

具有 p 波超流的一维非公度晶格中迁移率边研究

刘通 高先龙

Identifying the mobility edges in a one-dimensional incommensurate model with p-wave superfluid

Liu Tong Gao Xian-Long

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 117101 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.117101

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.117101>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I11>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

一个非晶 InGaZnO 薄膜晶体管线性区陷阱态的提取方法

A technique for extracting the density of states of the linear region in an amorphous InGaZnO thin film transistor

物理学报.2015, 64(13): 137101 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.137101>

应变 Si n 型金属氧化物半导体场效应晶体管电荷模型

Charge model of strained Si NMOSFET

物理学报.2014, 63(1): 017101 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.017101>

应变 Si NMOSFET 漏电流解析模型

Analytical modeling for drain current of strained Si NMOSFET

物理学报.2013, 62(23): 237103 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.237103>

应变 SiGe p 型金属氧化物半导体场效应管栅电容特性研究

Study on gate capacitance-voltage characteristics of strained-SiGe pMOSFET

物理学报.2013, 62(12): 127102 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.127102>

应变 Si NMOSFET 阈值电压集约物理模型

Physical compact modeling for threshold voltage of strained Si NMOSFET

物理学报.2013, 62(7): 077103 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.077103>

## 具有p波超流的一维非公度晶格中迁移率边研究\*

刘通 高先龙†

(浙江师范大学物理系, 金华 321004)

(2016年1月22日收到; 2016年3月28日收到修改稿)

研究了具有p波超流的一维非公度晶格中迁移率边的性质. 发现适当的p波超流可以增加体系中的迁移率边的数目, 并且通过多分形分析确定了迁移率边所在的位置.

关键词: p波超流, 迁移率边, 多分形分析

PACS: 71.23.Ft, 71.23.An

DOI: 10.7498/aps.65.117101

## 1 引言

在理想的周期系统中, 电子的本征波函数是扩展的布洛赫波. 但现实中的材料总是不完美的, 存在杂质、缺陷等无序. 1958年, 安德森(P.W. Anderson)在其文章“某些无序晶格中扩散的消失”<sup>[1]</sup>中讨论了无序晶体中电子的运动, 他指出当无序强度超过一临界值时, 体系会发生相变, 进入安德森局域相. 虽然已经过去50多年了, 可在固态系统中还没有直接观测到安德森局域相变. 近来, 得益于冷原子技术的突破, 实验人员可以利用冷原子系统模拟各种固态系统. Billy等<sup>[2]</sup>利用一维光波导直接观测到了无序光斑中玻色-爱因斯坦凝聚体的安德森局域化, 另外Roati等<sup>[3]</sup>观测到了在一维非公度光晶格中的Aubry-Andre (AA)相变<sup>[4]</sup>. 在AA模型中, 体系所有的本征波函数要么全部是扩展的, 要么全部是局域的, AA模型不存在能量依赖的迁移率边.

对于迁移率边的研究, 始于安德森局域化研究之后. 自安德森指出强无序将导致系统波函数局域化后, 人们意识到如果无序不够强的话, 系统波函数应该是扩展态和局域态共存. 莫特指出<sup>[5]</sup>: 在非晶材料的能带中扩展态和局域态在能量上不能有

简并, 应该存在一个临界值, 把二者在能量上分开, 这便是所谓的迁移率边. 在本文, 我们定义的迁移率边如下: 如果存在一对相邻能级的波函数, 其中之一是扩展态且另一个是局域态, 则我们说这一对能级之间存在一个迁移率边, 类似的定义见文献<sup>[6—8]</sup>. 两者的区别主要是: 莫特指的是大尺寸材料, 其每一个能带是准连续的, 理论上不存在能量间隔, 而我们采用的系统体系尺寸有限, 因此存在能量间隔, 所以把迁移率边定义在能量间隔之中.

