

一类离散时间广义系统的迭代学习控制

曹伟 郭媛 孙明

Iterative learning control of a class of discrete-time singular system

Cao Wei Guo Yuan Sun Ming

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 120201 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.120201

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.120201>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I12>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

自主协同系统的宏观稳定机理研究

Macroscopic stable mechanism of autonomous cooperative system

物理学报.2015, 64(10): 100202 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.100202>

切换系统的异步镇定: 相邻模型依赖平均驻留时间

Asynchronous stabilization of switched systems: Adjacent mode-dependent average dwell time

物理学报.2015, 64(5): 050201 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.050201>

多无人机协同的稳定控制机理研究

Study on stability control mechanism of multiple unmanned aerial vehicle cooperative system

物理学报.2014, 63(22): 220202 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.220202>

不确定因素下永磁同步电动机系统的混沌鲁棒控制

Chaotic robust control of permanent magnet synchronous motor system under uncertain factors

物理学报.2014, 63(22): 220203 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.220203>

基于迭代学习的离散切换系统故障估计

Fault estimation for discrete switched system based on iterative learning

物理学报.2014, 63(18): 180202 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.180202>

一类离散时间广义系统的迭代学习控制*

曹伟† 郭媛 孙明

(齐齐哈尔大学计算机与控制工程学院, 齐齐哈尔 161006)

(2016年3月6日收到; 2016年3月21日收到修改稿)

针对一类离散时间广义系统, 提出了一种离散迭代学习控制算法. 首先, 通过非奇异变换将离散时间广义系统分解为正常离散状态方程和代数方程的形式. 然后, 利用上一次迭代学习获得的前一时刻误差和当前时刻误差来修正上一次的控制量, 从而获得下一次迭代学习的新控制量, 并对算法的收敛性进行了理论证明, 给出了算法收敛的充分条件. 研究表明, 所提算法能够在有限时间区间内实现系统状态对期望状态的完全跟踪. 最后, 通过仿真算例进一步验证了所提算法的有效性.

关键词: 广义系统, 迭代学习控制, 非奇异变换, 状态跟踪

PACS: 02.30.Yy, 42.82.Fv, 45.90.+t

DOI: 10.7498/aps.65.120201

1 引言

广义系统又称为隐式系统或奇异系统, 是一类更一般化, 并有着广泛应用背景的动力系统. 广义系统与正常系统相比因能较好地描述系统物理特性而成为描述与刻画许多实际系统的有力工具. 因此, 广义系统理论经过近30年的蓬勃发展, 已经取得了众多瞩目的研究成果^[1-6]. 纵观已有的研究成果可以发现, 在对广义系统的分析与综合问题的研究中广泛采用线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)方法. 这就需要已知系统的精确模型信息, 而实际系统往往会受到各种干扰和不确定性及非线性因素的影响, 很难获得精确的数学模型. 此外, 由于针对奇异系统给出的LMI条件往往含有等式约束或半定LMI, 从而也会给LMI的求解带来许多不便.

迭代学习控制(iterative learning control, ILC)的起源是由日本学者Uchiyama^[7]在1978年首次用日文以显式形式描述出来的, 后来Arimoto等^[8]于1984年首次用英文介绍了这种方法. 其主要思想是针对具有重复运动性质的被控系统, 通过对被

控系统不断进行控制尝试, 利用以前的系统实际输出和期望轨迹产生的偏差信号逐次对不理想的控制信号进行修正, 从而获得新的控制信号, 实现在有限时间区间内对期望轨迹的完全跟踪. 由于迭代学习控制器结构简单, 便于工程实现, 其设计无须知道被控对象精确的模型信息, 且仅需要较少的计算量和较少的先验知识, 便能处理含有强非线性和不确定环节的受控系统. 因此, 迭代学习控制理论及其应用在过去的三十多年中取得了丰硕的研究成果. 在目前有关迭代学习控制的研究成果中, 绝大多数成果都是针对正常系统进行研究的^[9-16]. 相比之下, 由于在对广义系统进行稳定性分析时, 既要考虑其稳定性, 又要考虑其正则性和因果性, 而这个问题在正常系统中是不出现的. 因此, 关于广义系统的迭代学习控制研究逊色很多, 时至今日此方面的文献也是凤毛麟角^[17-21]. 如, 文献^[17]通过对广义系统进行标准分解, 讨论了含脉冲快子系统的迭代学习控制问题; 文献^[18]提出了一种混合型迭代学习控制算法, 解决了一类连续广义系统的状态跟踪问题; 文献^[19]针对线性定常广义系统利用时间加权范数性质, 通过Frobenius范数给出

