相应的解, 这也正是 Ket-Bra 纠缠态方法的优点之一. 为进一步研究其纠缠演化, 我们考虑两个无耦合的 qubit 处于初态是 Winger 纠缠态的情况, 即

$$\begin{aligned} \rho^\Phi(0) &= |\Phi\rangle\langle\Phi|, \\ |\Phi\rangle &= a|01\rangle + b|10\rangle; \\ \rho^\Psi(0) &= |\Psi\rangle\langle\Psi|, \\ |\Psi\rangle &= a|00\rangle + b|11\rangle. \end{aligned} \quad (33)$$

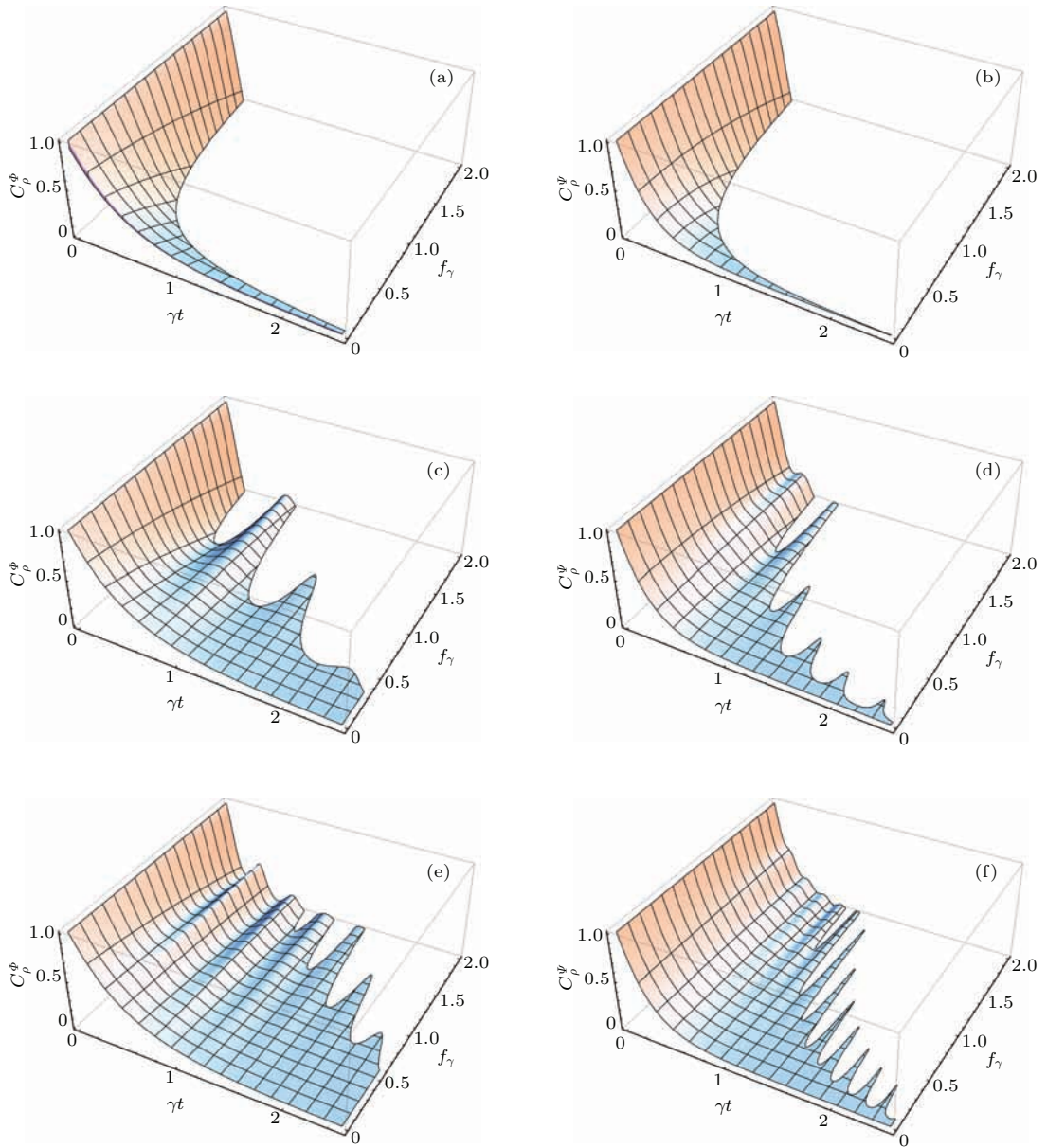


图4 (网刊彩色) 外场场强 f 及频率差 Λ 对共生纠缠度 C_ρ^Φ, C_ρ^Ψ 演化的影响 (a) $\Lambda_\gamma = 0, n = 0, a = b = 1/\sqrt{2}$; (b) $|\Lambda_\gamma| = 4, n = 0, a = b = 1/\sqrt{2}$; (c) $|\Lambda_\gamma| = 8, n = 0, a = b = 1/\sqrt{2}$

Fig. 4. (color online) The impacts of field strength f and frequency difference Λ on the dynamic evolution of C_ρ^Φ, C_ρ^Ψ : (a) $\Lambda_\gamma = 0, n = 0, a = b = 1/\sqrt{2}$; (b) $|\Lambda_\gamma| = 4, n = 0, a = b = 1/\sqrt{2}$; (c) $|\Lambda_\gamma| = 8, n = 0, a = b = 1/\sqrt{2}$.

