

类固态颗粒物质的剪切弹性行为测量

颜细平 彭政 何菲菲 蒋亦民

Measurement of shear elasticity of granular solid

Yan Xi-Ping Peng Zheng He Fei-Fei Jiang Yi-Min

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 124501 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.124501

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.124501>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I12>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于离散元方法的颗粒材料缓冲性能及影响因素分析

Buffer capacity of granular materials and its influencing factors based on discrete element method

物理学报.2016, 65(10): 104501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.104501>

倾斜沙漏流与颗粒休止角研究

Inclined glass-sand flow and the angle of repose

物理学报.2016, 65(8): 084502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.084502>

双分散颗粒体系在临界堵塞态的结构特征

Structural features of critical jammed state in bi-disperse granular systems

物理学报.2016, 65(2): 024502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.024502>

垂直载荷下颗粒物质的声波探测和非线性响应

Acoustic detection and nonlinear response of granular materials under vertical vibrations

物理学报.2016, 65(2): 024501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.024501>

颗粒气体团簇行为实验研究

Experimental study of clustering behaviors in granular gases

物理学报.2016, 65(1): 014502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.014502>

## 类固态颗粒物质的剪切弹性行为测量\*

颜细平 彭政† 何菲菲 蒋亦民

(中南大学物理与电子学院, 长沙 410083)

(2015年11月26日收到; 2016年3月8日收到修改稿)

利用能以极慢变形率直接剪切颗粒固体的实验装置, 测量了(玻璃珠)样品对大幅度循环剪切的力-位移曲线, 以及一个循环周期后的塑性位移残留. 发现随着循环频率的降低, 样品会从有限塑性残留的弹塑行为转变到几乎没有塑性的纯弹性行为, 同时伴随有率相关性. 该转变在剪切力幅度高达样品破坏值的90%时依然存在, 但需要极小的变形率( $10^{-5}$  Hz)或惯性数( $10^{-8}$ ). 这意味着无论是高频小幅度的声波扰动, 还是极低频大幅度的直接剪切, 静态颗粒固体都可做出纯弹性的力学响应. 在足够慢的状态变化范围里, 它仍是属于经典弹性理论范畴的一类材料. 这个弹性区域一直未被报道和关注, 可能是观测它时需要样品的变形率远比通常此类研究中所采用的慢变形还要小许多(大约两个数量级)的缘故. 理论上本文测量结果支持描述颗粒固体宏观动力学的基本方程组, 不能只有弹塑和率无关行为, 它们必须在极慢变形极限下退化为经典弹性理论, 并且在这个转变过程中表现出率相关特性.

关键词: 颗粒固体, 率相关, 弹性, 塑性

PACS: 45.70.-n, 83.80.Fg, 81.40.Jj, 83.60.Fg

DOI: 10.7498/aps.65.124501

## 1 引言

理想(或近似理想)弹性固体的应力 $\sigma_{ij}$ 和描述几何变形的应变 $\varepsilon_{ij}$ 之间总是存在固定的代数关系<sup>[1]</sup>:  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{mn})$ . 这时无论让力随时间变化去监测应变(所谓的“控制应力 stress control”实验), 还是让应变变化去监测力(“控制应变 strain control”实验), 或者它们的混合型实验, 测量的结果都会一致地落到这个仅由材料决定的弹性应力-应变关系曲线上, 并且与实验过程所控制的应力或应变的变化方式和时间快慢无关. 后者常被简称作“率无关(rate-independence)”.

软凝聚态物理领域遇到的材料的力学行为往往远比上述理想弹性来得复杂. 例如大量离散玻璃珠堆积而成的静态颗粒体, 由于能在一定应力范围内抵抗静态剪切力和支持横声波的传播<sup>[2-5]</sup>, 意味着它有弹性. 但长期以来, 人们对可否直接观测到

它的弹性应力-应变关系, 一直未能实验澄清. 这使得很多学者倾向认为颗粒固态材料的弹性关系 $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{mn})$ , 及其背后的弹性势能 $\phi = \phi(\varepsilon_{mn})$ 等都不存在, 这类材料需要一个与经典弹性原理不同的静力学理论<sup>[6,7]</sup>. 一个弹性体却没有相应的弹性应力-应变关系和势能, 从物理角度看总是不合适的.