* 国家自然科学基金青年科学基金(批准号: 61100103)和齐齐哈尔大学青年教师科研启动基金重点项目(批准号: 2014k-Z15)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: yiyuqq168@163.com

了两种闭环迭代学习控制算法的收敛条件. 然而这些成果都是针对连续广义系统进行的迭代学习控制研究, 关于离散广义系统的迭代学习控制算法研究目前还未见相关报导. 本文之所以重点讨论离散广义系统的迭代学习控制问题, 除上述分析之外, 主要还有以下两个原因: 第一, 信息的存储在连续系统中是比较困难的事情, 而在离散迭代学习控制中却比较容易实现; 第二, 随着计算机的普及, 越来越多的被控对象成为了采样系统, 将它们描述为离散系统更加方便.

综上所述, 为了解决在有限时间区间上一类离散广义系统的状态跟踪问题, 本文提出了一种离散迭代学习控制算法. 具体实施步骤如下: 首先通过非奇异变换将一类离散时间广义系统分解成正常状态方程和代数方程的形式, 相应地离散广义系统的 n 维状态向量 \mathbf{x} 也被分解为 r 维状态向量 \mathbf{x}_1 和 $n - r$ 维状态向量 \mathbf{x}_2 两部分, 其中 r 为广义系统奇异矩阵 \mathbf{E} 的秩; 然后再利用第 k 次迭代时 \mathbf{x}_1 对其期望状态在 $t + 1$ 时刻的跟踪误差和 \mathbf{x}_2 对其期望状态在 t 时刻的跟踪误差, 来修正第 k 次迭代时的控制量, 从而得到第 $k + 1$ 次迭代学习的新控制量; 给出了算法的收敛条件, 并通过理论分析和仿真实验证明了所提算法随着迭代次数的增加可以实现在有限时间区间内完全跟踪期望状态的任务.

2 问题描述

考虑在有限时间区间上执行重复任务的离散时间广义系统

$$\mathbf{E}z_k(t+1) = \mathbf{A}z_k(t) + \mathbf{B}u_k(t), \quad (1)$$

式中, $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是奇异矩阵, 即 $\text{rank} \mathbf{E} = r < n$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 均为实数矩阵, $z_k(t) \in \mathbb{R}^n$, $u_k(t) \in \mathbb{R}^m$ 分别是系统的状态向量和控制向量, 重复运行的有限时间区间为 $t \in [0, T]$, 下标 k 为迭代学习次数. 假设离散广义系统 (1) 是正则且因果的, 即存在标量 s 使得 $\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) \neq 0$, 并且有 $\deg(\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})) = \text{rank} \mathbf{E}$. 由 $\text{rank} \mathbf{E} = r < n$ 可知, 对于离散广义系统 (1) 存在非奇异矩阵 $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 使得 $\mathbf{PEQ} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 其中 \mathbf{I}_r 是 r 维单位矩阵. 做线性变换 $z_k(t) = \mathbf{Q}x_k(t)$, 则系统 (1) 可变换为

$$\mathbf{PEQ}x_k(t+1) = \mathbf{PAQ}x_k(t) + \mathbf{PB}u_k(t). \quad (2)$$

令

$$\begin{aligned} \mathbf{PAQ} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}, \\ \mathbf{A}_{12} &\in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}, \quad \mathbf{A}_{21} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times r}, \\ \mathbf{A}_{22} &\in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}, \quad \mathbf{PB} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}_1 &\in \mathbb{R}^{r \times m}, \quad \mathbf{B}_2 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times m}, \\ \mathbf{x}_k(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1k}(t) \\ \mathbf{x}_{2k}(t) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{x}_{1k}(t) &\in \mathbb{R}^r, \quad \mathbf{x}_{2k}(t) \in \mathbb{R}^{n-r}, \end{aligned}$$

则系统 (2) 可变换为如下两个方程:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{1k}(t+1) &= \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_{1k}(t) + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_{2k}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{u}_k(t), \quad (3) \\ 0 &= \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_{1k}(t) + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_{2k}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}_k(t), \quad (4) \end{aligned}$$

其中, (3) 式为正常离散状态系统, (4) 式为代数系统.

假设 1 \mathbf{A}_{22} 可逆.

