

计算电容中 Fabry-Perot 干涉仪测量位移的相位修正方法

王建波 钱进 刘忠有 陆祖良 黄璐 杨雁 殷聪 李同保

Method of phase correction of displacement measurement using Fabry-Perot interferometer in calculable capacitor

Wang Jian-Bo Qian Jin Liu Zhong-You Lu Zu-Liang Huang Lu Yang Yan Yin Cong Li Tong-Bao

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), 65, 110601 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.110601

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.110601>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I11>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于相关光子多模式相关性的 InSb 模拟探测器定标方法

Absolute calibration of an analog InSb detector based on multimode spatial correlation of correlated photons

物理学报.2015, 64(24): 240601 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.240601>

基于 X 射线掠射法的纳米薄膜厚度计量与量值溯源研究

Nanometer film thickness metrology and traceability based on grazing incidence X-ray reflectometry

物理学报.2014, 63(6): 060601 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.060601>

一种内腔式 He-Ne 激光器频率稳定方法的实验研究

Experimental study on frequency stabilization method of internal-mirror He-Ne laser

物理学报.2013, 62(1): 010601 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.010601>

大幅提高视觉密度国家基准测量水平的方法研究

Greatly enhanced visual density measurement level of the national standard densitometer

物理学报.2012, 61(23): 230601 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.230601>

原子光刻中驻波场与基片距离的判定方法研究

Method of identifying the relative position between standing wave of laser light and substrate in atom lithography

物理学报.2012, 61(19): 190601 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.190601>

# 计算电容中 Fabry-Perot 干涉仪测量位移的 相位修正方法\*

王建波<sup>1)2)</sup> 钱进<sup>2)†</sup> 刘忠有<sup>2)</sup> 陆祖良<sup>2)</sup> 黄璐<sup>2)</sup> 杨雁<sup>2)</sup>  
殷聪<sup>2)</sup> 李同保<sup>1)</sup>

1) (同济大学物理科学与工程学院, 上海 200092)

2) (中国计量科学研究院, 北京 100013)

(2015年12月26日收到; 2016年2月28日收到修改稿)

计算电容是复现电学阻抗单位的基准装置, 利用计算电容值和量子霍尔电阻值可以准确计算出精细结构常数  $\alpha$ . 计算电容的本质是通过高准确度地测量屏蔽电极的位移, 实现对电容量值的测量. 因此, 基于 Fabry-Perot 干涉仪的精密电极位移测量系统是计算电容装置中最为核心和关键的部分. 在 Fabry-Perot 干涉仪测位移过程中, 由于高斯激光束存在轴向 Gouy 相位, 该附加相位将会引起相邻干涉条纹对应位移的变化 (大于或者小于  $\lambda/2$ ), 导致位移的测量值与实际值存在偏差. 本文阐述了高斯激光场的传播特性, 利用高斯激光束在自由空间和透过薄透镜复振幅的变换关系, 建立了计算电容装置中 Fabry-Perot 干涉仪透射光束的传输模型; 通过对不同腔长的 Fabry-Perot 干涉仪透射光场相位的分析, 获得了高斯激光束轴向 Gouy 相位修正与传输距离的关系. 结果表明, 当腔长从 111.3 mm 移动至 316.3 mm 时, 在接收距离为 560 mm 的情况下, 高斯光束轴向 Gouy 相位引起的位移修正的绝对值最小为 0.7 nm, 其相对相位修正量  $|\delta L|/|\Delta L| = 3.4 \times 10^{-9}$ .

**关键词:** Gouy 相位, 位移修正, Fabry-Perot 干涉仪, 计算电容

**PACS:** 06.20.-f, 42.25.Hz, 84.37.+q, 07.60.Ly

**DOI:** 10.7498/aps.65.110601

## 1 引言

计算电容<sup>[1]</sup>是目前电磁测量领域内除量子电压、量子电阻基准(量子基准)之外准确度最高的装置. 它是电学阻抗单位复现的基准装置, 是电容、电感和交流电阻的溯源依据. 利用计算电容值和量子霍尔电阻值相结合的方法可以准确计算出精细结构常数  $\alpha$  值<sup>[2]</sup>, 该方法也是目前国际上测量精细结构常数  $\alpha$  所采取的方法之一<sup>[3]</sup>. 计算电容通过测量屏蔽电极的位移实现对其电容值的测量<sup>[4]</sup>, 该方法将电容单位法拉和长度单位米直接联系起来, 使得其能够利用高准确度的激光干涉测位移的方法实现对电学量的高准确度测量<sup>[5]</sup>.

计算电容的基本原理是在 1956 年由澳大利亚计量院的 Thompson 和 Lampard 所提出的静电学新原理<sup>[1]</sup>. 他们于 1959 年便研制成功了世界首台基于光干涉测量原理的原型装置<sup>[6]</sup>. 由于受技术条件的限制, 当时研制的计算电容装置采用光谱灯作为干涉仪的光源, 平行平面的 Fabry-Perot 干涉仪作为屏蔽电极位移测量的手段, 其测量的不确定度在  $10^{-5}$  量级上. 随着激光的问世及其技术的日臻成熟, 从 20 世纪 60 年代末期至 21 世纪初, 各国科研人员研制的计算电容装置均采用稳频的 633 nm He-Ne 激光器作为光源, 采用干涉条纹计数与干涉条纹锁定相结合的方法实现对屏蔽电极位移的精密测量, 其测量的不确定度水平普遍达到  $10^{-8}$  量级<sup>[7-11]</sup>. 自 2004 年以来, 各国科研人员开始了新

\* 国家重大科学仪器设备开发专项(批准号: 2012YQ10022503)和质检公益性行业科研专项(批准号: 20150002)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: qianjin@nim.ac.cn

型计算电容装置的研究,并引入新的激光测位移的方法,其目标是进一步降低不确定度至 $10^{-9}$ 量级甚至更低,以满足冯·克里青常数 $R_K$ 重新定义的需要( $R_K = \mu_0 c_0 / 2\alpha$ ).我国早在20世纪70年代就研制成功卧式的固定电极的计算电容装置,其不确定度在 $10^{-7}$ 量级<sup>[12,13]</sup>.2007年,中国计量科学研究院与澳大利亚国家计量院合作,同步开展新一代立式可移动屏蔽电极计算电容装置的研究,并于2014年取得初步的实验结果<sup>[14]</sup>.