Biddle等<sup>[9]</sup>受冷原子系统高度可调性的启发, 提出了一个新颖的存在迁移率边的模型. 他们利用自对偶关系, 解析推导出一个迁移率边表达式. 能量高于此迁移率边的本征波函数是扩展的; 反之, 低于此迁移率边的本征波函数是局域的. 另一方面, 对拓扑超流态的研究近年来引起了广泛的兴趣. 这是由于在该系统中零能的准粒子态是Majorana费米子<sup>[10—12]</sup>, 而Majorana费米子遵循非阿贝尔<sup>[13]</sup>交换统计, 可以用来进行拓扑量子计算<sup>[14]</sup>. 鉴于量子计算的巨大应用前景, Majorana费米子的相关性质成为了研究热点<sup>[15]</sup>. 虽然拓扑超流态不受弱无序的影响, 但是在强无序下, 拓扑超流态会被破坏掉<sup>[16—19]</sup>. 由于在实际的材料中无序效应总是存在的, 因此理清拓扑超流态与无序之间是怎样相互影响的就显得十分重要. Cai等<sup>[20]</sup>

\* 国家自然科学基金(批准号: 11374266)、新世纪优秀人才支持计划和浙江省自然科学基金(批准号: Z15A050001)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: gaoxl@zjnu.edu.cn

研究了一维非公度晶格中的p波超导体,他们证明体系会经历一个从拓扑超导态到安德森局域态的相变,此体系并不存在迁移率边.因此存在迁移率边的无序系统是怎样受p波超流影响的,就成了一个亟待解决的问题.

本文主要研究具有p波超流的一维非公度晶格中迁移率边的性质,着重研究p波超流相互作用对无序系统中的迁移率边产生的影响,并进一步利用数值技术确定迁移率边的位置.

## 2 理论模型

我们考虑一维非公度晶格中存在p波超流和迁移率边的系统,其哈密顿量可写成

$$H = \sum_{i \neq j}^L -t e^{-q|i-j|} \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j + \sum_i^L (\Delta \hat{c}_i \hat{c}_{i+1} + \text{h.c.}) + \sum_i^L V_i \hat{n}_i, \quad q > 0, \quad (1)$$

$$V_i = V \cos(2\pi\beta i), \quad (2)$$

其中  $\hat{n}_i = \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i$  是粒子数算符,  $\hat{c}_i^\dagger (\hat{c}_i)$  是费米子产生(湮灭)算符.  $t$  是跃迁项常数,  $\Delta$  是p波超流配对势,它们全部取成实数;  $L$  是系统的格点数;  $q$  是Biddle等在文献[9]中引入的参数;  $V_i$  是在格点  $i$  上的非公度势,  $V$  是非公度势强度;  $\beta$  是一个无理数,这里取作  $(\sqrt{5}-1)/2$ . 该哈密顿量可通过波戈留波夫变换对角化. 令  $\hat{c}_i = \sum_{n=1}^L (u_{ni} \hat{\eta}_n + v_{ni} \hat{\eta}_n^\dagger)$ ,  $\hat{\eta}_n^\dagger (\hat{\eta}_n)$  是波戈留波夫准粒子的产生(湮灭)算符. 则对角化后的哈密顿量可以写为  $H = \sum_{n=1}^L E_n (\hat{\eta}_n^\dagger \hat{\eta}_n - 1/2)$ , 其中准粒子的本征能量  $E_n$  和相应的本征波函数  $(u_{ni}, v_{ni})^T$  可以通过求解Bogoliubov-de Gennes(BdG)方程得到:

$$\begin{pmatrix} \hat{h} & \hat{\Delta} \\ -\hat{\Delta} & -\hat{h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{ni} \\ v_{ni} \end{pmatrix} = E_n \begin{pmatrix} u_{ni} \\ v_{ni} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

这里

$$\hat{\Delta}_{ij} = -\Delta(\delta_{j,i+1} - \delta_{j,i-1}), \quad (4)$$

$$\hat{h}_{ij} = \sum_{m=1}^{L-1} -t e^{-q|m|} (\delta_{j,i+m} + \delta_{j,i-m}) + V_i \delta_{ji}. \quad (5)$$

在该方程中,  $\delta_{ji}$  是Kronecker函数. 当  $\Delta = 0$  时, 系统就退化到Biddle等在文献[9]中提出的模

型. 当  $q \rightarrow \infty$  时, 系统就等价于Cai等在文献[20]中研究的一维非公度晶格中的p波超导模型, 此时系统会经历一个从拓扑超导态到安德森局域态的相变. 当  $q$  取适中的值, 体系会出现比较多的迁移率边. 在下面的分析中, 我们取跃迁项常数  $t = t_1 e^q$ , 以  $t_1$  为能量单位, 并取  $q = 1.5$ .