假设 2 对于给定的期望目标 $\mathbf{x}_d(t)$, 存在唯一的理想控制输入 $\mathbf{u}_d(t)$, 满足

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{1d}(t+1) = \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_{1d}(t) + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_{2d}(t) \\ \quad + \mathbf{B}_1\mathbf{u}_d(t), \\ 0 = \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_{1d}(t) + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_{2d}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}_d(t). \end{cases} \quad (5)$$

假设 3 系统 (3) 和 (4) 的初始定位操作满足

$$\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_d(0), \quad k = 0, 1, \dots$$

针对满足假设条件 1—3 的系统 (3) 和 (4), 设计的迭代学习控制算法如下:

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{u}_k(t) + \mathbf{L}_1\mathbf{e}_{1k}(t+1) + \mathbf{L}_2\mathbf{e}_{2k}(t), \quad (6)$$

式中, $\mathbf{L}_1 \in \mathbb{R}^{m \times r}$ 和 $\mathbf{L}_2 \in \mathbb{R}^{m \times (n-r)}$ 为学习增益矩阵, $\mathbf{e}_{1k}(t+1) = \mathbf{x}_{1d}(t+1) - \mathbf{x}_{1k}(t+1)$ 为第 k 次迭代学习时系统状态 \mathbf{x}_1 对期望状态 \mathbf{x}_{1d} 在 $t + 1$ 时刻的跟踪误差, $\mathbf{e}_{2k}(t) = \mathbf{x}_{2d}(t) - \mathbf{x}_{2k}(t)$ 为第 k 次迭代学习时系统状态 \mathbf{x}_2 对期望状态 \mathbf{x}_{2d} 在 t 时刻的跟踪误差.

现在的控制任务是, 在学习增益矩阵 \mathbf{L}_1 和 \mathbf{L}_2 满足什么条件时, 利用设计的迭代学习控制算法 (6) 来激励系统 (3) 和 (4), 随着迭代次数的增加可使系统的状态 $\mathbf{x}_k(t)$ 在 $t \in [0, T]$ 上完全跟踪期望轨迹 $\mathbf{x}_d(t)$.

3 收敛性分析

为了便于算法(6)的收敛性证明,在此先介绍如下定义.

定义 1 离散时间向量函数 $\mathbf{h} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的 λ 范数定义为

$$\|\mathbf{h}(t)\|_\lambda = \sup_{t \in [0, T]} \{\alpha^{-\lambda t} \|\mathbf{h}(t)\|\},$$

其中, $\lambda > 0$ 且 $\alpha > 1$.

根据上述分析,下面给出本文的主要结果.

定理 1 对于满足假设条件 1—3 的系统(3)和(4),采用设计的算法(6)进行控制时,如果学习增益矩阵满足

$$\|I - L_1 \tilde{B}_1 + L_2 \tilde{B}_2\| = \rho < 1, \quad (7)$$

式中, $\tilde{B}_1 = B_1 - A_{12} \tilde{B}_2$, $\tilde{B}_2 = A_{22}^{-1} B_2$, 则系统状态 $\mathbf{x}_k(t)$ 随着迭代次数的增加,在有限时间区间 $[0, T]$ 上一致收敛于期望轨迹 $\mathbf{x}_d(t)$, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k(t) = \mathbf{x}_d(t)$ 在 $[0, T]$ 上一致成立.

证明 因为 A_{22} 可逆,所以由(4)式,可得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{2k}(t) &= -A_{22}^{-1} A_{21} \mathbf{x}_{1k}(t) - A_{22}^{-1} B_2 \mathbf{u}_k(t) \\ &= -\tilde{A}_{21} \mathbf{x}_{1k}(t) - \tilde{B}_2 \mathbf{u}_k(t), \end{aligned} \quad (8)$$

式中, $\tilde{A}_{21} = -A_{22}^{-1} A_{21}$, $\tilde{B}_2 = A_{22}^{-1} B_2$. 将(8)式代入(3)式,可得

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}_{1k}(t+1) \\ &= A_{11} \mathbf{x}_{1k}(t) + A_{12} \left[-\tilde{A}_{21} \mathbf{x}_{1k}(t) - \tilde{B}_2 \mathbf{u}_k(t) \right] \\ &\quad + B_1 \mathbf{u}_k(t) \\ &= \left(A_{11} - A_{12} \tilde{A}_{21} \right) \mathbf{x}_{1k}(t) \\ &\quad + \left(B_1 - A_{12} \tilde{B}_2 \right) \mathbf{u}_k(t). \end{aligned} \quad (9)$$

令 $\tilde{A}_{11} = A_{11} - A_{12} \tilde{A}_{21}$, $\tilde{B}_1 = B_1 - A_{12} \tilde{B}_2$, 则(9)式可改写为

$$\mathbf{x}_{1k}(t+1) = \tilde{A}_{11} \mathbf{x}_{1k}(t) + \tilde{B}_1 \mathbf{u}_k(t), \quad (10)$$