计算电容复现电学单位法拉的过程中,对可动屏蔽电极位移的高准确度测量是决定计算电容装置整体不确定度水平的关键因素之一.由于受到计算电容装置空间结构的影响,对其屏蔽电极位移的测量普遍采用Fabry-Perot干涉仪来实现<sup>[15]</sup>.早期的Fabry-Perot干涉仪采用平行平面腔结构,利用准直激光束垂直入射至干涉仪中,通过记录Fabry-Perot干涉仪透射光强实现对位移的测量.由于这种干涉仪的镜面反射率较低(通常50%左右),透射光的发散性较大,以及衍射效应显著,限制了其测量精度的进一步提高.在新一代计算电容的研究中,为了提高位移测量的不确定水平至 $10^{-9}$ 量级甚至更低,各研究小组在传统的Fabry-Perot干涉仪的基础上发展了新的干涉测量技术.例如美国国家标准与技术研究院采用同时测量高精系数Fabry-Perot干涉仪的不同共振频率的方法实现位移的测量.他们在真空的平凹Fabry-Perot干涉仪模型上,在50 mm的行程下实现了10 pm的超高测量不确定度<sup>[16]</sup>.国际计量局使用凹凸Fabry-Perot干涉仪,利用相位锁定的方法,将干涉仪锁定至高稳定的碘吸收稳频的激光器上,实现高准确度的位移测量<sup>[17]</sup>.中国计量科学研究院则使用平凹Fabry-Perot干涉仪,采用稳频激光与Fabry-Perot干涉仪同步解调的方式实现干涉仪的锁定,然后利用计算电容装置自身电容值的变化准确给定干涉仪整数级次的变化,从而实现对位移的高准确度测量.

采用高斯激光束对屏蔽电极位移进行高准确度的测量过程中,特别是当位移测量的准确度达到 $10^{-8}$ 量级甚至更低的时候,高斯激光束弧形的等相位面对位移测量的影响就需要仔细评估<sup>[18]</sup>.不同于理想的平面波光束的传播,高斯激光束在传播过程中,其等相位面的曲率半径及其之间的距离都

随传播距离而改变<sup>[19]</sup>,从而导致在轴向的传播方向上产生附加的Gouy相位<sup>[20]</sup>.该附加相位会使得高斯激光束干涉产生的相邻级次的干涉条纹所对应的位移并不严格等于 $\lambda/2$ ( $\lambda$ 为激光波长),导致实际的测量结果需要进行相应的修正.高斯激光束的Gouy相位源自于光场的横向空间限制<sup>[21]</sup>,其理论分析在非衍射光束<sup>[22]</sup>、激光聚焦场<sup>[23]</sup>、光涡流<sup>[24]</sup>和光脉冲载波包络相位移动<sup>[25]</sup>等物理解释中得到广泛应用.此外,对Gouy相位的准确分析还在绝对重力测量<sup>[26]</sup>、光梳测距<sup>[27]</sup>以及硅球体积测量<sup>[18]</sup>等计量领域有着重要作用.

本文通过对高斯激光束传播规律的分析,建立Fabry-Perot干涉仪轴向位移的相位修正数学模型,结合计算电容中Fabry-Perot干涉仪的实际参数得到其位移测量的修正值.本文第二部分简要介绍了计算电容中Fabry-Perot干涉仪测位移的实验装置;第三部分阐述高斯光束复振幅的传播规律,并建立Fabry-Perot干涉仪中复振幅叠加的数学模型;第四部分通过计算分析相位修正与传播距离的关系,确定计算电容中位移测量的修正值.

## 2 计算电容中屏蔽电极位移测量的基本原理及实验装置

计算电容装置的主体结构中,四根经过细致研磨的圆柱形不锈钢主电极呈垂直对称的分布,如图1(a)所示,其表面不圆度在 $\pm 25$  nm以内,四根主电极的直径一致性在200 nm以内<sup>[28]</sup>.用于测量屏蔽电极位移的Fabry-Perot干涉仪由分别安装在可动屏蔽电极底端的平面反射镜和安装于固定屏蔽电极顶端的凹面反射镜构成,如图1(b)所示. Fabry-Perot干涉仪的腔长可随着可动屏蔽电极的垂直移动而改变.在计算电容装置的测量过程中,要求可动屏蔽电极须在腔长为 $L_1$ 与 $L_2$ 的两个特殊位置处,在较长时间内(通常在5 min左右)保持Fabry-Perot干涉仪的腔长稳定,以有利于电容电桥对计算电容装置电容值的准确测量.此外,还要求能够准确测量出Fabry-Perot干涉仪的腔长变化量,即位移 $\Delta L = L_2 - L_1$ .依据计算电容的基本原理 $\Delta C = C_0 \times \Delta L$ ,便可实现对电容值的高准确度复现.其中 $\Delta C$ 为位移 $\Delta L$ 对应的电容变化值,常数 $C_0 = \frac{\epsilon_0 \cdot \ln 2}{\pi} \approx 2$  pF/m.