## 3 结果分析与讨论

### 3.1 拓扑超流与迁移率边

为了界定整个能谱的局域和扩展性质, 我们定义一个量-逆参与率(the inverse participation ratio, IPR)  $IPR_n = \sum_{i=1}^L (u_{n,i}^4 + v_{n,i}^4)$ ,  $i$  是格点指标,  $n$  是能级指标, 而  $u_{n,i}$  和  $v_{n,i}$  就是(3)式的解, 且满足归一化关系  $\sum_{i=1}^L (u_{n,i}^2 + v_{n,i}^2) = 1$ . 此定义可以视作  $\Delta = 0$  [21,22] 时的IPR定义的推广. 对于一个扩展态,  $IPR_n \sim 1/L$ , 当  $L$  很大时  $IPR_n$  就趋于0; 对于局域态,  $IPR_n$  则趋于一个有限值. 因此  $IPR_n$  可以用来区分一个本征态是扩展态还是局域态. 图1为系统的IPR在无序强度  $V$  取  $[0, 3]$  时的变化图, 其中亮色代表着局域态, 黑色代表着扩展态.

简单来说迁移率边是扩展态和局域态的分界线, 因此图1中黑色和亮色交界处对应着一个迁移率边. 当p波超流配对势  $\Delta = 0$  时, 系统的迁移率边和文献[9]得到的一致. 随着p波超流配对势  $\Delta$  的增大, 系统的迁移率边数目变多. 例如, 当  $\Delta = 0.5$  时(见图1左下图), 图中存在较多的黑亮交错的线, 这就意味着存在较多的迁移率边.

### 3.2 确定迁移率边

我们没有发现此系统的迁移率边的解析表达式, 为了确定体系中的迁移率边的位置, 我们采用数值方法. 下面介绍一种研究非公度系统的常用方法—多分形分析 [23-26]. 无理数  $\beta$  可以表达成

$$\beta = (\sqrt{5}-1)/2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n-1}}{F_n},$$

$F_n$  就是第  $n$  个费波纳茨数. 在第  $n$  阶有理化近似中, 我们可以把体系的格点数取为  $L = F_n$ , 粒子处于每一个格点  $i$  的概率为  $P_i = u_i^2 + v_i^2$  ( $i = 1, \dots, F_n$ ), 而  $u_i$  和  $v_i$  就是(3)式的解(忽略

能级指标  $n$ ).  $P_i$  满足归一化条件  $\sum_{i=1}^L P_i = 1$ . 标度指数  $\alpha_i$  [27,28] 可以定义为

$$P_i = F_n^{-\alpha_i}. \quad (6)$$

表征波函数标度行为的可观测量是奇异谱  $f_n(\alpha)$ , 定义如下:

$$\Omega_n(\alpha) = F_n^{f_n(\alpha)}. \quad (7)$$

$\Omega_n(\alpha)d\alpha$  是格点数, 指数  $\alpha_i$  定义在  $[\alpha, \alpha + d\alpha]$ . 在标度极限下的奇异谱  $f(\alpha)$  可以写成  $f(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\alpha)$ . 对于扩展波函数, 所有格点有一

个概率测度  $P_i \sim 1/F_n$ ; 因此  $f(\alpha)$  仅仅在  $\alpha = 1$  处有  $f(\alpha) = 1$ . 对于局域波函数, 只在有限数目的格点上其概率测度  $P_i$  才不为 0. 这些格点具有指数  $\alpha = 0$ , 其余的格点有指数衰减的概率测度, 其指数  $\alpha = \infty$ ; 因此  $f(\alpha)$  仅仅有两个值:  $f(\alpha = 0) = 0$  和  $f(\alpha = \infty) = 1$ . 对于临界波函数, 指数  $\alpha$  分布在一定范围, 因此奇异谱  $f(\alpha)$  是一个光滑的函数, 定义在有限区间  $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ . 因此我们可以简单地检验  $\alpha$  的最小值: 对于扩展波函数  $\alpha_{\min} \rightarrow 1$ , 对于局域波函数  $\alpha_{\min} \rightarrow 0$ .

