

改进的保群算法及其在混沌系统中的应用

陆见光 唐卷 秦小林 冯勇

Modified group preserving methods and applications in chaotic systems

Lu Jian-Guang Tang Juan Qin Xiao-Lin Feng Yong

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 110501 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.110501

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.110501>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I11>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于原对偶状态转移算法的分数阶多涡卷混沌系统辨识

Parameter identification for fractional-order multi-scroll chaotic systems based on original dual-state transition algorithm

物理学报.2016, 65(6): 060503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.060503>

半导体激光器混沌法拉第效应控制方法

Control of chaos in a semiconductor laser using the Faraday effect

物理学报.2015, 64(24): 240505 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.240505>

冠状动脉系统高阶滑模自适应混沌同步设计

Chaos synchronization of coronary artery system based on higher order sliding mode adaptive control

物理学报.2015, 64(21): 210508 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.210508>

一种基于强跟踪滤波的混沌保密通信方法

A method of chaotic secure communication based on strong tracking filter

物理学报.2015, 64(14): 140501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.140501>

基于哈密顿函数的永磁同步电机混沌系统鲁棒控制

Robust control for permanent magnet synchronous motors based on Hamiltonian function

物理学报.2015, 64(9): 090503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.090503>

改进的保群算法及其在混沌系统中的应用*

陆见光¹⁾³⁾ 唐卷^{1)3)†} 秦小林¹⁾ 冯勇²⁾

1)(中国科学院成都计算机应用研究所, 成都 610041)

2)(中国科学院重庆绿色智能技术研究院, 自动推理与认知重庆市重点实验室, 重庆 400714)

3)(中国科学院大学, 北京 100049)

(2016年1月16日收到; 2016年3月21日收到修改稿)

混沌系统的跟踪控制是近年来非线性控制领域研究的热点之一. 本文提出了一种基于快速下降控制方法的保群算法, 此方法使受控混沌系统能够快速稳定到相空间的一个不动点; 另外提出一种基于滑模控制方法的保群算法, 此方法使受控混沌系统能够快速跟踪一个确定的运动轨迹. 应用这两种新方法分别对两个经典的混沌系统(Lorenz系统和Duffing系统)进行了相应的数值实验, 实验结果表明这两种方法都具有较高的精度和稳定性.

关键词: 混沌跟踪控制, 保群算法, Lorenz系统, Duffing系统

PACS: 05.45.Gg, 05.45.-a, 05.45.Ac, 05.45.Pq

DOI: 10.7498/aps.65.110501

1 引言

混沌是非线性确定性动力系统中呈现出具有内在随机性和长期预测不可能性的运动形态, 它广泛存在于自然界. 自从1963年Lorenz在三维自治系统中发现第一个混沌吸引子以来, 人们不断地发现新的混沌系统, 如Chen系统^[1]和Lü系统^[2]. 由于不良的混沌会导致系统性能下降甚至失控. 例如: 高能粒子加速器中的混沌会造成束流损失; 磁约束核聚变装置中的混沌会造成等离子体的泄漏; 核电站循环水系统中的混沌会发生有害回流. 因此, 研究有效的混沌控制方法, 使系统从混沌状态转入期望的不动点或者稳定的周期轨道, 达到抑制或者消除混沌的目的具有重要的现实意义^[3,4].

混沌系统的控制问题从过去几十年到现在一直得到广泛的研究. 为了使混沌系统跟踪指定目标, 到目前为止已有多种方法, 如时间最优控制法^[5]、切比雪夫级数展开方法^[6,7]、伪谱法^[8]、半正交样条小波方法^[9]、自适应动态规划算法^[10,11]、机

器学习方法^[12]等. 以上所有的方法都需要解决一个非常复杂的非线性代数方程组. 为了克服这个困难, 文献^[13,14]利用了李群方法来求解混沌系统的最优化控制问题, 其中目标函数是一个需要最小化的性能指标, 混沌系统的控制方程为主要约束条件. 除了传统的基于性能指标的控制理论, Utkin提出了一种滑模控制的方法^[15,16], 此方法为混沌系统提供了一个强大的鲁棒控制机制^[17,18]. 在早期的方法中, 为了保持轨迹在规定的滑动面上, 并最终使得轨迹沿着滑动面趋向平衡点, 无限频率控制开关是必须的. 然而, 实际上由于动力系统数值离散化误差、信号噪声和结构不稳定性等原因, 系统状态并不一定能够保证在设计滑动面上. 控制器的快速切换操作使得系统产生高频率的震荡. 这种震荡称为抖振现象. 抖振是滑膜控制法最大的缺陷, 因为它不仅影响系统的精确性, 增加能量消耗, 而且可能破坏控制器件和系统性能, 甚至引起整个系统的不稳定. 目前国内外发展了不少克服这个缺陷的方法^[19-24].

保群算法最早由Liu提出^[25,26], 此方法将非线

* 国家重点基础研究发展计划(批准号: 2011CB302402)和国家自然科学基金(批准号: 61402537, 91118001)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: tangjuan0822@gmail.com

性动力学方程转化成Minkowski空间上的李型方程,而且自然呈现一个零锥结构,也就是显现出了原非线性系统在Minkowski空间的内在对称群性质.增广动力学系统的空间形式具有很重要的性质,对动力学系统的数值研究具有指导意义.由于该空间形式的数值方法既能近似原动力系统,又能在每步迭代中保持原系统的定性性质和不变量,如模守恒和能量守恒.因而,保群方法比传统数值方法更加精确、稳定和有效.