再根据(6)式,可得

$$\Delta \mathbf{u}_{k+1}(t) = \Delta \mathbf{u}_k(t) - L_1 \mathbf{e}_{1k}(t+1) - L_2 \mathbf{e}_{2k}(t), \quad (11)$$

式中, $\Delta \mathbf{u}_k(t) = \mathbf{u}_d(t) - \mathbf{u}_k(t)$. 由 $\mathbf{e}_{1k}(t+1) = \mathbf{x}_{1d}(t+1) - \mathbf{x}_{1k}(t+1)$, 并根据(9)式,可得

$$\mathbf{e}_{1k}(t+1)$$

$$\begin{aligned} &= \left(A_{11} - A_{12} \tilde{A}_{21} \right) \mathbf{x}_{1d}(t) \\ &\quad + \left(B_1 - A_{12} \tilde{B}_2 \right) \mathbf{u}_d(t) \\ &\quad - \left(A_{11} - A_{12} \tilde{A}_{21} \right) \mathbf{x}_{1k}(t) \\ &\quad - \left(B_1 - A_{12} \tilde{B}_2 \right) \mathbf{u}_k(t) \\ &= \left(A_{11} - A_{12} \tilde{A}_{21} \right) \left[\mathbf{x}_{1d}(t) - \mathbf{x}_{1k}(t) \right] \\ &\quad + \left(B_1 - A_{12} \tilde{B}_2 \right) \left[\mathbf{u}_d(t) - \mathbf{u}_k(t) \right] \\ &= \left(A_{11} - A_{12} \tilde{A}_{21} \right) \mathbf{e}_{1k}(t) \\ &\quad + \left(B_1 - A_{12} \tilde{B}_2 \right) \Delta \mathbf{u}_k(t) \\ &= \tilde{A}_{11} \mathbf{e}_{1k}(t) + \tilde{B}_1 \Delta \mathbf{u}_k(t), \end{aligned} \quad (12)$$

再由(8)式,可得

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{2k}(t) &= \mathbf{x}_{2d}(t) - \mathbf{x}_{2k}(t) \\ &= -\tilde{A}_{21} \mathbf{x}_{1d}(t) - \tilde{B}_2 \mathbf{u}_d(t) \\ &\quad + \tilde{A}_{21} \mathbf{x}_{1k}(t) + \tilde{B}_2 \mathbf{u}_k(t) \\ &= -\tilde{A}_{21} \left[\mathbf{x}_{1d}(t) - \mathbf{x}_{1k}(t) \right] \\ &\quad - \tilde{B}_2 \left[\mathbf{u}_d(t) - \mathbf{u}_k(t) \right] \\ &= -\tilde{A}_{21} \mathbf{e}_{1k}(t) - \tilde{B}_2 \Delta \mathbf{u}_k(t). \end{aligned} \quad (13)$$

将(12)式和(13)式代入(11)式,可得

$$\begin{aligned} &\Delta \mathbf{u}_{k+1}(t) \\ &= \Delta \mathbf{u}_k(t) - L_1 \left[\tilde{A}_{11} \mathbf{e}_{1k}(t) + \tilde{B}_1 \Delta \mathbf{u}_k(t) \right] \\ &\quad + L_2 \left[\tilde{A}_{21} \mathbf{e}_{1k}(t) + \tilde{B}_2 \Delta \mathbf{u}_k(t) \right] \\ &= \Delta \mathbf{u}_k(t) - \left(L_1 \tilde{B}_1 - L_2 \tilde{B}_2 \right) \Delta \mathbf{u}_k(t) \\ &\quad - \left(L_1 \tilde{A}_{11} - L_2 \tilde{A}_{21} \right) \mathbf{e}_{1k}(t) \\ &= \left(I - L_1 \tilde{B}_1 + L_2 \tilde{B}_2 \right) \Delta \mathbf{u}_k(t) \\ &\quad - \left(L_1 \tilde{A}_{11} - L_2 \tilde{A}_{21} \right) \mathbf{e}_{1k}(t) \\ &= G \Delta \mathbf{u}_k(t) + H \mathbf{e}_{1k}(t), \end{aligned} \quad (14)$$

式中, $G = I - L_1 \tilde{B}_1 + L_2 \tilde{B}_2$, $H = L_2 \tilde{A}_{21} - L_1 \tilde{A}_{11}$. 又根据(12)式和假设 3, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{1k}(t) &= \tilde{A}_{11}^t \mathbf{e}_{1k}(0) + \sum_{j=0}^{t-1} \tilde{A}_{11}^{t-j-1} \tilde{B}_1 \Delta \mathbf{u}_k(j) \\ &= \sum_{j=0}^{t-1} \tilde{A}_{11}^{t-j-1} \tilde{B}_1 \Delta \mathbf{u}_k(j). \end{aligned} \quad (15)$$