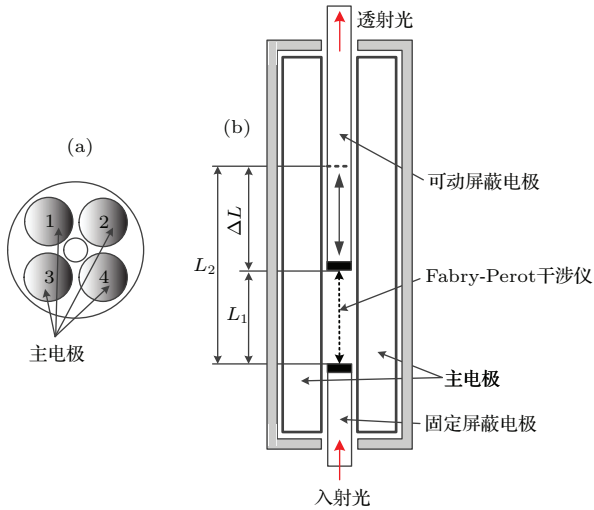


图1 计算电容装置中 Fabry-Perot 干涉仪示意图

Fig. 1. Schematic diagram of the Fabry-Perot interferometer in calculable capacitor.

为实现计算电容中可动屏蔽电极位移的高精度测量, 我们采用两次锁定不同腔长的 Fabry-Perot 干涉仪至稳频 He-Ne 激光, 分别建立 Fabry-Perot 干涉仪腔长与  $\lambda/2$  的整数倍关系; 然后结合计算电容自身电容值的变化, 准确给出腔长变化 ( $\Delta L$ ) 所对应的干涉条纹整数级次的改变量 ( $\Delta N$ ). 由此可得到屏蔽电极位移为

$$\Delta L = \frac{\lambda}{2} \Delta N + \delta L, \quad (1)$$

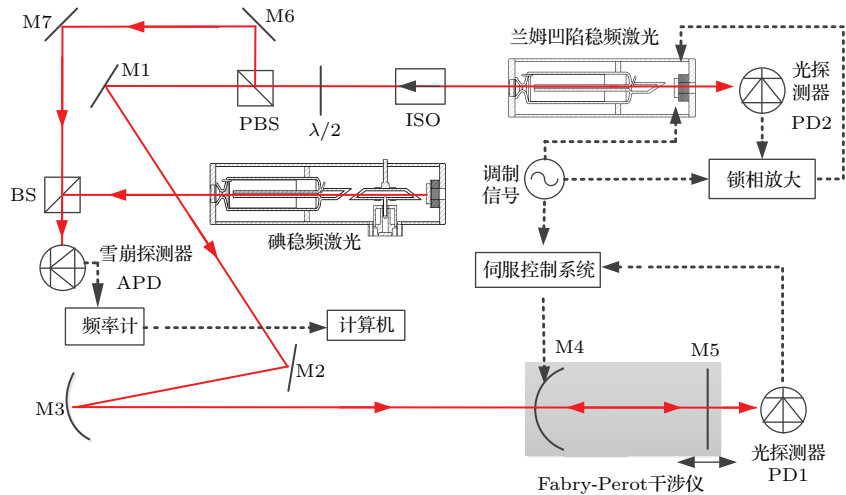


图2 Fabry-Perot 干涉仪的位移测量系统

Fig. 2. Fabry-Perot interferometer for the displacement measurement.

### 3 Fabry-Perot 干涉仪的相位修正模型

为简化对上述 Fabry-Perot 干涉仪中相位修正

式中  $\delta L$  为本文所讨论的高斯激光束的相位修正量. 图 2 所示为计算电容中 Fabry-Perot 干涉仪位移测量系统, 图中兰姆凹陷稳频激光发射的激光束依次经过光隔离器 ISO 与半波片  $\lambda/2$  后, 被偏振分光棱镜 PBS 分成两路, 一路经过平面反射镜 M1 和 M2 以及凹面反射镜 M3 反射后入射至 Fabry-Perot 干涉仪中, 另一路则与碘稳定激光进行拍频, 实时测量兰姆凹陷稳频激光波长  $\lambda$  的准确值. 凹面反射镜 M3 (曲率半径  $R_1 = 2 \text{ m}$ ) 为高斯激光束的模式匹配镜, 其放置位置由激光束与 Fabry-Perot 腔模式匹配条件计算可得, 并在此基础上进行优化, 以最大程度地避免 Fabry-Perot 腔的横模出现. 凹面反射镜 M4 与平面镜 M5 构成图 1 (b) 中所示的 Fabry-Perot 干涉仪.

计算电容中 Fabry-Perot 干涉仪工作在透射模式下, 其透过光被光电探测器 PD1 接收, 并通过伺服控制系统锁定在透过峰的极大值处. 值得指出的是, 为避免增加额外的光调制器件, 我们通过直接解调兰姆凹陷稳频激光中的调制信号实现了对干涉仪的锁定. 图 2 中光探测器 PD2、锁相放大器以及调制信号源构成兰姆凹陷激光的稳频控制系统; 碘稳频 He-Ne 激光、雪崩探测器 APD、频率计以及计算机构成激光波长的实时测量系统.

问题的讨论, 我们假设干涉仪的腔镜完全与入射激光垂直, 且干涉仪的移动方向与入射激光的方向完全重合. 同时, 我们只考虑理想的反射与透射情况, 即光学器件的振幅反射率和透过率全为实数.