鉴于上述,为了消除抖振,本文主要从两个不同角度对混沌系统的控制进行研究.一个是根据最优控制理论,提出了一种基于快速下降控制方法的保群算法.该算法的目的是使受控混沌系统能够快速收敛到相空间的某一个不动点.该方法首先直接指定一个时间衰减的拉格朗日函数,将非线性系统的最优控制问题转化为一个微分代数系统.然后利用改进的保群算法来求解这个微分代数方程.另外一个是根据滑膜控制理论,提出了一种基于滑膜控制方法的保群算法,此方法目的是使受控混沌系统能够跟踪某一确定的运动轨迹.上面两种方法都是通过增加一个辅助控制器将混沌系统的跟踪控制问题转化为一组微分代数方程来求解.最后应用这两种新方法分别对Lorenz混沌系统和Duffing混沌系统进行了相应的数值实验,实验结果表明这两种方法都具有较高的精度和稳定性.

2 方 法

本文考虑如下状态方程描述的非线性系统:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u, t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq t_f, \quad (1)$$

其中 $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为非线性函数, \mathbf{x} 为系统状态, u 为控制函数, t_f 为终点时刻.对于该系统,控制理论中的一个重要问题是如何施加控制力 u 使得系统状态 \mathbf{x} 能够快速地跟踪一个确定的运动轨迹或者稳定到一个固定值^[27,28].

2.1 快速下降控制方法

在最优化控制理论中,为了在各种可行的控制率中找出一种效果最好的控制,需要建立一种评价控制效果好坏的性能指标函数^[29].对于非线性系统(1),要求出控制力 $u(t)$ 使得下面的综合型性能指标 $J(u)$ 最小,即

$$\min \left\{ J(u) = \Phi(\mathbf{x}(t_f)) + \int_0^{t_f} L(\mathbf{x}(t), u(t), t) dt \right\}. \quad (2)$$

其中 L 为拉格朗日函数.

在实际控制问题中,由于大多数控制量受到客观条件的限制, $u(t)$ 只能取一定范围的值,即

$$|u(t)| \leq m, \quad t \in [0, t_f]. \quad (3)$$

对于方程(2),可以将拉格朗日函数 $L(\mathbf{x}(t), u(t), t)$ 中的控制力 $u(t)$ 分离出来,即

$$\min \left\{ J(u) = \Phi(\mathbf{x}(t_f)) + \int_0^{t_f} [L_1(\mathbf{x}(t), t) + u^2(t)] dt \right\}. \quad (4)$$

这里设计一个合适的优化函数

$$L_1(\mathbf{x}, t) = A_0 \exp(-\alpha t), \quad (5)$$

其中 $A_0 > 0$ 和 $\alpha > 0$ 是给定的常数.从而可以得到

$$\begin{aligned} \int_0^{t_f} L_1(\mathbf{x}, t) dt &= \int_0^{t_f} A_0 \exp(-\alpha t) dt \\ &= \frac{A_0}{\alpha} [1 - \exp(-\alpha t_f)] \\ &< \frac{A_0}{\alpha}. \end{aligned} \quad (6)$$

因此选择适当的 m, A_0 和 α , 由(3), (4) 和(6)式,可得

$$\Phi(\mathbf{x}(t_f)) + t_f m^2 + \int_0^{t_f} A_0 \exp(-\alpha t) dt \leq \min\{J\}. \quad (7)$$

也就是说,如果从方程(5)中求出控制力并满足不等式(3),就可以找到比(2)式更小的性能指标.由方程(1)和(5)得到如下关于 \mathbf{x} 和 u 的微分代数系统:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u, t), \\ F(\mathbf{x}, t) = L_1(\mathbf{x}, t) - A_0 \exp(-\alpha t) = 0, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \\ 0 \leq t \leq t_f, \quad u \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (8)$$

其中 $A_0 = L_1(\mathbf{x}_0, 0)$.通过方程(8)设计的控制器使得拉格朗日函数能够与 $\exp(-\alpha t)$ 递减的速度一样快.但是在一般情况下, α 的值不能取太大,否则控制力 u 在(3)的范围内无解.这种将方程(1)和(2)转化成求解微分代数方程(8)的方法称为快速下降控制方法^[14].

2.2 基于快速下降控制方法的保群算法

现在考虑微分代数系统(8), 为了使该系统状态 \mathbf{x} 快速收敛到某个固定点 (不妨假设为原点), 令

$$L_1(\mathbf{x}, t) = \|\mathbf{x}\|^2, \quad (9)$$

从而该微分代数方程变为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u, t), \quad (10)$$

$$\|\mathbf{x}\|^2 = A_0 \exp(-\alpha t). \quad (11)$$

将方程(11)对 t 求导, 结合方程(10)得

$$2\mathbf{x}^T \mathbf{f} = -A_0 \alpha e^{-\alpha t}. \quad (12)$$

再将上式对 t 求导, 化简得

$$\dot{u} = \left(\mathbf{x}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}\right)^{-1} \left(\frac{1}{2} A_0 \alpha^2 e^{-\alpha t} - \mathbf{f}^T \mathbf{f} - \mathbf{x}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} - \mathbf{x}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\right). \quad (13)$$

从而由方程(10)和(11)组成的微分代数系统变成

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u, t), \\ \dot{u} = \left(\mathbf{x}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}\right)^{-1} \left(\frac{1}{2} A_0 \alpha^2 e^{-\alpha t} - \mathbf{f}^T \mathbf{f} - \mathbf{x}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} - \mathbf{x}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\right), \\ \|\mathbf{x}\|^2 = A_0 \exp(-\alpha t). \end{cases} \quad (14)$$