将(15)式代入(14)式,则有

$$\Delta \mathbf{u}_{k+1}(t)$$

$$= \mathbf{G}\Delta\mathbf{u}_k(t) + \mathbf{H} \sum_{j=0}^{t-1} \tilde{\mathbf{A}}_{11}^{t-j-1} \tilde{\mathbf{B}}_1 \Delta\mathbf{u}_k(j). \quad (16)$$

对(16)式两边取范数, 可得

$$\begin{aligned} \|\Delta\mathbf{u}_{k+1}(t)\| &\leq \|\mathbf{G}\| \|\Delta\mathbf{u}_k(t)\| \\ &+ \|\mathbf{H}\| \|\tilde{\mathbf{B}}_1\| \sum_{j=0}^{t-1} \|\tilde{\mathbf{A}}_{11}^{t-j-1}\| \|\Delta\mathbf{u}_k(j)\|. \end{aligned} \quad (17)$$

记 $\rho = \|\mathbf{G}\|$, $h = \|\mathbf{H}\|$, $b_1 = \|\tilde{\mathbf{B}}_1\|$, $a_1 = \max \left\{ \|\tilde{\mathbf{A}}_{11}^{t-j-1}\|, t \in [0, T], j \in [0, T] \right\}$, 则(17)式可改写为

$$\|\Delta\mathbf{u}_{k+1}(t)\| \leq \rho \|\Delta\mathbf{u}_k(t)\| + hb_1 a_1 \sum_{j=0}^{t-1} \|\Delta\mathbf{u}_k(j)\|. \quad (18)$$

对(18)式两边同乘 $\alpha^{-\lambda t}$, $\lambda > 1$, 并取上确界, 则有

$$\begin{aligned} &\sup_{t \in [0, T]} \left\{ \alpha^{-\lambda t} \|\Delta\mathbf{u}_{k+1}(t)\| \right\} \\ &\leq \rho \sup_{t \in [0, T]} \left\{ \alpha^{-\lambda t} \|\Delta\mathbf{u}_k(t)\| \right\} \\ &+ hb_1 a_1 \sup_{t \in [0, T]} \left\{ \alpha^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{t-1} \|\Delta\mathbf{u}_k(j)\| \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

再根据 λ 范数定义, 由(19)式, 可得

$$\begin{aligned} &\|\Delta\mathbf{u}_{k+1}(t)\|_\lambda \\ &\leq \rho \|\Delta\mathbf{u}_k(t)\|_\lambda + hb_1 a_1 \|\Delta\mathbf{u}_k(j)\|_\lambda \sum_{j=0}^{t-1} \alpha^{-\lambda(t-j)} \\ &\leq \rho \|\Delta\mathbf{u}_k(t)\|_\lambda + hb_1 a_1 \|\Delta\mathbf{u}_k(t)\|_\lambda \frac{\alpha^{-\lambda}(1-\alpha^{-\lambda t})}{1-\alpha^{-\lambda}} \\ &\leq \left[\rho + hb_1 a_1 \frac{\alpha^{-\lambda}(1-\alpha^{-\lambda t})}{1-\alpha^{-\lambda}} \right] \|\Delta\mathbf{u}_k(t)\|_\lambda. \end{aligned} \quad (20)$$

由(20)式可知, 当选取足够大的 λ 时, 则有

$$\|\Delta\mathbf{u}_{k+1}(t)\|_\lambda \leq \rho \|\Delta\mathbf{u}_k(t)\|_\lambda. \quad (21)$$

因此, 当定理1的收敛条件 $\|\mathbf{I} - \mathbf{L}_1 \tilde{\mathbf{B}}_1 + \mathbf{L}_2 \tilde{\mathbf{B}}_2\| = \rho < 1$ 时, 则有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Delta\mathbf{u}_k(t)\|_\lambda = 0. \quad (22)$$

进一步, 由 $\sup_{t \in [0, T]} \|\Delta\mathbf{u}_k(t)\| \leq \alpha^{\lambda T} \|\Delta\mathbf{u}_k(t)\|_\lambda$ 证得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \|\Delta\mathbf{u}_k(t)\| = 0, \quad (23)$$

即算法(6)是一致收敛的。

同理, 对(15)式两端取范数, 则有

$$\|\mathbf{e}_{1k}(t)\| \leq a_1 b_1 \sum_{j=0}^{t-1} \|\Delta\mathbf{u}_k(j)\|. \quad (24)$$