如果上面提到的经典弹性概念是普遍适用的、并且颗粒固体也遵守它的话, 问题只能是 $\sigma_{ij}(\varepsilon_{mn})$ 难于观测的缘故. 的确, 这类材料的几何变形除了可逆的弹性贡献外, 还有其他不可逆的耗散型贡献, 诸如塑性、黏滑等. 目前文献报道的这类力学测量(例如文献<sup>[7-9]</sup>), 一般都是后者远大于前者, 弹性因干扰被淹没了. 这样看来, 为了澄清“颗粒固体是否遵循经典弹性概念”这个基础问题, 找到一个能够排除塑性和滑动的应力-应变测量方法将是有益的. 在本文中, 我们利用与文献<sup>[2]</sup>类似的剪切盒装置发现, 只要设法让样品的变形速率比文献中

\* 国家自然科学基金(批准号: 10904175, 11274390)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zpeng@csu.edu.cn

常用的慢剪切试验速率再减小两个数量级,就能有效地大幅减低塑性干扰,在剪切力接近其破坏峰值的90%的大幅度循环变化范围内,观测到接近弹性的、几乎没有塑性残余的应力-应变行为.这时对应的弹性模量在数量级上也与根据声速测量估测的模量一致.该结果倾向支持颗粒固体的确具有纯弹性的应力-应变关系.

传统物理领域里提到的线性或非线性弹性应力-应变关系,都是与测试方法、样品历史等无关的材料性质,其中含有表征固体物性的基本材料常数.早在二十年前颗粒物理刚开始兴起的时候,就曾有过否认弹性理论对其适用的观点<sup>[6]</sup>.虽然目前弹性的重要性已被逐步认识<sup>[10]</sup>,其理论和表征仍不清楚.出现这个问题的一个可能的原因,是很多人一直期望找到一个当应变出现非弹性成分时也有有效的应力-应变理论关系.但非弹性的应变部分与样品初值边值情况的关系可能特别复杂,其测量值对不同的样品几何、制备历史、测量方法、环境温度湿度和微小振动等,可能会异常敏感,使得实验应该具有“可重复性”这样的基本要求都很难,甚至不能保障.试图从这样的实验中得到和发现表征材料弹性物性的常数或材料关系,显然是困难、甚至不可能的.为了建立能统一描述这些含非弹性应变实验测量值的应力-应变理论,人们做了各种尝试和努力<sup>[7]</sup>,但至今仍没有一个满意的共识结果.我们相信,如果把注意力放到接近纯弹性的应力-应变测量值的研究上,情况有望获得明显改善.

按照现代凝聚态理论的观点,弹性来自材料的空间平移对称破缺,弹性声波是这个破缺后涌现出来的Goldstone模.实验上测定弹性应力-应变关系及其背后的弹性势能,将有助于评判这个普适思想对颗粒固体是否仍保持有效.特别是目前有“整体论”的观点<sup>[11,12]</sup>认为,像“对称破缺”这类突变现象是不能从材料的微观或细观基元之间的相互作用力出发通过数学推导出来的.原则上两个玻璃珠之间作用力情况是可测定的.如将这些细观的、二体颗粒作用力的测量值输入到(例如)DEM数值软件,可算出大量玻璃珠系统的弹性和声速等宏观物性.考察这些基于微观测量值给出的计算结果是否与宏观物性的测量值一致,也是实验检验这个“整体论”思想成立与否的一个办法.当然这要求实验在微观和宏观方面,都能测量得足够精确和全面.这在目前还远不能做到,尽管有人<sup>[13]</sup>宣称仅

从玻璃材料的杨氏模量和泊松比值就能计算出玻璃珠颗粒体系的宏观声速行为.另外,近年来相继报道了一些尝试用一个弹性势能描述各种声速实验<sup>[2-4,13-15]</sup>以及微小弹性扰动下的线性响应系数(刚度或柔度)的工作<sup>[16]</sup>.这个势能可否与本文直接测量的弹性应力-应变关系一致,也是认证经典弹性理论对颗粒物质是否有效的一个重要内容.如果有效,意味着所有这些宏观的、不受塑性和黏滞等耗散过程干扰影响的测量结果都可以用一个弹性势能来统一定量描述.综合目前文献和本文结果我们倾向认为,诸如声速、刚度和纯弹性的应力-应变关系等平移对称破缺后的固体物性,似乎都可直接测量.但定量上它们是否与弹性理论一致,还需今后更多的细致分析和测量工作.