令

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathcal{G}_{12} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{G}_{12} &= \left(\mathbf{x}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}\right)^{-1} \left(\frac{1}{2} A_0 \alpha^2 e^{-\alpha t} - \mathbf{f}^T \mathbf{f} - \mathbf{x}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} - \mathbf{x}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\right), \\ F &= \|\mathbf{x}\|^2 - A_0 \exp(-\alpha t), \end{aligned} \quad (15)$$

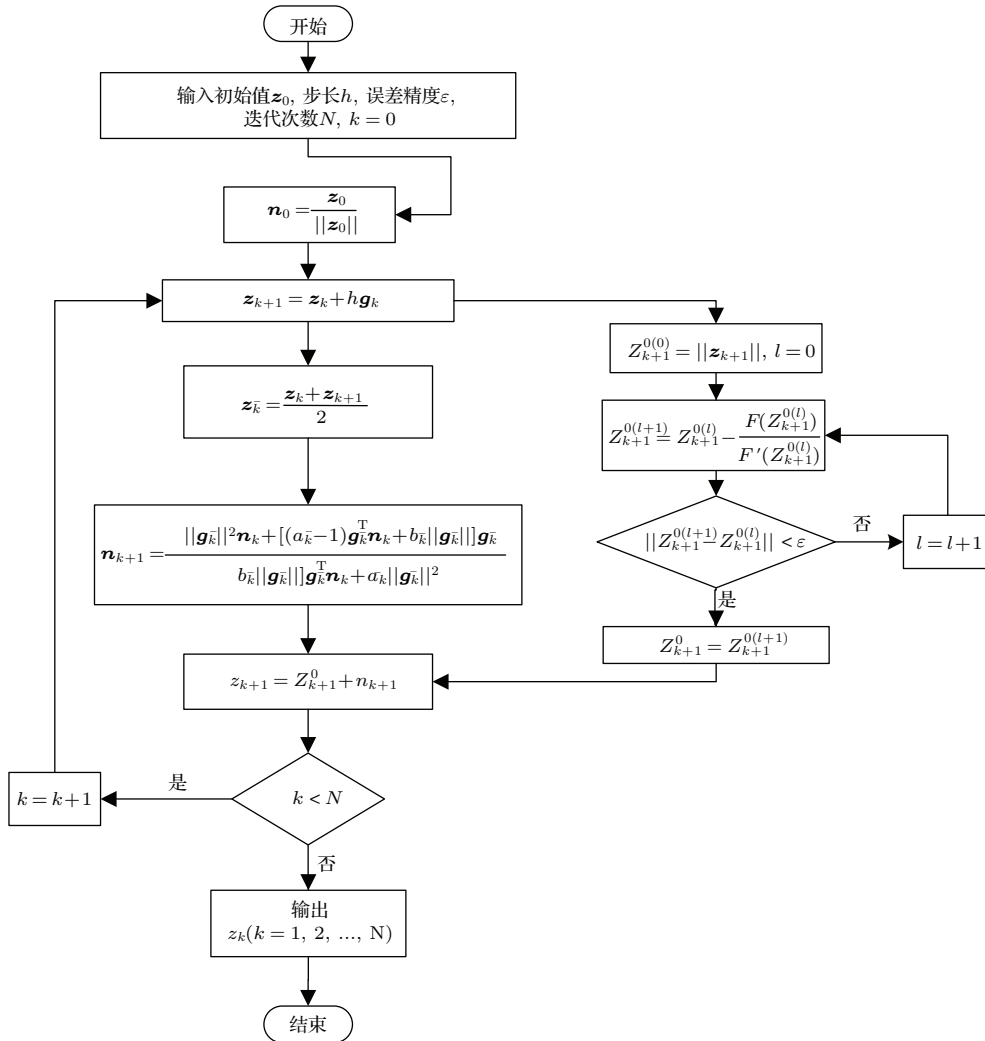


图1 改进的保群算法框图

Fig. 1. The flow chart of the modified group preserving scheme.

则方程组(14)变为如下的一般形式:

$$\begin{cases} \dot{z} = g(z, t), \\ F(z, t) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

针对该一般形式的方程组,可以采用改进的保群算法来求解,具体步骤如下(流程图见图1).

步骤1 给定初始值 z_0 和步长 h .

步骤2 计算单位向量 $n_0 = z_0 / \|z_0\|$.

步骤3 分别取 $k = 0, 1, \dots$, 用欧拉方法算出 $z_{k+1} = z_k + hg_k$, 其中 $g_k := g(z_k, t_k)$. 依次计算 $t_{\bar{k}} = t_k + 1/2h$, $z_{\bar{k}} = (z_k + z_{k+1})/2$, $g_{\bar{k}} = g(z_{\bar{k}}, t_{\bar{k}})$, $a_{\bar{k}} := \cosh\left(\frac{h\|g_{\bar{k}}\|}{\|z_{\bar{k}}\|}\right)$, $b_{\bar{k}} := \sinh\left(\frac{h\|g_{\bar{k}}\|}{\|z_{\bar{k}}\|}\right)$ 和

$$n_{k+1} = \frac{\|g_{\bar{k}}\|^2 n_k + [(a_{\bar{k}} - 1)g_{\bar{k}}^T n_k + b_{\bar{k}}\|g_{\bar{k}}\|]g_{\bar{k}}}{b_{\bar{k}}\|g_{\bar{k}}\|g_{\bar{k}}^T n_k + a_{\bar{k}}\|g_{\bar{k}}\|^2}.$$

步骤4 计算 $Z_{k+1}^{0(0)} = \|z_{k+1}\|$.