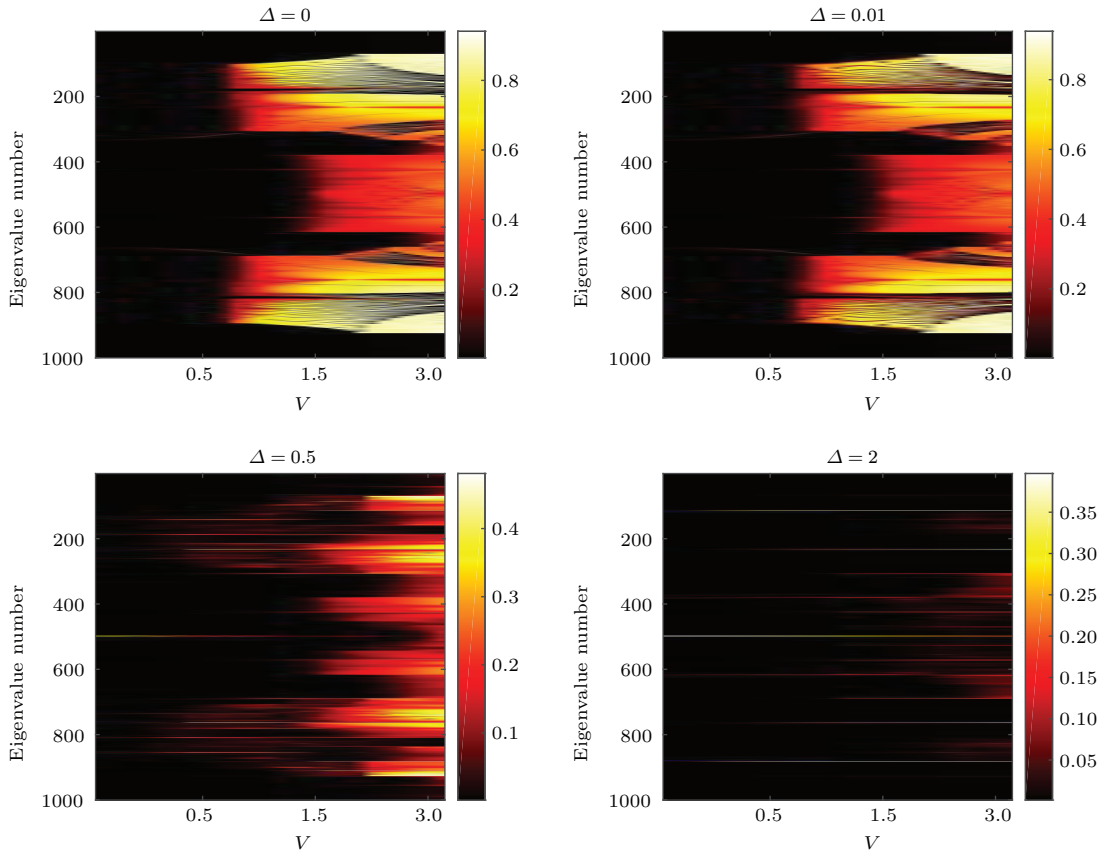


图1 (网刊彩色) IPR 随无序强度  $V$  和能级指标  $n$  的变化  $\beta = (\sqrt{5} - 1)/2, q = 1.5, L = 500$ ; 系统取开边界条件  
 Fig. 1. (color online) IPR varying with the disorder strength  $V$  and the eigenvalue number, where,  $\Delta = 0, 0.01, 0.5, 2$ , respectively. The other parameters are  $\beta = (\sqrt{5} - 1)/2, q = 1.5$ , and  $L = 500$ . The system is under OBC.

首先我们研究小体系  $L = F_n = 233$  时的情况. 因为粒子-空穴对称性, 我们只需研究本征能量  $E > 0$  的情况. 在  $\Delta \neq 0$  时体系存在许多迁移率边 [7,29], 如何把所有的迁移率边都确定是个难题, 这里我们选两个分别命名为 ME1, ME2 来说明确定迁移率边的方法. 下面直观地给出 ME1, ME2 在能谱中的位置, 见图 2. 接下来给出 ME1, ME2 对应能级的波戈留波夫准粒子波函数  $\Psi = (u, v)^T$ .