对(24)式两边同乘 $\alpha^{-\lambda t}$, $\lambda > 1$, 并取上确界, 则有

$$\begin{aligned} &\sup_{t \in [0, T]} \left\{ \alpha^{-\lambda t} \|\mathbf{e}_{1k}(t)\| \right\} \\ &\leq a_1 b_1 \sup_{t \in [0, T]} \left\{ \alpha^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{t-1} \|\Delta\mathbf{u}_k(j)\| \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

类似于(20)式的推导, 可得

$$\|\mathbf{e}_{1k}(t)\|_\lambda \leq a_1 b_1 \frac{\alpha^{-\lambda}(1-\alpha^{-\lambda t})}{1-\alpha^{-\lambda}} \|\Delta\mathbf{u}_k(t)\|_\lambda. \quad (26)$$

根据(22)式和(26)式可知, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_{1k}(t)\|_\lambda = 0. \quad (27)$$

类似于(23)式的推导, 则有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{e}_{1k}(t)\| = 0. \quad (28)$$

同样根据(13)式并结合(23)式和(28)式, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{e}_{2k}(t)\| = 0. \quad (29)$$

因此, 根据(28)式和(29)式及跟踪误差的定义可得到在 $t \in [0, T]$ 上 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k(t) = \mathbf{x}_d(t)$ 一致成立。

定理得证。

注1 本文中所使用的 $\|\cdot\|$ 表示1范数, 即对于元素记为 $m_{i,j}$ 的 $s \times t$ 矩阵 \mathbf{M} , 则有

$$\|\mathbf{M}\| = \max_{1 \leq j \leq t} \sum_{i=1}^s |m_{i,j}|.$$

注2 本文提出的迭代学习控制算法, 对满足假设1—3且在有限区间上执行重复任务的广义系统, 或系统干扰是周期性的, 都可以随迭代次数的增加实现实际状态对期望状态的完全跟踪. 如果系统仅存在有界测量噪声, 则迭代轨迹能收敛到期望轨迹的邻域内, 且该邻域的大小与测量噪声的界有关, 而当干扰被消除时迭代轨迹会收敛于期望轨迹。

4 仿真实验

为进一步对算法(6)的有效性进行验证, 考虑如下的一类离散广义系统

$$E\mathbf{x}_k(t+1) = A\mathbf{x}_k(t) + B\mathbf{u}_k(t), \quad (30)$$

式中,

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

采用算法(6)对广义系统(30)进行控制, 假设系统的初始状态选为 $\mathbf{x}_k(0) = [0, 0]^T$, 初始控制输入为 $\mathbf{u}_0(t) = [0, 0]^T$, 系统运行的时间为 $0 \leq t \leq 2$ s, 采样时间为 0.01 s, 期望状态轨迹选取为

$$\mathbf{x}_{1d}(t) = 5 \sin(5t), \quad \mathbf{x}_{2d}(t) = 4t^3, \quad (31)$$

学习增益矩阵选取为

$$L_1 = [3, 0]^T, \quad L_2 = [-1, -0.5]^T, \quad (32)$$

满足 $\rho = 0.8561 < 1$ 的收敛条件. 仿真结果如图1—图3所示.

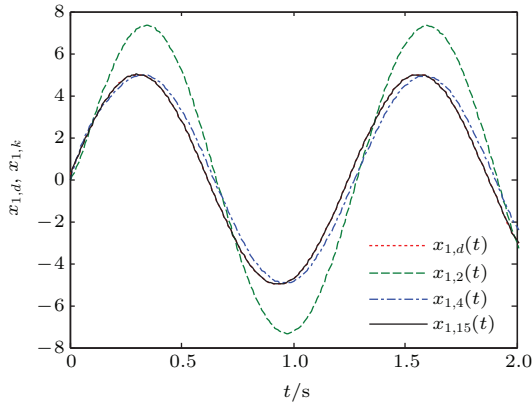


图1 (网刊彩色) 状态1的输出曲线

Fig. 1. (color online) Tracking curve of state 1.

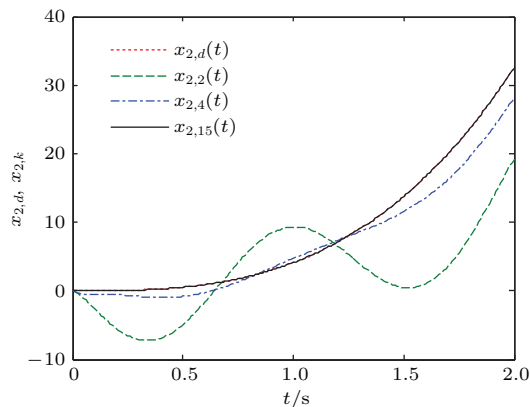


图2 (网刊彩色) 状态2的输出曲线

Fig. 2. (color online) Tracking curve of state 2.