步骤5 分别取 $l = 0, 1, \dots$, 计算 $Z_{k+1}^{0(l+1)} = Z_{k+1}^{0(l)} - \frac{F(Z_{k+1}^{0(l)})}{F'(Z_{k+1}^{0(l)})}$, 直到满足 $\|Z_{k+1}^{0(l+1)} - Z_{k+1}^{0(l)}\| < \varepsilon$, 令 $Z_{k+1}^0 = Z_{k+1}^{0(l+1)}$.

步骤6 计算 $z_{k+1} = Z_{k+1}^0 n_{k+1}$.

在上面的算法中, z 中的分量 u 必须满足不等式(3). 因此算法中 u 可以取成下面饱和函数 $\text{sat}(u)$ 的值:

$$\text{sat}(u) = \begin{cases} u, & |u| \leq m, \\ \text{sign}(u)m, & |u| > m, \end{cases} \quad (17)$$

其中 sign 为符号函数.

2.3 滑膜控制方法

滑膜控制也叫变结构控制,它适用于连续或者离散系统、线性或非线性系统、确定性或非确定系统等.该控制方法的基本原理是通过一定的控制策略让控制量不断地切换,迫使系统进入预先设定的滑膜面上滑动;具体过程见图2,其中 $s(x)$ 是滑膜切换函数, $s(x) = 0$ 是滑膜面.系统一旦进入滑膜状态,系统参数扰动与外部干扰对系统就不起作用.正因为这种特性,滑膜控制在各个领域得到广泛的应用.

由于滑膜控制具有系统不断变化的开关特性,当状态轨迹到达滑膜面后,系统难以严格沿着滑膜面向平衡点滑动,而是在其两侧来回穿越地趋近平衡点.正是由于这种开关特性,系统产生了抖振现象.虽然已有大量的方法研究了抖振问题,但没有

统一的解决方案.因此,多个控制方法相结合已成为了重要的研究方向.下文提出了滑膜控制方法和保群算法相结合的方法.

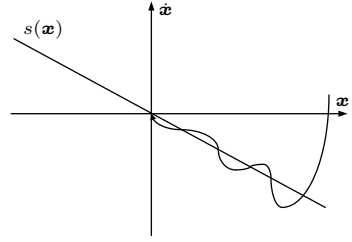


图2 滑膜运动状态示意图

Fig. 2. The diagram of sliding mode motion.

2.4 基于滑膜控制方法的保群算法

滑膜控制的基本思想是针对非线性系统(1),在状态空间中寻找一个合适的超曲面

$$s(x) = 0, \quad (18)$$

使得系统状态 x 的轨迹落在这个曲面上.上式对 t 求导得

$$\frac{\partial s}{\partial x} \cdot \dot{x} = 0. \quad (19)$$

如果方程(19)存在解 u^* ,那么将等效控制力 $u_{\text{eq}} = u^*(x, t)$ 代入方程(1),可以得到如下等价控制系统

$$\dot{x} = f(x, u^*, t). \quad (20)$$

选取适宜的超曲面,考虑如下非线性控制系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t) + ug(x), \\ s(x) = c \cdot (x - x_d) - A_0 \exp(-\alpha t) = 0, \end{cases} \quad (21)$$

其中 c 是给定的常数向量, x_d 是状态空间中的需要跟踪的轨迹.对于上面的系统,基于滑膜控制的保群算法步骤如下.

步骤1 给定一个常数向量 c , 求出等效控制力

$$u_{\text{eq}} = \frac{c \cdot \dot{x}_d - A_0 \alpha \exp(-\alpha t) - c \cdot f}{c \cdot g}. \quad (22)$$

步骤2 导出下面的微分代数方程:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t) + u_{\text{eq}}g(x), \\ s(x) = c \cdot (x - x_d) - A_0 \exp(-\alpha t) = 0, \end{cases} \quad (23)$$

其中 u_{eq} 是等效控制力,且满足 $|u_{\text{eq}}| \leq m$.

步骤3 给定步长 h , 控制误差 ε , 用改进的保群算法求解上面的微分代数方程,其中 u_{eq} 还需根据(17)式来确定.

值得注意的是, 若该算法 (23) 中的滑模切换函数 $s(\mathbf{x})$ 取成文献 [14] 中的切换函数 $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_d)$, 则实验结果可能会出现抖振现象, 原因在于系统 (23) 的不稳定性. 因而此方法中滑模面的选择非常重要. 另外, 与文献 [14] 相比, 本文算法中取的滑模面虽然表面复杂, 但不会增加补偿控制力的求解, 因而算法相对简单一些.

3 数值实验

实验平台为 win7\matlab2014b, 计算机配置为 Intel(R) Core(TM) i3-3240 CPU@3.40 GHz, 4.00 GB RAM, 64 位操作系统.

3.1 Lorenz 系统跟踪控制的数值实验

美国气象学家 Lorenz 提出了用来描述热对流不稳定性的 Lorenz 模型 [30], 如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = ax_2(t) - ax_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = rx_1(t) - x_2(t) - x_1(t)x_3(t) + u(t), \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t)x_2(t) - bx_3(t). \end{cases} \quad (24)$$