从图 3 可以看出: ME1 对应的两个能级的波函

数  $\Psi$  分别是扩展态和局域态, ME2 对应的两个能级的波函数  $\Psi$  也分别是扩展态和局域态, 因此 ME1, ME2 符合我们给出的迁移率边的定义. 但这只是小体系  $L = F_n = 233$  时的结果, 为了确定 ME1, ME2 就是两个迁移率边, 我们采用多分形分析. 下面分别采用格点数  $F_n = 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181$  的有理近似, 算出相应的  $\alpha_{\min}$ , 再把它外插到标度极限  $1/n \rightarrow 0$ , 看此时的  $\alpha_{\min}$  的趋向情况. 结果见图 4.

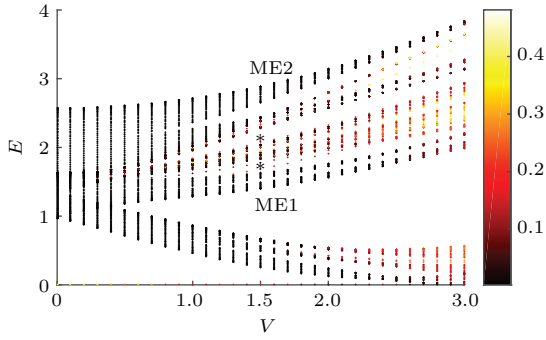


图2 (网刊彩色) 本征能量随无序强度  $V$  的变化. 系统参数为  $\beta = (\sqrt{5} - 1)/2$ ,  $q = 1.5$ ,  $\Delta = 0.5$ ,  $L = 233$ , 并取开边界条件, 图中两个 ‘\*’ 从下到上分别代表着 ME1, ME2 的位置.

Fig. 2. (color online) The eigenenergy varying with the disorder strength  $V$ . The system parameters are  $\beta = (\sqrt{5} - 1)/2$ ,  $q = 1.5$ ,  $\Delta = 0.5$ ,  $L = 233$ , respectively, and the system is under OBC. The two ‘\*’ represent from the below to the above the location of ME1, ME2 respectively.

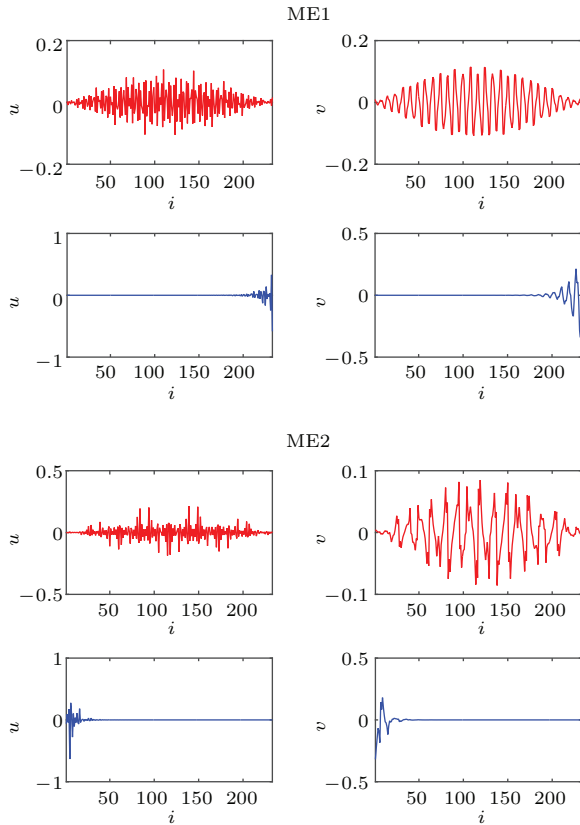


图3 (网刊彩色) ME1, ME2 对应能级的波戈留波夫准粒子波函数  $u, v$ . 取  $\beta = (\sqrt{5} - 1)/2$ ,  $q = 1.5$ ,  $V = 1.5$ ,  $\Delta = 0.5$ ,  $L = 233$ , 取开边界条件.

Fig. 3. (color online) The Bogoliubov quasiparticle wavefunction  $u$  and  $v$  of the energy levels for ME1 and ME2, respectively, with  $\beta = (\sqrt{5} - 1)/2$ ,  $q = 1.5$ ,  $V = 1.5$ ,  $\Delta = 0.5$ ,  $L = 233$  under OBC.

如图4所示, ME1, ME2 的两个  $\alpha_{\min}$  在标度极限下分别趋向 1, 0, 因此我们可以确定 ME1, ME2 就是两个迁移率边.