从仿真结果图1和图2可以看出, 采用所提算法(6)控制离散广义系统时, 在有限时间区间内, 随

着迭代次数的增加可以实现系统状态完全跟踪期望状态. 同时从图3还可看出, 随迭代次数的增加系统状态的跟踪误差逐渐收敛于零. 其原因就在于, 对于满足假设条件1—3的离散广义系统, 由收敛条件(7)可知所提算法的收敛性只取决于系统参数和学习增益, 而与控制初始值的选取无关. 因此针对给定的系统, 选取的学习增益只要满足了收敛条件 $\rho < 1$, 便可以保证算法是收敛的, 同时 ρ 越小, 跟踪误差趋向于零的速度越快. 所提算法利用第 k 次迭代学习时产生的跟踪误差 $e_{1k}(t+1)$ 和 $e_{2k}(t)$, 来修正第 k 次迭代时的控制量 $\mathbf{u}_k(t)$, 从而得到第 $k+1$ 次迭代学习的新控制量 $\mathbf{u}_{k+1}(t)$. 由于算法是收敛的, 因此随着迭代次数的逐渐增加, 控制量 $\mathbf{u}_k(t)$ 便逐渐收敛于期望控制 $\mathbf{u}_d(t)$, 从而由假设2可知系统的实际状态便随迭代次数的增加逐渐收敛于期望状态.

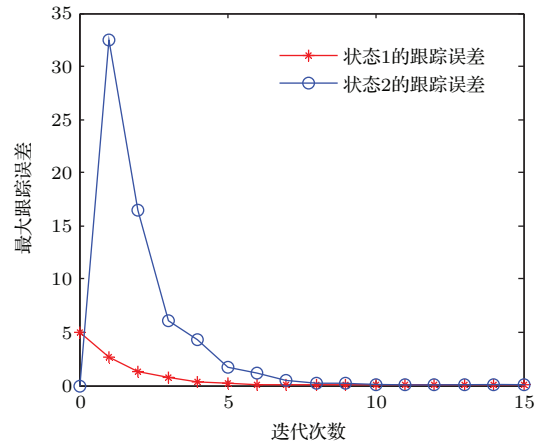


图3 跟踪误差随迭代次数的变化曲线

Fig. 3. Tracking error as iterations change.

5 结论

本文通过非奇异变换将一类离散广义系统变换成正常离散状态方程和代数方程的形式, 相应地把系统状态也分解成两部分. 随后分别利用上一次迭代学习时获得的两部分状态对其期望状态在不同时刻的跟踪误差来修正不理想的控制量, 从而获得新的控制量, 并从理论上严格证明了算法的收敛性, 给出了算法的收敛条件. 研究表明, 随着迭代次数的增加, 所提算法可使离散广义系统状态在有限时间区间内完全跟踪期望状态. 而且离散迭代学习控制器结构简单, 更便于工程实现. 此外, 根据本文思想再结合文献[22, 23], 还可以进一步在数据驱动框架下设计迭代学习观测器用以解

决广义系统的故障估计问题. 也可以参考文献 [16, 24] 研究具有马尔科夫跳变信号的切换广义系统的迭代学习控制问题.