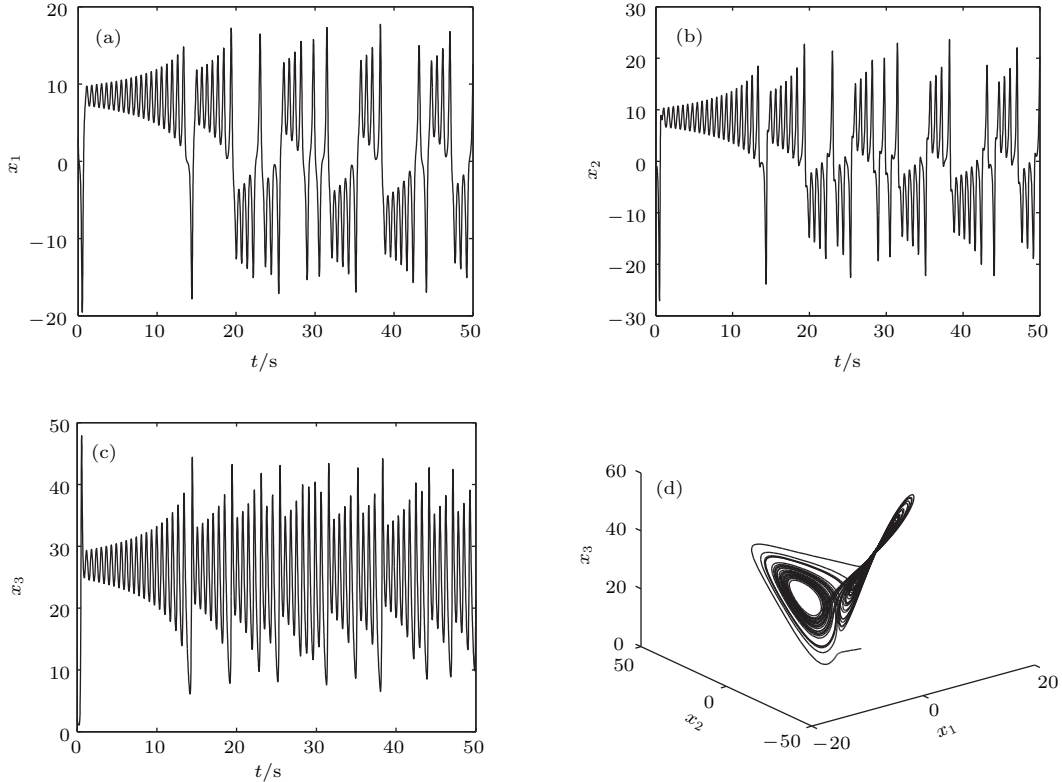


图3 无控制力作用下的 Lorenz 系统状态图和系统相图 (a) 系统状态 x_1 ; (b) 系统状态 x_2 ; (c) 系统状态 x_3 ; (d) 系统相图
Fig. 3. The state diagram and phase diagram of Lorenz system without control force: (a) The state x_1 ; (b) the state x_2 ; (c) the state x_3 ; (d) phase diagram of Lorenz system.

若取参数 $a=10, b=8/3, r=28$ 和 $u(t)=0$, Lorenz 系统处于混沌运动状态, 见图 3. 需要解决的问题是, 设计一个控制器, 使得初始点 $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (3, -4, 2)$ 能够尽快到达原点.

我们令 $L_1 = x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t) = A_0 \exp(-\alpha t)$, $A_0 = x_1^2(0) + x_2^2(0) + x_3^2(0)$, α 分别取 2, 5 和 7, 保群算法中的参数 $h = 0.0001$, 且控制力满足 $|u(t)| \leq 100$. 采用基于快速下降控制方法的保群算法来求解上述问题, 得到数值结果见图 4.

从图 4(a)–(c) 中可以看出, x_1, x_2 和 x_3 能快速地收敛到 0; 当 α 越大, 系统状态收敛到 0 的速度越快. 但 α 不能太大 ($\alpha < 8$), 否则控制力在有界的范围内无解. 从图 4(d) 中可以看出, u 不仅在控制的范围之内, 而且没有抖振现象. 与文献 [31] 中用的方法比较, 我们的方法简单且控制力没有产生抖振现象.

3.2 Duffing 系统跟踪控制的数值实验

Duffing 方程是经典的二维连续非线性系统 [30], 该方程的一般形式是

$$\ddot{x} + p_1 \dot{x} + p_2 x + p_3 x^3 - u(t) = q \cos(\omega t), \quad (25)$$