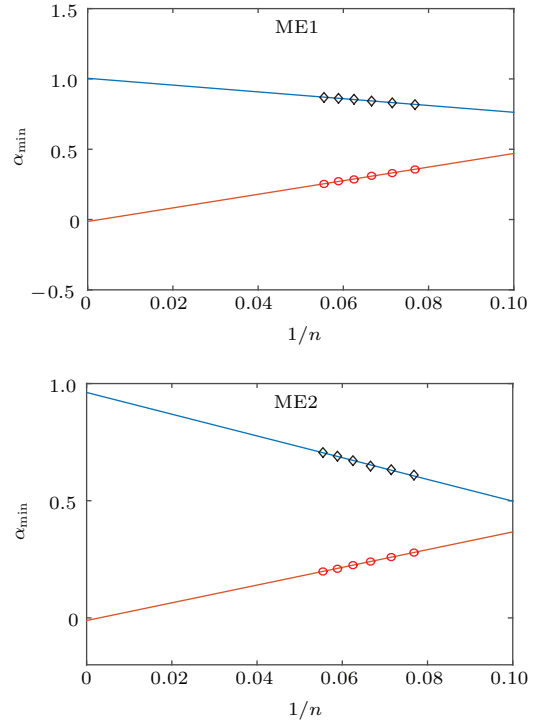


图4 (网刊彩色) 系统的  $\alpha_{\min}$  外插图. 取  $\beta = F_{n-1}/F_n$ ,  $q = 1.5$ ,  $V = 1.5$ ,  $\Delta = 0.5$ ,  $L = F_n$ , 取周期性边界条件.

Fig. 4. (color online)  $\alpha_{\min}$  vs  $1/n$  with  $\beta = F_{n-1}/F_n$ ,  $q = 1.5$ ,  $V = 1.5$ ,  $\Delta = 0.5$ ,  $L = F_n$  under PBC.

## 4 结论

本文研究了具有 p 波超流的一维非公度晶格中迁移率边的性质. 我们发现适当的 p 波超流配对势会增加体系中的迁移率边的数目, 并使单迁移率边的系统变成具有多迁移率边系统. 我们通过多分形分析技术, 进一步确定了一些迁移率边所在的位置, 验证了多分形分析在研究具有非公度势的系统中的作用. 下一步, 我们将研究迁移率边对一维 p 波超流系统的影响, 确定给定参数下的相图问题.

感谢王沛博士的多次讨论.

## 参考文献

- [1] Anderson P W 1958 *Phys. Rev.* **109** 1492
- [2] Billy J, Josse V, Zuo Z, Bernard A, Hambrecht B, Lugan P, Clément D, Sanchez-Palencia L, Bouyer P, Aspect A 2008 *Nature* **453** 891



- [3] Roati G, D'Errico C, Fallani L, Fattori M, Fort C, Zaccanti M, Modugno G, Modugno M, Inguscio M 2008 *Nature* **453** 895
- [4] Aubry S, André G 1980 *Ann. Isr. Phys. Soc.* **3** 18
- [5] Mott N 1987 *J. Phys. C: Solid Stat. Phys.* **20** 3075
- [6] Hiramoto H, Kohmoto M 1989 *Phys. Rev. B* **40** 8225
- [7] Zhou P Q, Fu X J, Guo Z Z, Liu Y Y 1995 *Solid State Commun.* **96** 373
- [8] Ganeshan S, Pixley J H, Sarma S D 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 146601
- [9] Biddle J, Sarma S D 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 070601
- [10] Ivanov D A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 268
- [11] Beenakker C W J 2013 *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **4** 113
- [12] Kitaev A Y 2001 *Phys. Usp.* **44** 131
- [13] Hasan M Z, Kane C L 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 3045
- [14] Qi X L, Zhang S C 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 1057
- [15] Das A, Ronen Y, Most Y, Oreg Y, Heiblum M, Shtrikman H 2012 *Nat. Phys.* **8** 887
- [16] Motrunich O, Damle K, Huse D A 2001 *Phys. Rev. B* **63** 224204
- [17] Brouwer P W, Furusaki A, Gruzberg I A, Mudry C 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 1064
- [18] Gruzberg I A, Read N, Vishveshwara S 2005 *Phys. Rev. B* **71** 245124
- [19] Lobos A M, Lutchyn R M, Sarma S D 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 146403
- [20] Cai X M, Lang L J, Chen S, Wang Y P 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 176403
- [21] Ingold G L, Wobst A, Aulbach C, Hänggi P 2002 *Eur. Phys. J. B* **30** 175
- [22] Thouless D J 1974 *Phys. Rep.* **13** 93
- [23] Wang J, Liu X J, Gao X L, Hu H 2015 *Phys. Rev. B* **93** 104504
- [24] Hiramoto H, Kohmoto M 1992 *Int. J. Mod. Phys. B* **06** 281
- [25] Kohmoto M, Kadanoff L P, Tang C 1983 *Phys. Rev. Lett.* **50** 1870
- [26] Ostlund S, Pandit R, Rand D, Schellnhuber H J, Siggia E D 1983 *Phys. Rev. Lett.* **50** 1873
- [27] Kohmoto M 1983 *Phys. Rev. Lett.* **51** 1198
- [28] Thouless D J 1983 *Phys. Rev. B* **28** 4272
- [29] Kohmoto M, Tobe D 2008 *Phys. Rev. B* **77** 134204