### 3.1 高斯光束复振幅的变换

He-Ne 激光器发射的激光束为典型的高斯光束, 其复振幅  $u_0(r, z)$  满足如下关系:

$$E(r, z) = u_0(r, z) e^{-ikz}, \quad (2)$$

其中  $E(r, z)$  表示为光束的电场分量, 波矢  $k = \lambda/2\pi$ ,  $z$  为光束的传播距离,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  为垂直于光束传播方向的横向距离. 在  $z = \text{常数}$  的平面内, 复振幅  $u_0(r, z)$  可以写成  $q$  参数的形式 [29]:

$$u_0(r, z) = u_0(r, q) = \sqrt{\frac{kz_R}{\pi}} \frac{i}{q} e^{-ikr^2/(2q)}, \quad (3)$$

其中参数  $q = i \times z_R + z$ ,  $z_R = \pi\omega_0^2/\lambda$  为瑞利长度,  $\omega_0$  为激光腰斑半径. 由 (3) 式可知, 在高斯激光束的传播过程中, 不同的传播距离  $z$  以及横向距离  $r$  都会产生附加的相位  $\arg(u_0(r, q))$ , 如图 3 所示. 对于平面波而言,  $u_0(r, z) = 1$ , 其传播过程中不会产生附加相位, 相位差  $\Delta\phi = k \times \Delta z$  完全由传播距离  $\Delta z$  决定. 但是, 在使用高斯激光束进行高精度位移测量时, 其相位差不仅仅包含  $k \times \Delta z$  部分, 还需要考虑上述附加相位  $\arg(u_0(r, q))$ .

定义高斯光束与同频率的平面波在光轴方向传播的相位差为 Gouy 相位  $\phi_G(z)$  [20], 则由 (3) 式可知

$$\phi_G(z) = \arg(u_0(0, q)) = \arctan(z/z_R), \quad (4)$$

$z = 0$  对应于高斯光束束腰处, 当光束正向传播时 ( $z \geq 0$ ), 则 Gouy 相位  $\phi_G(z)$  与相位  $\phi = -kz$  符号相反, 由此可知, 轴向的相位延迟  $\phi_G(z)$  将导致高斯光束波前的距离大于相同波长的平面波前的距离, 即在传播相同距离的情况下, 高斯光束的相位将超前于平面波的相位.

高斯光束在自由空间传播距离  $z$  时, 其  $q$  参数满足  $q_1 = q_0 + z$ , 将其代入 (3) 式中得到高斯光束在自由空间传播的复振幅:

$$u_1(r, q_1) = u_0(r, q_0 + z) = \sqrt{\frac{kz_R}{\pi}} \frac{i}{q_0 + z} e^{-ikr^2/[2(q_0+z)]}, \quad (5)$$

式中  $q_0 = i \times z_R + z_0$ , 且在  $z = z_0$  平面高斯光束的复振幅的为  $u_0(r, q_0)$ .

高斯光束经过薄透镜传播时, 其  $q$  参数满足

$$q_L = T(q_0) = \frac{1}{1/q_0 - 1/f}, \quad (6)$$

式中  $q_0, q_L$  分别为透镜入射平面和出射平面处的  $q$  参数,  $f$  为透镜焦距. 对于理想的无光衰减的薄透镜, 光场的归一化振幅和轴向相位角的连续性在入射平面和出射平面处必须得到保持. 因此, 通过薄透镜变换后的高斯光束激光场可写成 [18]

$$\begin{aligned} & u_L(r, q_L + z_1) \\ &= \frac{q_L u_0(r, q_L + z_1)}{q_0} \\ &= \sqrt{\frac{kz_R}{\pi}} \frac{q_L i}{q_0(q_L + z_1)} e^{-ikr^2/[2(q_L+z_1)]}, \end{aligned} \quad (7)$$

式中  $z_1$  为高斯光束相对透镜出射平面的传播距离,  $u_0(r, q_0)$  为透镜入射平面的光场,  $u_L(r, q_L + z_1)$  为经过透镜后传播距离  $z_1$  处的光场.

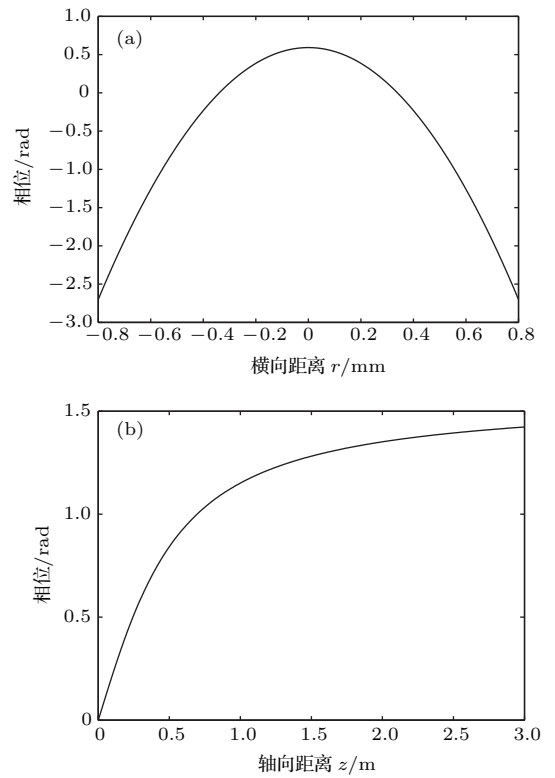


图 3 高斯激光束的相位变化, 激光腰斑半径  $\omega_0 = 0.3 \text{ mm}$  (a) 相位与横向距离的关系; (b) 相位与轴向传播距离的关系

Fig. 3. Phase change of the Gaussian laser beam, the radius of laser waist takes the value of  $\omega_0 = 0.3 \text{ mm}$ : (a) Phase distribution of the Gaussian beam versus the transverse propagation distance; (b) phase distribution of the Gaussian beam versus the longitude propagation distance.

### 3.2 计算电容中 Fabry-Perot 干涉仪模型

计算电容中 Fabry-Perot 位移测量系统的等效透镜模型如图 4 所示, 干涉仪的凹面反射镜 (曲率

半径  $R_2 = 5$  m) 等效为焦距  $f_C = R_2/2 = 2.5$  m 的薄透镜, 透镜与平面镜之间的距离  $L$  为干涉仪的腔长. 入射光在 Fabry-Perot 干涉仪中形成的多次反射, 可等效视为光束依次通过呈周期性排列的虚拟透镜组, 每次通过透镜组透射光场表示为  $u_1, u_2, \dots, u_n$ ,  $n$  表示光场在 Fabry-Perot 干涉仪中的反射次数. 因此, Fabry-Perot 干涉仪的总透射光场为所有的部分透射光场 ( $u_1, u_2, \dots, u_n$ ) 相干叠加之和, 即  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ .