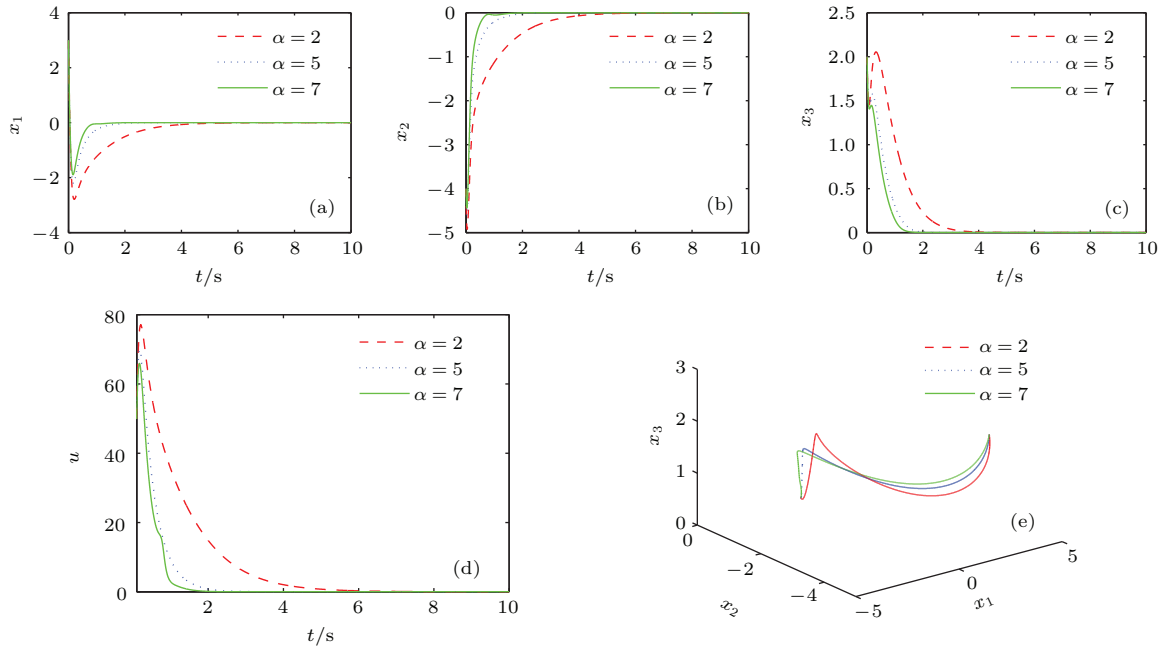


图4 有控制力作用下的 Lorenz 系统状态图和系统相图 (a) 系统状态 x_1 ; (b) 系统状态 x_2 ; (c) 系统状态 x_3 ; (d) 控制力 u ; (e) 系统相图
 Fig. 4. The state diagram and phase diagram of Lorenz system with control force: (a) The state x_1 ; (b) the state x_2 ; (c) the state x_3 ; (d) the control force u ; (e) phase diagram of Lorenz system.

其中 p_1 是阻尼系数, $q \cos(\omega t)$ 是系统外力项, ω 是外力项频率, $u(t)$ 为控制力, $p_1, p_2, q > 0, p_2 < 0$. 为了便于对系统进行分析, 将系统描述如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = u(t) - p_2 x_1(t) - p_1 x_2(t) \\ \quad - p_3 x_1^3(t) + q \cos(\omega t). \end{cases} \quad (26)$$

其中 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$. 系统 (26) 的参数取值如下: $p_1 = 0.4, p_2 = -1.1, p_3 = 1, \omega = 1.8, q = 1.8$, 且 $u(t) = 0$, 此时系统 (26) 处于混沌状态, 见图 5. 需要解决的问题是, 设计一个控制器, 使得系统状态 x 跟踪的轨迹为 $x_d(t) = \sin t$ 在 $t \in (0, 20)$ 的图像.

我们令初始值 $(x_1(0), x_2(0)) = (1, 2)$, 注意初始值不在相平面 (x_d, \dot{x}_d) 上, 从而滑模面取为

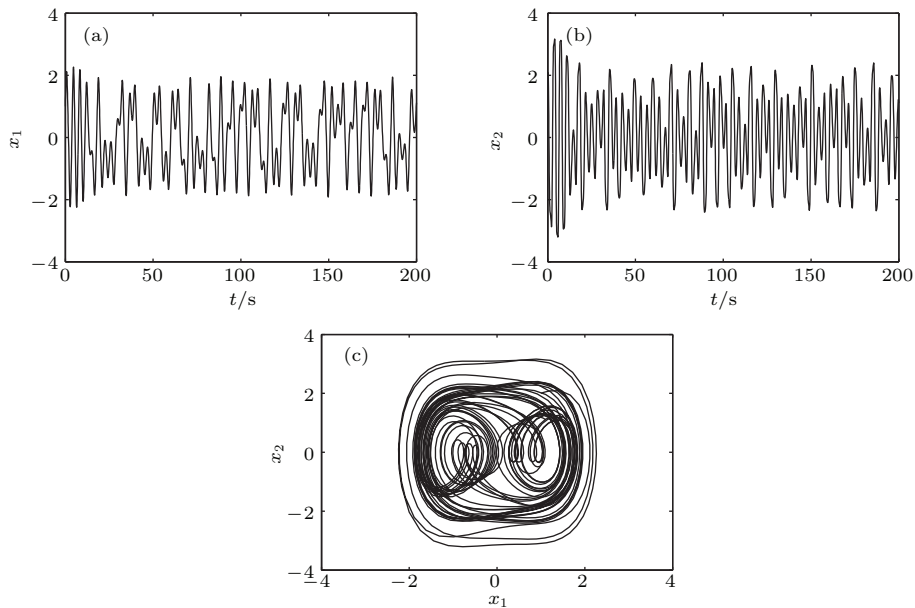


图5 无控制力作用下的 Duffing 系统状态图和系统相图 (a) 系统状态 x_1 ; (b) 系统状态 x_2 ; (c) 系统相图
 Fig. 5. The state diagram and phase diagram of Duffing system without control force: (a) The state x_1 ; (b) the state x_2 ; (c) phase diagram of Duffing system.

$s = x + \dot{x} - x_d(t) - \dot{x}_d(t) - 2\exp(-5t) = 0$, 保群算法中的参数 $h = 0.001$, $\varepsilon = 10^{-12}$, 且控制力满足 $|u(t)| \leq 10$. 采用基于滑模控制方法的保群算法来求解上述问题, 得到数值结果 (见图 6).

从图 6(a) 和图 6(b) 中可以看出 $x(t)$ 能够快速跟踪一个确定的目标轨迹; 在大约 2.5 s 之后, $x(t)$ 和需要跟踪的轨迹 x_d 基本上保持一致. 从图 6(d) 中可以看到相图趋近于一个圆, 正好与相

平面 (x_d, \dot{x}_d) 的轨迹一致. 同时控制力有界且没有抖振现象 (见图 6(c)).

在相同参数下, 与文献 [14] 中达到目标轨迹所需要的时间接近 4 s 相比, 本文方法的跟踪速度更快, 其原因在于本文设计的滑模面增加了一个递减速率很快的函数 $2\exp(-5t)$, 并且改进的保群算法能够保证系统状态沿着滑模面跟踪目标轨迹.