# Identifying the mobility edges in a one-dimensional incommensurate model with p-wave superfluid\*

Liu Tong Gao Xian-Long<sup>†</sup>

(Department of Physics, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China)

( Received 22 January 2016; revised manuscript received 28 March 2016 )

## Abstract

The mobility edges which separate the localized energy eigenstates from the extended ones exist normally only in three dimensional systems. For one-dimensional systems with random on-site potentials, one never encounters mobility edges, where all the eigenstates are localized. However, there are two kinds of 1D systems such as correlated disordered models, and the systems of exponentially decaying hopping kinetics, features of mobility edges at some specific values become possible. We study in this paper the properties of the mobility edges in a one-dimensional p-wave superfluid on an incommensurate lattice with exponentially decaying hopping kinetics. Without the p-wave superfluid, the system displays a single mobility edge, which separates the extended regime from the localized one at a certain energy. Without the exponentially decaying hopping term, the system displays a phase transition from a topological superconductor to an Anderson localization at a certain disorder strength, where no mobility edge exists. We are interested in the influence of the p-wave superfluid on the mobility edge. By solving the Bogoliubov-de Gennes equation, the eigenvalues and the eigenfunctions are obtained. In order to identify the extending or the localized properties of the eigenvectors, we define an inverse participation ratio  $IPR$ . For an extended state,  $IPR_n \sim 1/L$  which goes to zero at a large  $L$ , and for a localized one,  $IPR_n$  being constant. Therefore, the IPR can be taken as a criterion to distinguish the extended state from the localized one, while the mobility edge is defined as the boundary between two different states. We find that, with a p-wave superfluid, the system changes from a single mobility edge to a multiple one, and the number of mobility edges increases with the increased superfluid pairing order parameter. To further obtain the energy or the location of the mobility edge, we investigate the scaling behavior of wave functions by using a multifractal analysis, which is calculated through the scaling index  $\alpha$ . The minimum value of the index, with the values  $\alpha_{\min} = 1$ ,  $0 < \alpha_{\min} < 1$ , and  $\alpha_{\min} = 0$ , mean the extended, critical, and localized states, respectively. For the two consecutive states, the minima of the scaling index  $\alpha_{\min}$  when extrapolating to the large size limit between 0 and 1 signal the mobility edge. By exploring the corresponding Bogoliubov quasi-particle wave functions for the system under open boundary conditions together with the multifractal analysis for the system under periodic boundary conditions, we identify two mobility edges for the system of the p-wave superfluid pairing. Furthermore, we will investigate how the existence of the mobility edges influences the p-wave superfluid, and identify the phase diagram at the given parameters. We will in the future try to understand the relationship between the topological superfluid and the mobility edges.

**Keywords:** p-wave superfluid, mobility edges, multifractal analysis

**PACS:** 71.23.Ft, 71.23.An

**DOI:** 10.7498/aps.65.117101

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11374266), the Program for New Century Excellent Talents in University, and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. Z15A050001).

† Corresponding author. E-mail: [gaoxl@zjnu.edu.cn](mailto:gaoxl@zjnu.edu.cn)