应用 (5) 和 (7) 式, 可得到第  $n$  次透射光场的复振幅为

$$u_n(r, q_n + z_D) = \begin{cases} r^2 \frac{q_n - L}{q_{n-1} + L} u_{n-1}(r, q_n + z_D) e^{-2ikL} & (n > 1), \\ \tau^2 \frac{T_C(q_0^L)}{q_0^L} u_0^L(r, q_1 + z_D) e^{-ikL} & (n = 1), \end{cases} \quad (8)$$

式中  $z_D$  为 Fabry-Perot 干涉仪平面输出镜与探测

器的距离; 透镜的  $q$  参数变换关系  $T_C(q)$  为焦距  $f = f_C$  的 (6) 式. 第  $n$  次透射光场对应的  $q$  参数  $q_n$  为

$$q_n = \begin{cases} T_C(q_{n-1} + L) + L & (n > 1), \\ T_C(q_0^L) + L & (n = 1). \end{cases} \quad (9)$$

干涉仪反射镜的光强反射率  $r^2$  与透射率  $\tau^2$  满足  $r^2 + \tau^2 = 1$ , 且  $r$  与  $\tau$  为实数;  $q_0^L, u_0^L(r, q_0^L)$  分别为干涉仪凹面反射镜处输入光束的  $q$  参数和光场复振幅,

$$q_0^L = l_2 + \frac{1}{\frac{1}{l_1 + iz_R} - \frac{1}{f_L}}, \quad (10)$$

$$u_0^L(r, q_0^L) = \frac{q_0^L}{l_1 + iz_R} u_0(r, q_0^L). \quad (11)$$

Fabry-Perot 干涉仪透射的总光场  $u_{tot}$  为所有单次透过光场之和, 即

$$u_{tot} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r, q_n + z_D). \quad (12)$$

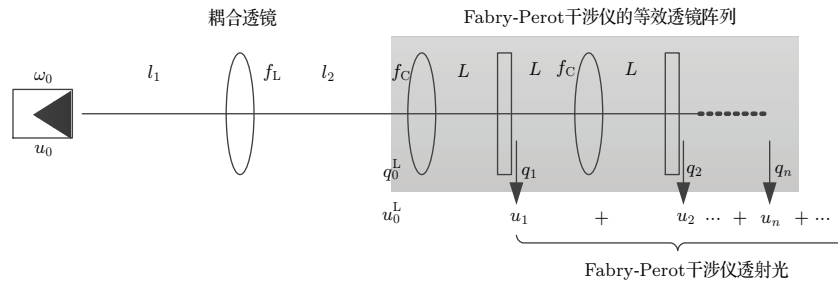


图4 Fabry-Perot 干涉仪透镜模型 图中  $l_1 = 1453$  mm,  $l_2 = 2294$  mm,  $f_L = 1000$  mm,  $f_C = 2500$  mm,  $L = 111.3$  mm 或者  $316.3$  mm, 腔镜的光强反射率  $r_2 = 0.7$ , 高斯激光束的腰斑半径  $\omega_0 = 0.3$  mm  
Fig. 4. Lens model for the Fabry-Perot interferometer. The parameters are taken as  $l_1 = 1453$  mm,  $l_2 = 2294$  mm,  $f_L = 1000$  mm,  $f_C = 2500$  mm,  $L = 111.3$  mm or  $316.3$  mm,  $r_2 = 0.7$  and  $\omega_0 = 0.3$  mm.

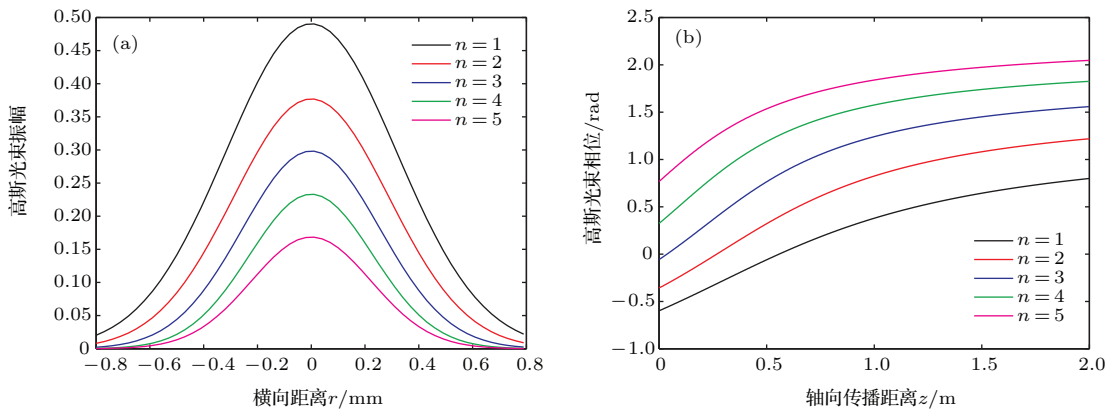


图5 (网刊彩色) (a) Fabry-Perot 干涉仪中不同振荡次数的透射光束振幅; (b) 透射光束的 Gouy 相位变化与传播距离的关系  
Fig. 5. (color online) (a) Amplitude of the lights transmitted through Fabry-Perot interferometer with different round-trips; (b) phase of the transmitted lights versus the longitude propagation distance.