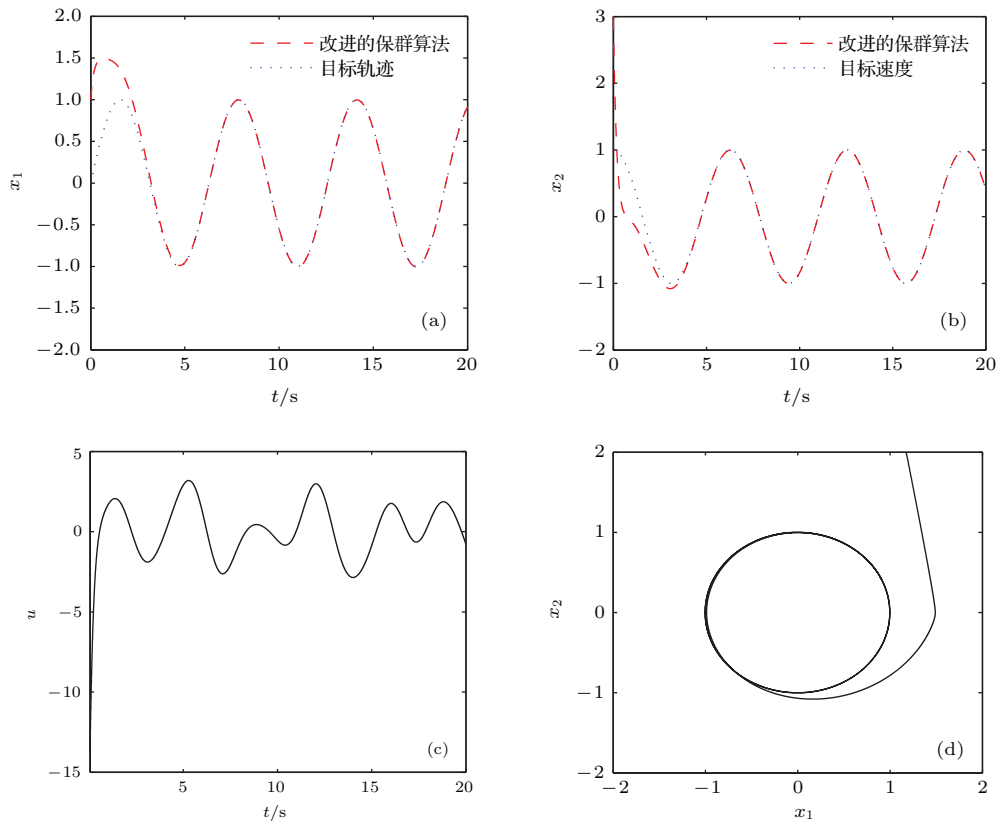


图 6 有控制力作用下的 Duffing 系统状态图和系统相图 (a) 系统状态 x_1 ; (b) 系统状态 x_2 ; (c) 控制力 u ; (d) 系统相图

Fig. 6. The state diagram and phase diagram of Duffing system with control force: (a) The state x_1 ; (b) the state x_2 ; (c) the control force u ; (d) phase diagram of Duffing system.

4 结 论

传统的混沌控制方法最大的问题是出现抖振现象. 本文提出的基于快速下降控制方法的保群算法和基于滑模控制方法的保群算法, 不仅能够使混沌系统快速有效地跟踪某个点或轨迹, 更重要的是能够使得要求的控制力有界且无抖振现象. 这两种算法是传统控制算法和李群算法相结合的方法, 首先通过适当地设计一个不变流形, 将系统转化成微分代数方程, 然后利用保群算法求出有效的控制力, 使得系统状态快速地沿着这个流形收敛到不动

点或者跟踪确定的轨迹, 从而很好地解决了传统方法中的抖振问题. 本文应用这两种新方法分别对两个经典的 Lorenz 和 Duffing 混沌系统进行了相应的数值实验, 均达到了较好的控制效果. 由于这两种方法不仅具有控制速度快、控制量小和没有抖振现象的优点, 且不受系统维数的限制, 因而未来可以进一步考虑将改进的保群算法应用到含有复杂多卷波吸引子的混沌系统 [32,33].

参考文献

[1] Chen G R, Ueta T 1999 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **9** 1465