第2部分首先介绍本文采用的控制应力型剪切盒的实验装置和实验结果.我们的主要测量结果是:随着应力变化速率数量级的减小,颗粒固体的剪切力学将从广为熟悉的不可逆塑性-弹性行为,经过一个率相关的过渡区,明显地向基本可逆的纯弹性行为靠拢.这里影响观测纯弹性的最大困难是样品的宏观应力(也可能还有密度等)有不均匀性.在剪切时某些局部(内部或边界)可能因达到了库仑静力屈服点,发生一些并不导致样品整体破坏的局部崩塌现象.我们实验上看到的几个清晰的突然滑动(或称滑阻stick-slip),很可能就是这样的几个相对较大的崩塌所致.在极慢剪切速率下这种大崩塌的数量很少,甚至可以设法降低到(直到样品破坏前)只发生一两次,但完全排除似乎很难.除了这类导致剪切盒突发不连续移动的滑阻型大崩塌外,微弱的小崩塌肯定大量存在,其对测量的影响表现为不可逆的连续塑性应变.幸运的是,无论大的、还是微弱崩塌,经过极缓慢剪切过程的触发后,与其伴随的各种非均匀模式就被清除掉了,样品似乎会自组织到那些不容易发生崩塌的非均匀状态.这意味着可以通过几个缓慢大幅度的循环剪切除去这些崩塌隐患,让样品进入到一个可观测其纯弹性的“初值-边值”状态.注意,尽管如此,剪切盒“初值-边值”的非均匀情况仍然复杂,残留的小滞洄行为也不能彻底排除.另外,虽然本文成功地排除了塑性干扰,但观测到的弹性仍有明显的阻尼耗散行为.考虑到这些情况,进行简单弹性分析的意义不大(即将样品内的应力和应变都视为均匀的计算).因此我们在第3部分中将仅限于结合颗粒

固体-流体动理论(GSH)方程(参见文献[17])对测量结果做一些定性的讨论.

测量力位移曲线仍是当前研究颗粒物质力学性质的一个主要方法. 最近文献[18]报道了玻璃橡胶混合颗粒系统的直剪测量. 文献[19]提出了一种改进的单轴固结装置(uniaxial oedometer), 并建议可从其测得的力位移曲线卸载区段的斜率, 估测颗粒固体样品的弹性模量. 这两个工作中, 测量时样品的变形速度分别为0.6—6.0 mm/min和0.5 mm/min, 测得曲线都有大量的塑性成分. 与它们比较, 本文实验的特点是变形速率要小2—3个数量级, 这时方可观测到几乎没有塑性的阻尼弹性力学曲线. 就我们所知, 针对颗粒固体弹性做这样的直接力学测量, 以前还未曾报道过. 这些新发现, 将有助于彻底解决这类材料弹性性质的全面表征和测定问题.

## 2 实 验

实验装置见图1, 它与文献[2]使用的装置类似, 即直接用上下两个矩形盒子直接剪切颗粒固体样品. 但有两点值得指出的区别: 1) 本文给出的大部分测量结果的样品顶部加载只有约3 kg, 而文献上大多为几十公斤, 前人避免用小加载的一个原因也许是担心颗粒系统在小加载时容易发生测量涨落大、重复性不好的问题, 但这在本文工作里并没有遇到, 我们相信本文结果在定性上对任何顶部加载都是对的, 但定量上, 如从“弹塑”到“纯弹性”转变的具体速率值、样品破坏时的临界剪切力等, 多少都会与顶部加载有关; 2) 传统的剪切盒测试, 大都是令一个盒子匀速运动的“控制应变”型实验(例如文献[2]). 本文的电控平移台与上剪切盒之间是用一根系数 $k$ 的弹簧连接, 然后对上盒的水平力 $F$ 、水平和垂直位移 $x, z$ 做实时测量. 这时样品的实际运动会变得灵活和复杂, 严格讲既不是百分之百的“应变控制”, 也不是百分之百的“应力控制”. 原则上当 $k$ 趋向无穷大, 和趋向0时, 分别对应这两个情况. 因此调节弹簧的 $k$ 值, 可连续地从“应变控制”过渡到“应力控制”. 以下报道的都是用小 $k$ 值弹簧(软弹簧)得到的测试结果. 这时拉动弹簧的速度和距离, 都将远远大于上剪切盒的, 实验基本属于“应力控制”的情形. 采用软弹簧的一个重要作用, 是它能使样品状态发生变化的速率比通常这类实验

中的慢剪切速率再减小2—3个数量级, 这恰好是本文关心的、研究接近0的极慢速率下的“弹塑-纯弹性”转变问题所需要的.