参考文献

- [1] Lin C, Wang Q G, Lee T H 2005 *IEEE Trans. Autom. Control* **50** 515
- [2] Masubuchi I 2007 *Automatica* **43** 339
- [3] Xin Z D 2013 *IET Control Theory Appl.* **7** 2028
- [4] Zhou J, Zhang Q L, Men B 2014 *Int. J. Robust. Non-linear Control* **24** 97
- [5] Inoue M, Wada T, Ikeda M 2015 *Automatica* **59** 164
- [6] Gao Z R, Shen Y X, Ji Z C 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 120203 (in Chinese) [高在瑞, 沈艳霞, 纪志成 2012 物理学报 **61** 120203]
- [7] Uchiyama M 1978 *Trans. Soc. Instr. Control Eng.* **14** 706
- [8] Arimoto S, Kawamura S, Miyazaki F 1984 *J. Robot. Syst.* **1** 123
- [9] Yang S P, Xu J X, Huang D Q 2015 *Asian J. Control* **17** 2091
- [10] Meng D Y, Du W, Jia Y M 2015 *IET Control Theory Appl.* **9** 2084
- [11] Sun H Q, Alleyne A G 2014 *Automatica* **50** 141
- [12] Huang D Q, Xu J X, Li X F 2013 *Automatica* **49** 2397
- [13] Tan Y, Xu J X, Norrlof M 2011 *Automatica* **47** 2412
- [14] Xu J X, Jin X 2013 *IEEE Trans. Autom. Control* **58** 1322
- [15] Yin C K, Xu J X, Hou Z S 2010 *IEEE Trans. Autom. Control* **55** 2655
- [16] Cao W, Sun M 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 020201 (in Chinese) [曹伟, 孙明 2014 物理学报 **63** 020201]
- [17] Piao F X, Zhang Q L, Wang Z F 2007 *Acta Autom. Sin.* **33** 659 (in Chinese) [朴凤贤, 张庆灵, 王哲峰 2007 自动化学报 **33** 659]
- [18] Tian S P, Zhou X J 2012 *J. Syst. Sci. Math. Sci.* **32** 731 (in Chinese) [田森平, 周秀锦 2012 系统科学与数学 **32** 731]
- [19] Piao F X, Zhang Q L 2007 *Control and Decision* **22** 349 (in Chinese) [朴凤贤, 张庆灵 2007 控制与决策 **22** 349]
- [20] Li B W 2009 *J. Wuhan Univ. (Natural Sci. Edition)* **55** 391 (in Chinese) [李必文 2009 武汉大学学报(理学版) **55** 391]
- [21] Hu T, Tian S P, Luo Y B 2014 *26th Chinese Control and Decision Conference (CCDC)* Changsha, China May 31–June 2, 2014 p2412
- [22] Yin S, Luo H, Ding S 2014 *IEEE Trans. Ind. Electron.* **61** 2402
- [23] Yin S, Ding S X, Haghani A 2012 *J. Process Control* **22** 1567
- [24] Hu A H, Shao H Y, Liu D 2015 *Chin. Phys. B* **24** 098902

Iterative learning control of a class of discrete-time singular system*

Cao Wei[†] Guo Yuan Sun Ming

(College of Computer and Control Engineering, Qiqihar University, Qiqihar 161006, China)

(Received 6 March 2016; revised manuscript received 21 March 2016)

Abstract

Singular systems are also called descriptor systems. Compared with normal systems, singular systems have become one of effective tools which can describe and characterize varieties of real systems, because they can better describe physical properties of the systems. Up to now, the analyses and syntheses of singular systems have been widespread applied to linear matrix inequality (LMI) method. The method requires known systems to have accurate mathematical model information, however, real systems have difficulties in obtaining their accurate mathematical models, owing to the fact that real systems are frequently subjected to all kinds of interferences, uncertainties, and nonlinear factors. Specially, in the case of singular systems, obtained LMI conditions often have a constraint equation or LMI is semi-definite, which makes it more difficult to solve LMI. Therefore, in order to avoid the above two problems occurring in settling state tracking issue for singular systems, in the meantime, for convenience of computing control algorithm and information storage, in this paper we propose a discrete-time iterative learning control algorithm for a class of discrete-time singular system with repetitive running characteristics in finite time interval. The specific process is divided into two steps. First, the class of discrete-time singular system is decomposed into normal discrete-time state equation and algebraic equation form by nonsingular transformation. Accordingly, the singular system state is also decomposed into two parts. Among them, the dimension of the first part state is equal to singular matrix rank and another is equal to system dimension minus singular matrix rank. In addition, the control law of last iterative learning is modified by using two tracking errors at two different times: one error is real-time tracking error generated from the comparison between the first part state and its desired state and another is tracking error at a previous time generated from comparison between the second part state and its desired state. And thus a new control law of next iterative learning is obtained, such that, as for any given real singular system, its state may completely track the desired state as long as selected learning gain can satisfy the convergence condition of the algorithm. Further, the convergence of the control algorithm is theoretically proved by compression mapping method, and thus its sufficient convergence condition is given in the sense of λ -norm. The results indicate that the proposed iterative learning control algorithm can make system state realize the perfect tracking of desired state as iteration number gradually increases in finite time interval, and the convergence of the algorithm only depends on system parameters and learning gain rather than initial value of control variable. The simulation example finally verifies the effectiveness of the proposed algorithm.

Keywords: discrete-time singular systems, iterative learning control, nonsingular transformation, state tracking

PACS: 02.30.Yy, 42.82.Fv, 45.90.+t

DOI: [10.7498/aps.65.120201](https://doi.org/10.7498/aps.65.120201)

* Project supported by the Young Scientists Fund of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61100103) and the Program of Starting Support for Young Teachers of Qiqihar University, China (Grant No. 2014k-Z15).

[†] Corresponding author. E-mail: yiyuqq168@163.com