同时我们采用 Wotters 提出的 concurrence^[7] 来度量两 qubit 的纠缠程度, (33) 式中密度矩阵 $\rho^\Phi(0)$ 与 $\rho^\Psi(0)$ 都拥有“X”结构, 此“X”结构在演化过程中能够保持不变, 因此相应的 concurrence 有如下简单计算公式:

$$C_\rho^\Phi = 2\text{Max} \left\{ 0, |\rho_{23}(t)| - \sqrt{\rho_{11}(t)\rho_{44}(t)} \right\},$$

$$C_\rho^\Psi = 2\text{Max} \left\{ 0, |\rho_{14}(t)| - \sqrt{\rho_{22}(t)\rho_{33}(t)} \right\}. \quad (34)$$

将初态 (33) 式代入 (26) 式即可得到密度算符的解, 而后利用 (34) 式即可得到 C_ρ^Φ 与 C_ρ^Ψ . 我们将 C_ρ^Φ 与 C_ρ^Ψ 绘于图 4 以考查参数对纠缠演化的影响, 首先研究外场参数 f 及频率差 Λ 对 C_ρ^Φ 和 C_ρ^Ψ 的影响.

图 4 显示, 外场存在与否极大地影响了两无耦合 qubit 的纠缠演化过程, 当频率差 $\Lambda = 0$ 、外场频率等于原子频率时, $C_\rho^\Phi(t)$ 和 $C_\rho^\Psi(t)$ 都单调递减且随着外场强度 f 的增大而减小, 且 $f \neq 0$ 时均伴有纠缠死亡 (entanglement sudden death, ESD) 现象^[20], 总体来说有 $C_\rho^\Phi(t) \geq C_\rho^\Psi(t)$; 当频率差 $\Lambda \neq 0$ 时, $C_\rho^\Phi(t)$ 与 $C_\rho^\Psi(t)$ 出现震荡且其振幅指数衰减类似阻尼震荡的情况, 同时我们观察到在一些区域 $C_\rho^\Phi(t)$ 或 $C_\rho^\Psi(t)$ 降到 0 即彻底解纠缠, 而后又重新出现纠缠的情况, 即发生了纠缠死亡 (ESD) 现象和纠缠复活 (entanglement sudden birth, ESB) 现象