- [2] Lü J H, Chen G R 2002 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **12** 659
- [3] Zhang H G, Wang Z L, Huang W 2008 *Control Theory of Chaotic Systems* (Vol. 1) (Shenyang: Northeast University Press) pp1-4 (in Chinese) [张化光, 王智良, 黄伟 2008 混沌系统的控制理论 (沈阳: 东北大学出版社) 第 1—4 页]
- [4] Zhang X H, Shen J, Mei L, Wang D M 2011 *Syst. Eng. Elect.* **33** 603 (in Chinese) [张兴华, 沈捷, 梅磊, 王德明 2011 系统工程与电子技术 **33** 603]
- [5] Davies M J 1972 *J. Inst. Math. Appl.* **9** 357
- [6] Van D R, Vlassenbroeck J 1982 *J. Comput. Phys.* **47** 321
- [7] El-Kady M, Elbarbary E M E 2002 *Appl. Math. Comput.* **129** 171
- [8] Razzaghi M, Elnagar G 1994 *J. Comput. Appl. Math.* **56** 253
- [9] Lakestani M, Razzaghi M, Dehghan M 2006 *Phys. Scr.* **74** 362
- [10] Song R Z, Xiao W D, Sun C Y, Wei Q L 2013 *Chin. Phys. B* **22** 090502
- [11] Wei Q L, Liu D R, Xu Y C 2015 *Chin. Phys. B* **24** 030502
- [12] Wei Q L, Song R Z, Sun Q Y, Xiao W D 2015 *Chin. Phys. B* **24** 090504
- [13] Liu C S 2012 *CMES: Comput. Model. Eng. Sci.* **86** 171
- [14] Liu C S 2014 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **19** 2012
- [15] Utkin V I 1977 *IEEE Trans. Autom. Contr.* **22** 212
- [16] Utkin V I 1992 *Sliding Modes in Control and Optimization* (Vol. 1) (New York: Springer-Verlag) pp7-11
- [17] Slotine J J E, Sastry S S 1983 *Int. J. Control* **38** 465
- [18] Levant A 1993 *Int. J. Control* **58** 1247
- [19] Wong L K, Leung F H F, Tam P K S 1998 *Mechatronics* **8** 765
- [20] Lee H, Utkin V I 2007 *Ann. Rev. Control* **31** 179
- [21] Yang G L, Li H G 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7552 (in Chinese) [杨国良, 李惠光 2009 物理学报 **58** 7552]
- [22] Falahpoor M, Ataei M, Kiyoumars A 2009 *Chaos Solitons Fract.* **42** 1755
- [23] Qi L 2013 *Ph. D. Dissertation* (Shanghai: East China University of Science and Technology) (in Chinese) [齐亮 2013 博士学位论文 (上海: 华东理工大学)]
- [24] Dong K W, Zhang X 2007 *Electrotechnical Application* **2** 6 (in Chinese) [董克文, 张兴 2007 电气应用 **2** 6]
- [25] Liu C S 2001 *Int. J. Non-Linear Mech.* **36** 1047
- [26] Liu C S 2006 *CMES: Comput. Model. Eng. Sci.* **12** 83
- [27] Wu W G, Gu T X 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1922 (in Chinese) [伍维根, 古天祥 2000 物理学报 **49** 1922]
- [28] Cai G L, Tan Z M, Zhou W H, Tu W T 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6230 (in Chinese) [蔡国梁, 谭振梅, 周维怀, 涂文桃 2007 物理学报 **56** 6230]
- [29] Li G Y 2008 *Optimal Control Theory and Application* (Vol. 1) (Beijing: National Defence Industry Press) p4 (in Chinese) [李国勇 2008 最优化控制理论与应用 (北京: 国防工业出版社) 第 4 页]
- [30] Wang W 2009 *M. S. Dissertation* (Dalian: Dalian Jiaotong University) (in Chinese) [王文 2009 硕士学位论文 (大连: 大连交通大学)]
- [31] Roopaei M, Sahraei B R, Lin T C 2010 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **15** 4158
- [32] Shen C W, Yu S M, Lü J H, Chen G R 2014 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **61** 854
- [33] Shen C W, Yu S M, Lü J H, Chen G R 2014 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **61** 2380

Modified group preserving methods and applications in chaotic systems*

Lu Jian-Guang¹⁾³⁾ Tang Juan^{1)3)†} Qin Xiao-Lin¹⁾ Feng Yong²⁾

1) (*Laboratory of Automated Reasoning and Programming, Chengdu Institute of Computer Applications, Chinese Academy of Science, Chengdu 610041, China*)

2) (*Chongqing Key Laboratory of Automated Reasoning and Cognition, Chongqing Institute of Green and Intelligent Technology, Chinese Academy of Science, Chongqing 400714, China*)

3) (*University of Chinese Academy of Science, Beijing 100049, China*)

(Received 16 January 2016; revised manuscript received 21 March 2016)

Abstract

The tracking control of chaotic system has been one of the research focus areas of nonlinear control in recent years, in which the vital problem is to enable chaotic system to stabilize to an equilibrium point or to track a deterministic trajectory quickly. The conventional chaos control methods make the control power unnecessarily large and generate the phenomenon of chattering easily, resulting in the instabilities of the systems.

The problems above can be transformed into the solutions of differential algebraic equations effectively. Considering that the group preserving scheme not only approximates the original system, but also preserve as much as possible the geometric structure and invariants of the original system, this paper takes advantage of the group preserving method to study the control method in chaotic system from two different perspectives.

A new group preserving scheme based on the fast descending control method is presented, which enables chaotic system to stabilize to an equilibrium point quickly. Firstly, we introduce a novel approach to replace the optimal control problem of nonlinear system by directly specifying a time-decaying Lagrangian function, which helps us to transform the optimal control problem into a system of differential algebraic equations. Then we derive a modified group preserving scheme for the system.

Similarly, we propose a new group preserving scheme based on the sliding mode control method for chaotic system to track a deterministic trajectory quickly. Owing to numerical discretization errors, signal noises and structural uncertainties in dynamical systems, the conventional sliding mode control method cannot guarantee to maintain the trajectories on the sliding surface, unless the numerical integration method is designed to do so. On the other hand, the conventional sliding mode control method easily induces high frequency chattering of the control force. Therefore, we modify the conventional sliding mode control method and use the modified group preserving scheme to find the control force.

The above two methods are the combination of traditional control method and the Lie-group method. An invariant manifold is properly designed, and the original system is transformed into the differential algebraic system, in which the modified group preserving scheme can be used to find the control force. The resulting controlled system is stable.

Finally, the proposed methods are applied to the classic Lorenz system and Duffing system correspondingly. Numerical experimental results show that the new approaches are very accurate and stable. Since the two controlled methods are fast in convergence and chattering-free, each of them has a good application prospect in the tracking control of chaotic systems.

Keywords: tracking control of chaos, group preserving method, Lorenz system, Duffing system

PACS: 05.45.Gg, 05.45.-a, 05.45.Ac, 05.45.Pq

DOI: 10.7498/aps.65.110501

* Project supported by the National Basic Research Program of China (Grant No. 2011CB302402) and the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61402537, 91118001).

† Corresponding author. E-mail: tangjuan0822@gmail.com