图5给出了Fabry-Perot干涉仪中前5次反射光束在输出平面镜上的振幅,以及它们的相位变化与传播距离的关系.由图可知,随着反射次数的增加,光场的振幅不断减小,这是由于Fabry-Perot干涉仪反射镜的光场反射率不等于1,每反射一次,会有部分光场通过反射镜透射出.Fabry-Perot干涉仪总的透射光场为上述所有部分透过光场的相干叠加之和.每次部分透射光场的Gouy相位随传播距离的变化趋势一致,但是其初始相位受到干涉仪的腔型、腔长以及腔内反射次数的影响而不同.

### 3.3 Fabry-Perot干涉仪相位修正

Fabry-Perot干涉仪的透射光场 $u_{tot}$ 的相位角 $\varphi$ 可写为

$$\varphi = \arg \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r, q_n + z_D) \right). \quad (13)$$

在计算电容的位移测量过程中, Fabry-Perot干涉仪分别在腔长 $L_1$ 和 $L_2$ 的状态下锁定至稳频激光,此时干涉仪的相位角 $\varphi$ 满足

$$\begin{aligned} \varphi_{L_1} &= (2N + 1)\pi = 2kL_1 - \delta\varphi_1 + \varphi_0, \\ \varphi_{L_2} &= (2N' + 1)\pi = 2kL_2 - \delta\varphi_2 + \varphi_0, \end{aligned} \quad (14)$$

$N$ 和 $N'$ 为干涉仪所对应的激光半波长 $\lambda/2$ 的整数级次; $\delta\varphi_1$ 和 $\delta\varphi_2$ 为高斯光束附加相位引起的相位差,其与干涉仪的腔长 $L$ 有关; $\varphi_0$ 为镜面反射引起的固定相位差,其与镜面反射膜有关,与腔长无关.干涉仪的腔长由 $L_1$ 移动至 $L_2$ 时,所对应的相位差为 $\Delta\varphi$ ,则有

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi_{L_2} - \varphi_{L_1} = \Delta N \times \pi \\ &= 2k \times \Delta L - (\delta\varphi_{L_2} - \delta\varphi_{L_1}) \\ &= 2k \times \Delta L \\ &\quad - \text{mod} \left[ \arg \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r, q_n + z_D) \right)_{L=L_2} \right. \\ &\quad \left. - \arg \left( \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(r, q_n + z'_D) \right)_{L=L_1}, \pi \right], \end{aligned} \quad (15)$$

式中 $\Delta N \times \pi$ 为干涉仪移动位移 $\Delta L$ 所对应改变的整数倍干涉级次的相位,其中 $\Delta N = m_2 - m_1$ ,  $m_1$ 和 $m_2$ 为腔长 $L_1$ 和 $L_2$ 对应的干涉级次.在计算电容装置中,能够通过标准电容的先验值(不确定度在 $10^{-7}$ 量级)准确确定 $\Delta N$ ,具体方法参考文献[30].第二部分 $\delta\varphi_{L_2} - \delta\varphi_{L_1}$ 为Fabry-Perot干涉

仪测位移中高斯光束附加相位引起的相位修正项,其中mod函数表示

$$\begin{aligned} &\arg \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r, q_n + z_D) \right)_{L=L_2} \\ &- \arg \left( \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(r, q_n + z'_D) \right)_{L=L_1} \end{aligned}$$

除 $\pi$ 的余数.因此,(1)式中位移测量的修正值 $\delta L$ 可写为

$$\delta L = -\frac{\lambda}{4\pi}(\delta\varphi_{L_2} - \delta\varphi_{L_1}). \quad (16)$$

因为位移的修正值 $\delta L = \Delta L_{\text{meas}} - \Delta L_{\text{true}}$ ,表示位移 $\Delta L$ 的测量值与真实值之差.若 $\delta\varphi_{L_2} > \delta\varphi_{L_1}$ 则位移 $\Delta L$ 的真实值将大于实际测量值;若 $\delta\varphi_{L_2} < \delta\varphi_{L_1}$ 则位移 $\Delta L$ 的真实值将小于实际测量值.

## 4 结果与讨论

计算电容中Fabry-Perot干涉仪的腔长分别为111.3 mm和316.3 mm时,其总透射光场的相位变化如图6(a)所示.图中相位变化曲线去除了 $\pi$ 的整数倍部分,只给出了非整数部分的变化规律.在干涉仪的移动过程中光电接收器的位置保持不变,在腔长较短的情况下,透射光场传播至接收器的距离较远,反之则距离接收器更近.图6(a)和图6(b)中横坐标以腔长为316.3 mm的输出反射镜的位置作为起始参考点;当Fabry-Perot干涉仪的腔长为111.3 mm时,透射光场的传播距离将增加205 mm,因此在考虑其相位变化时横坐标直接以205 mm作为起始点.图6(b)则给出了两种腔长状态下总透射光场在不同传播距离下的相位差.由图可知,在传播距离为560 mm时,相位差取得极小值14 mrad,此时对应的位移修正量 $\delta L = -0.7$  nm,相对修正量 $|\delta L/\Delta L| = 3.4 \times 10^{-9}$ .由此可知在此种腔型下,接收器的距离存在最佳位置可使得高斯光场的相位差修正最小,小于或者超过该距离都会使得相位修正值变大.

此外,由于光电接收器的光敏面积有限,在光斑尺寸较大的情况下通常采用汇聚透镜增加光场的功率密度,缩小光斑发散范围.由(7)式可知,增加的汇聚透镜会改变透射光场的轴向相位分布,引起更为复杂的相位修正分析,因此应尽量使用与光斑尺寸匹配的光电接收器,采用直接接收的方

式, 避免额外的轴向相位差的引入. 图7为Fabry-Perot干涉仪透射激光束光斑大小与传播距离的关系. 在0—2 m的范围内, 光斑半径均小于1 mm, 因此可以采用直接接收的方式, 利用图6(b)所示的相位修正关系, 实现计算电容中屏蔽电极位移测量结果的准确修正.