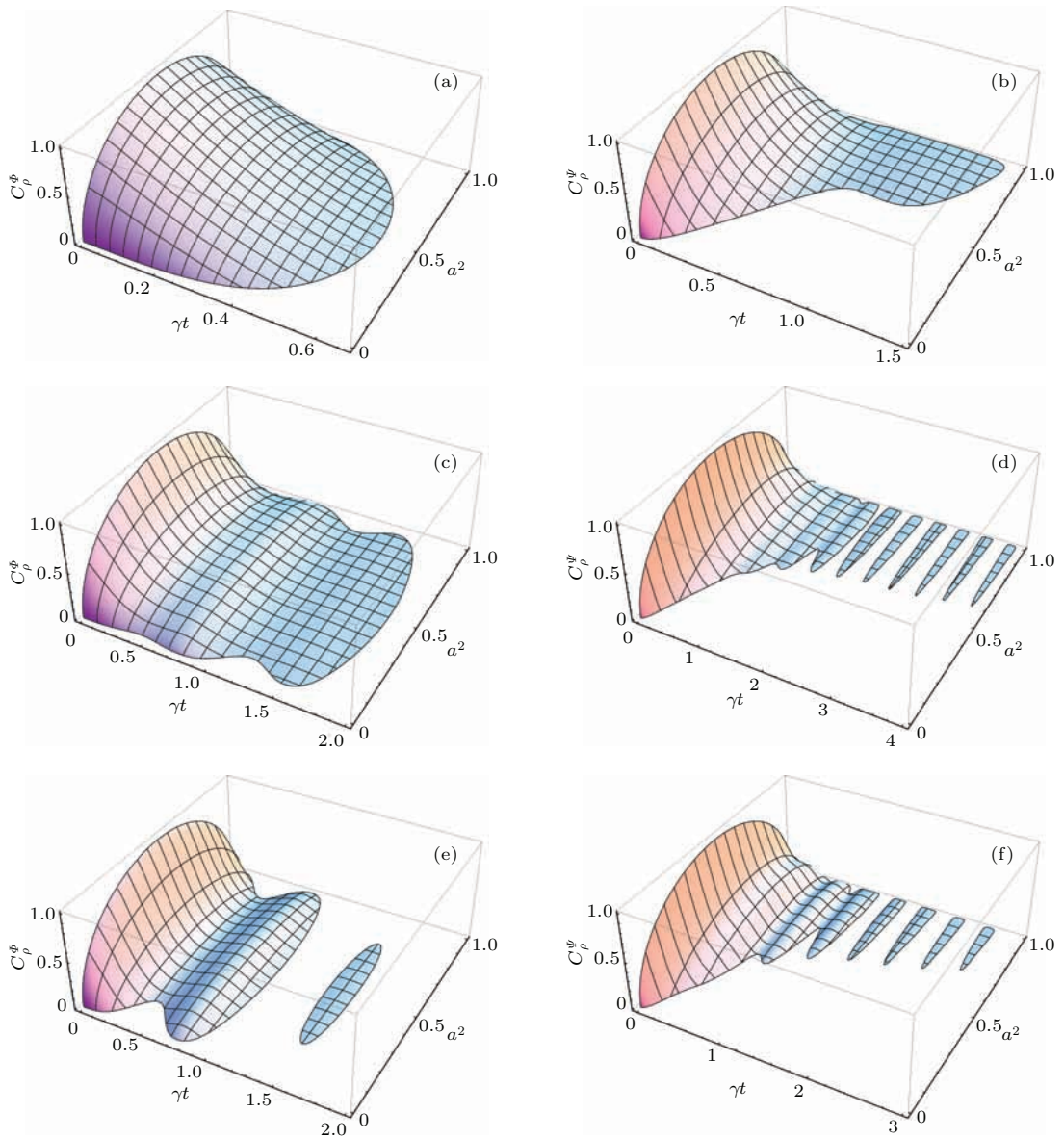


图 5 (网刊彩色) 系统初态对共生纠缠度 C_ρ^Φ , C_ρ^Ψ 演化的影响 (a) $|\Lambda_\gamma| = 1, f_\gamma = 1/2, n = 0$; (b) $|\Lambda_\gamma| = 4, f_\gamma = 1/2, n = 0$; (c) $|\Lambda_\gamma| = 4, f_\gamma = 1, n = 0$
 Fig. 5. (color online) The impacts of initial state on the dynamic evolution of C_ρ^Φ, C_ρ^Ψ : (a) $|\Lambda_\gamma| = 1, f_\gamma = 1/2, n = 0$; (b) $|\Lambda_\gamma| = 4, f_\gamma = 1/2, n = 0$; (c) $|\Lambda_\gamma| = 4, f_\gamma = 1, n = 0$.

象^[21]. 此外, 共生纠缠度的震荡频率与 $|\Lambda|$ 呈正相关, 且 $C_\rho^\Psi(t)$ 的震荡频率是 $C_\rho^\Phi(t)$ 的两倍. 在无外场存在的情况下, 共生纠缠度随着时间指数单调衰减, 适当条件下会出现ESD, 但不可能发生共生纠缠度的震荡及其ESB, 这说明外场会引起共生纠缠度演化过程中的震荡导致ESD及ESB现象, 当然其演化过程中具体的细节仍有待进一步的研究.

无外场存在时, 纠缠死亡现象的发生与系统的初态有着密不可分的关系, 为研究初态对共生纠缠度演化的影响, 将 $C_\rho^\Phi(t)$, $C_\rho^\Psi(t)$ 做图, 见图5.

容易看出 $C_\rho^\Phi(t)$ 关于 $a^2 = 1/2$ 轴对称的情况, 这是由于初态的不同所造成的 $|\Phi\rangle = a|01\rangle + b|10\rangle$ 且 $a^2 + |b|^2 = 1$, 即 a^2 , $|b|^2$ 关于 $1/2$ 处对称; $C_\rho^\Psi(t)$ 则呈现不对称的情况, $a^2 > 1/2$ 时其彻底退纠缠的时间长于 $a^2 < 1/2$ 时, 这是因为 $|\Psi\rangle = a|00\rangle + b|11\rangle$, 故 $a^2 > 1/2$ 时系统更小概率处于 $|11\rangle$, 因此原子的自发辐射受到一定的抑制, 使得纠缠维持了更长时间. 此外, 我们同样发现随着 f 或 Λ 的增大出现共生纠缠度震荡和纠缠复活现象.

对于环境温度即平均光子数 n 对共生纠缠度演化的影响, 绘图也进行研究, 然而研究结果显示随着 $C_\rho^\Phi(t)$, $C_\rho^\Psi(t)$ 都与 n 呈反相关, 随着 n 的增大系统会更快地退纠缠, 这与无外场时的一般情况^[5]并无太大区别, 故本文不再进行分析.

6 结 论

本文首先概括介绍了约化密度算符主方程的两类主要解法, 进而介绍Ket-Bra纠缠态方法; 与超算符方法相比, Ket-Bra纠缠态方法应用范围广、求解过程清晰、方便计算机编程实现、能兼容成熟的薛定谔方程解法. 我们用Ket-Bra纠缠态方法求解含时外场中与热库耦合的二能级qubit的主方程, 并在研究了其退相干过程; 随后进一步考虑两个无耦合qubit的情况, 研究了模型的共生纠缠度演化过程. 研究结果显示, 在合适的外场场强 f 与频率 Λ 的作用下, 共生纠缠度的演化过程出现了周期性震荡, 且对于不同初态其振荡周期并不一致, 此外还观察到了纠缠复活现象, 这是无外场情况下所没有的. 对此模型的研究结果显示即使系统间不

存在任何相互作用, 系统仍有可能出现纠缠复活的现象, 这是以前所没有发现的. 鉴于此, 我们认为外场能够有效影响系统的相干、纠缠演化等过程, 人们有希望进一步通过施加外场来对量子系统的演化进行调控, 从而抑制退相干和退纠缠过程, 推进量子通信技术和量子计算机的研究.

参考文献

- [1] Ji Y H, Hu J J, Hu Y 2012 *Chin. Phys. B* **21** 110304
- [2] Ji Y H, Liu Y M, Wang Z S 2011 *Chin. Phys. B* **20** 070304
- [3] Chatuverdi S, Srinivassan V 1991 *J. Mod. Opt.* **38** 777
- [4] Aréalo-Aguilar L M, Moya-Cessa H 1998 *Journal of the European Optical Society Part B* **10** 671
- [5] Ren Y C, Fan H Y 2015 *International Journal of Theoretical Physics* **55** 2089
- [6] Ren Y C, Fan H Y 2015 *arXiv preprint arXiv: 1509.01001*
- [7] Wootters W K 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2245
- [8] Yu T, Eberly J H 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 140404
- [9] Yu T, Eberly J H 2009 *Science* **323** 598
- [10] Xu X B, Liu J M, Yu P F 2008 *Chin. Phys. B* **17** 456
- [11] Carmichael, Howard J 2014 *Statistical Methods in Quantum Optics 1: Master Equations and Fokker-Planck Equations* (Springer Press) pp29–42
- [12] Lu H X, Yang J, Zhang Y D, et al. 2003 *Phys. Rev. A* **67** 024101
- [13] Wang S J, Cao J M, Weiguny A 1989 *Phys. Rev. A* **40** 1225
- [14] Song J, Fan H Y, Zhou J 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 110302 (in Chinese) [宋军, 范洪义, 周军 2011 物理学报 **60** 110302]
- [15] Fan H Y, Li X C 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 77 (in Chinese) [范洪义, 李学超 2012 物理学报 **61** 77]
- [16] Fan H Y, Hu L Y 2010 *The Thermal Entanglement Entangled-State Representation of Open Quantum System* (Shanghai: Shanghai Jiao Tong University Press) pp114–160 (in Chinese) [范洪义, 胡利云 2010 开放量子系统退相干的纠缠态表象论 (上海: 上海交通大学出版社) 第114页—160页]
- [17] Cong S 2014 *Control of Quantum Systems: Theory and Methods* (Wiley Press) pp73–96
- [18] Viola L, Lloyd S 1998 *Phys. Rev. A* **58** 2733
- [19] Viola L, Knill E, Lloyd S 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 2417
- [20] Yu T, Eberly J H 2009 *Science* **323** 5914
- [21] Kowalewska-Kudłaszuk A, Leoński W 2010 *Physica Scripta* **T140** 014051