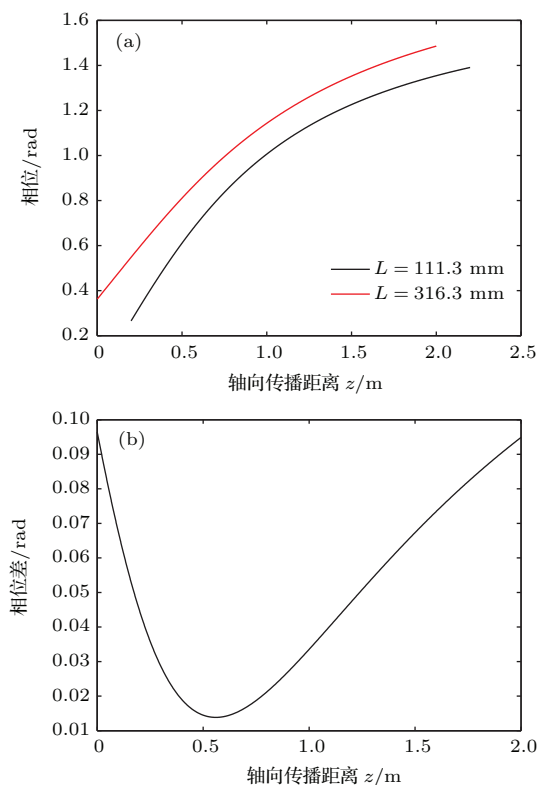


图6 (网刊彩色) (a) 腔长  $L = 111.3$  mm 和  $316.3$  mm 两种情况下, Fabry-Perot干涉仪总透射光的相位与传播距离的关系; (b) 二者间相位差与传播距离的关系

Fig. 6. (color online) (a) Phases of the light transmitted through the Fabry-Perot interferometer with two cavity length of  $L = 111.3$  mm and  $316.3$  mm; (b) the phase difference versus the longitude propagation distance.

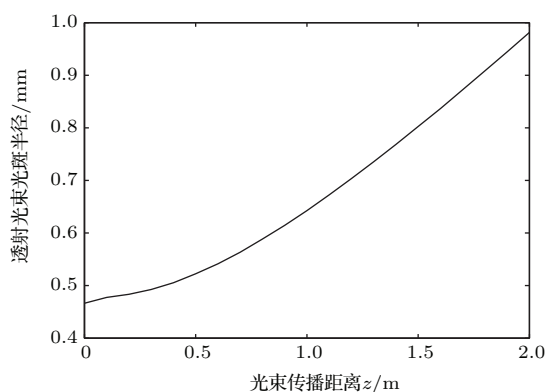


图7 Fabry-Perot干涉仪透射激光束光斑尺寸

Fig. 7. Spot size of the light transmitted through the Fabry-Perot interferometer.

## 5 结 论

在计算电容屏蔽电极位移的精密测量过程中, 需要考虑高斯光束轴向Gouy相位对位移测量结果的修正问题. 本文通过引入高斯激光束复振幅在自由空间和穿过透镜的传播特性, 建立了计算电容装置中Fabry-Perot干涉仪透射光场的数学模型. 通过对干涉仪透过光场相位的分析, 得到了Fabry-Perot干涉仪相位修正与传播距离的关系. 由此可知, 在计算电容装置中, 当干涉仪的腔长从111.3 mm移动至316.3 mm、接收距离为560 mm时, 高斯光束轴向Gouy相位引起的位移修正的绝对值最小为0.7 nm, 其相对相位修正量  $|\delta L/\Delta L| = 3.4 \times 10^{-9}$ , 这表明位移  $\Delta L$  的真实值比测量值大0.7 nm. 该相位修正方法不仅仅适用于Fabry-Perot干涉仪的位移测量修正, 也可用于迈克耳孙式干涉仪的精密位移测量的修正.

## 参考文献

- [1] Thompson A M, Lampard D G 1956 *Nature* **177** 888
- [2] Klitzing K v, Dorda G, Pepper M 1980 *Phys. Rev. Lett.* **45** 494
- [3] Mohr P J, Taylor B N, Newell D B 2012 *Rev. Mod. Phys.* **84** 1527
- [4] Cutkosky R D 1961 *J. Res. Nat. Bur. Stand.* **65A** 147
- [5] Clothier W K 1965 *Metrologia* **1** 36
- [6] Thompson A M 1959 *Proceedings of the IEE-Part C: Monographs* **104** 271
- [7] Bachmair H, Funck T, Hanke R, Lang H 1995 *IEEE Trans. Instrum. Meas.* **44** 440
- [8] Igarashi T, Kanno M, Koizumi Y, Haneda K 1970 *IEEE Trans. Instrum. Meas.* **19** 297
- [9] Jeffery A M, Elmquist R E, Lee L H, Shields J Q, Dziuba R F 1997 *IEEE Trans. Instrum. Meas.* **46** 264
- [10] Jones K, Corney A C 1987 *Metrologia* **24** 1
- [11] Small G W 1996 *Conference on Precision Electromagnetic Measurements* Laguna Beach, California, USA, June 10–12, 1999 p8
- [12] Cross Capacitor Group of National Institute of Metrology 1980 *Acta Metrol. Sin.* **1** 16 (in Chinese) [中国计量科学研究院计算电容组 1980 计量学报 **1** 16]
- [13] Zhang Z, Lu Z 1982 *Acta Metrol. Sin.* **3** 250
- [14] Lu Z, Huang L, Yang Y, Zhao J, Qian J, Lu W, Liu Z, Zhang Z, Liu X, Wang J, Wang W, Lu Y, He Q 2015 *IEEE Trans. Instrum. Meas.* **64** 1496
- [15] Shields J Q, Dziuba R F, Layer H P 1989 *IEEE Trans. Instrum. Meas.* **38** 249
- [16] Lawall J R 2005 *J. Opt. Soc. Am. A* **22** 2786
- [17] Fletcher N, Goebel R, Robertsson L, Stock M 2004 *Conference on Precision Electromagnetic Measurements*, London, England, June 27–July 2, 2004 p485