Solving the qubit coupled with reservoir under time-varying external field with Ket-Bra entangled state method*

Ren Yi-Chong^{1)†} Fan Hong-Yi¹⁾²⁾

1) (University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

2) (Department of Physics and Astronomy, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

(Received 30 November 2015; revised manuscript received 29 February 2016)

Abstract

In this paper, we first make a brief review of the general method of solving master equation of density operator, which includes the C -number method method and the super-operator method. The C -number can transform quantum master equation into Fokker-Plank equation or the differential equation of density matrix elements, and this method has a wide applicable range but the Fokker-Plank equation and differential equation are difficult to solve. Besides, the solution is not always applicable for any initial condition. The super-operator method can solve master equation efficiently compared with C -number method, however the solving process of super-operator method mostly depends on the characteristics of Lie algebra. For instance, if the corresponding Lindblad operator can be divided into the generators of $Su(2)$ or $Su(1,1)$ Lie group, the super-operator is no longer applicable. Thus although super-operator is more efficiently than C -number method, it has a narrow applicable range. Furthermore, other researchers have made much effort to develop super-operator method, for instance, S.J. Wang proposed the left and right action operator, the left operator is the same as the general operator, while the right action operator from the right side acts on other general operator, thus the explicit formation of super-operator can be given by this method. Fan proposed the thermal entangled state representation which can convert operator between real mode and fictitious mode. All these developments depend on Lie algebra, thus they all have a narrow applicable range just like super-operator method.

We introduce a new Ket-Bra entangled state (KBES) method in this paper, which can transform master equation into Schrodinger-like equation with the corresponding Ket-Bra entangled state. Then one can use the method of Schrodinger equation such as time evolution method, perturbation method, etc. to solve the master equation. Compared with C -number method and super-operator method, the KBES method has several merits. 1) A wide applicable range, KBES method is applicable for any master equation of finite-level system in theory. 2) Compatibility with computer programming, the most crucial procedure is to calculate the exponent of Lindblad operator $e^{\mathcal{F}t}$ which needs the diagonalization of \mathcal{F} , and all this can be finished by computer. 3) Most mature methods of Schrodinger equation can be used to solve master equation because of the KBES method can transform master equation into Schrodinger-like equation.

Then we study the model which two-level qubit is coupled with reservoir under time-varying external field, the corresponding master equation is deduced and solved by KBES method. Furthermore, we analyze the decoherence evolution of density operator and we consider the entanglement evolutions of two uncoupled qubit cases. We find that the external field seriously influences the decoherence process. The off-diagonal elements $\rho_{10}(t)$ become dampedly oscillated when the external field exists, and the frequency of oscillate keeps growing along with A_γ . Besides, the dynamic evolution of concurrence is also influenced by the external field, which leads to the occurrence of both entanglement sudden death and entanglement sudden birth, while the last ESB phenomenon only happens under the external field. Thus, we thought that one can suppress the decoherence and disentanglement process by exerting suitable time-varying external field on the open system, of course, the suitable external field can also be obtained by our KBES method in theory.

Keywords: KBES method, decoherence, master equation

PACS: 03.65.Yz, 42.50.Lc, 03.65.Aa

DOI: 10.7498/aps.65.110301

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11574295).

† Corresponding author. E-mail: rych@mail.ustc.edu.cn