- [18] Andreas B, Ferroglio L, Fujii K, Kuramoto N, Mana G 2011 *Metrologia* **48** S104
- [19] Kogelnik H, Li T 1966 *Appl. Opt.* **5** 1550
- [20] Boyd R W 1980 *J. Opt. Soc. Am.* **70** 877
- [21] Feng S M, Winful H G 2001 *Opt. Lett.* **26** 485
- [22] Martelli P, Tacca M, Gatto A, Moneta G, Martinelli M 2010 *Opt. Exp.* **18** 7108
- [23] Tyc T 2012 *Opt. Lett.* **37** 924
- [24] Wu X F, Deng D M, Guo Q 2011 *Chin. Phys. B* **20** 84201
- [25] Zhou Y H, Jiang H B, Gong Q H 2006 *Chin. Phys. Lett.* **23** 110
- [26] Lennart R 2007 *Metrologia* **44** 35
- [27] Coddington I, Swann W C, Nenadovic L, Newbury N R 2009 *Nature Photon.* **3** 351
- [28] Small G W, Fiander J R 2011 *IEEE Trans. Instrum. Meas.* **60** 2489
- [29] Siegman A E 1986 *Lasers* (Palo Alto: University Science Books) pp637–667
- [30] Lu Z L, Huang L, Yang Y, Zhao J T, Qian J, Lu W J, Liu Z Y, Zhang Z H, Liu X Y, Wang J B, Wang W, He X B 2014 *Acta Metrol. Sin.* **35** 521 (in Chinese) [陆祖良, 黄璐, 杨雁, 赵建亭, 钱进, 陆文骏, 刘忠有, 张钟华, 刘秀英, 王建波, 王维, 何小兵 2014 计量学报 **35** 521]

# Method of phase correction of displacement measurement using Fabry-Perot interferometer in calculable capacitor\*

Wang Jian-Bo<sup>1)2)</sup> Qian Jin<sup>2)†</sup> Liu Zhong-You<sup>2)</sup> Lu Zu-Liang<sup>2)</sup> Huang Lu<sup>2)</sup> Yang Yan<sup>2)</sup>  
Yin Cong<sup>2)</sup> Li Tong-Bao<sup>1)</sup>

1) (School of Physics Science and Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

2) (National Institute of Metrology, Beijing 100013, China)

( Received 26 December 2015; revised manuscript received 28 February 2016 )

## Abstract

The calculable capacitor is a classical and fundamental experimental apparatus in precision electromagnetic measurements. It is the alternating current (AC) impedance primary standard, and an important tool in measuring the fine structure constant. The calculable capacitor provides a way to directly link the capacitance unit to the mechanical unit of length. In the calculable capacitor, the displacement measurement of the guard electrode is an essential part, because the average value of the cross capacitances is directly proportional to the linear displacement of the moving guard electrode. In order to measure the displacement with a high accuracy of  $10^{-9}$  or lower, a Fabry-Perot interferometer, whose cavity length is traceable to a stabilized laser by the phase sensitive detection technique, is employed. Considering that the Fabry-Perot interferometer is irradiated by the Gaussian laser beam, the effect of the phase shift of the Gaussian field, relative to the plane wave, should be carefully considered in the displacement measurement. The amplitude of the Gaussian laser beam disperses out of the region where it can be assumed to be plane-wave propagation, so its wavefronts bend and their spacing is different from that of the plane wave. As a result, the corresponding distance of an interference fringe from the coherent Gaussian laser beams is not strictly equal to  $\lambda/2$ , and it means that the displacement correction based on the phase shift of the Gaussian laser beam in the Fabry-Perot interferometer is inevitable. Therefore, the measured result should add or subtract the correction value to obtain the actual displacement of the interferometer. In order to determine the Gouy phase correction, an interferometer model based on the calculable capacitor is studied analytically and numerically. Using the free space propagation and lens transformation of the Gaussian beam field, the complex amplitude of the partial beam transmitted through the interferometer is obtained, and its phase versus the longitude propagation distance is analyzed. The amplitude and phase of the total transmitted beam, which is the coherent superposition of all the partial beams, are presented. Since the Fabry-Perot interferometer in the calculable capacitor is actively locked to a stabilized laser at two different cavity lengths, the phase of the transmitted beam at each cavity length is calculated individually. The phase difference between the two transmitted beams versus the longitude propagation distance is also analyzed numerically. The simulation result demonstrates that the minimum value of the displacement correction can be obtained by actively detecting the laser light at a distance of 560 mm from output mirror, when the Fabry-Perot interferometer moves from the cavity length of 111.3 mm to 316.3 mm, and it means that a displacement correction value of 0.7 nm, with a relative value of  $|\delta L|/|\Delta L| = 3.4 \times 10^{-9}$ , should be added to the measured displacement of the guard electrode.

**Keywords:** Gouy phase, displacement correction, Fabry-Perot interferometer, calculable capacitor

**PACS:** 06.20.-f, 42.25.Hz, 84.37.+q, 07.60.Ly

**DOI:** 10.7498/aps.65.110601

\* Project supported by the National Key Scientific Instrument and Equipment Development Project (Grant No. 2012YQ10022503), and the Special Scientific Research Fund of Quality Inspection of Public Welfare Profession of China (Grant No. 20150002).

† Corresponding author. E-mail: [qianjin@nim.ac.cn](mailto:qianjin@nim.ac.cn)