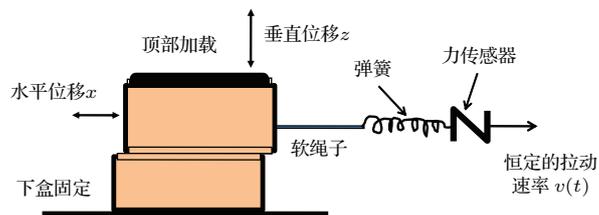


图1 实验装置示意图

Fig. 1. Sketch of experiment setup.

实验样品为直径约5 mm的球形玻璃珠, 上下剪切盒由厚度为20 mm的铝块围成, 剪切盒截面内侧为边长100 mm的正方形; 下盒固定, 高50 mm. 每次测量, 制备的初始样品总高度115 mm, 其中上盒填充的颗粒高度61 mm, 上下盒之间缝隙约4 mm. 顶部加载砝码3 kg(或6 kg). 弹簧与上盒用软绳子连接(可减少剪切拉动时对样品的振动扰动). 水平力 $F$ 由一个精度1 g, 采样频率12.5 Hz的力传感器测得. 上盒的水平位移 $x$ 和垂直位移 $z$ , 分别由两个测量精度为1  $\mu\text{m}$ 的激光测距仪(型号: MTI LTC-050-10)测得.

每次试验的样品制备方式如下: 首先用卡片将上下剪切盒的缝隙间距固定在约4 mm, 再均匀地撒入玻璃珠到预定高度; 为防止颗粒外漏, 上下剪切盒之间的缝隙应小于粒径; 在此前提下将它取大一些, 使得剪切带的宽度尽量大些, 尽可能地减小尺寸效应的影响; 剪切带导致的复杂性是剪切盒装置无法避免的, 目前还不能定量评估; 但可以用其他复杂装置(如简单剪切(simple shear)或三轴装置(triaxial setup))来回避和降低它的影响; 加上顶部荷载后, 敲打(tapping)几次让样品变得尽量密实, 然后小心地去掉固定上下盒缝隙距离的卡片(保证上盒没有任何可察觉的移动); 之后把软绳子仔细地连接到上剪切盒处, 开启与力传感器右端固定的一个电控平移台, 对弹簧右端进行匀速的向右拉动, 直到样品开始垮塌破坏(failure), 或在临近破坏发生前向左反向移动放松弹簧, 做多次“拉动-放松”的循环剪切测量. 另外我们还考虑了让平移台做“拉-停-再拉”交替变化十来次后, 再达到破坏的“断续剪切”型测试. 垮塌前上下两部分样品的剪切移动很小.

任何实验室都不可避免地存在一定的环境振动扰动. 环境本底振动可能激发样品的颗粒温度  $T_g$ , 引发对弹性测量不利的塑性和滑阻运动 (特别是当样品顶部加载比较小时). 为尽可能地避免这些影响, 整个装置固定在一个沉重的大型光学台上. 另外用“软绳子”连接弹簧与样品盒也有一定的避震作用 (可以减小弹簧和拉动它的电控平移台在运动时对样品的振动).

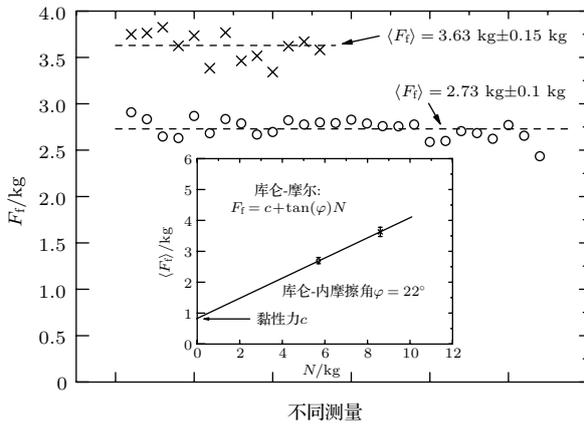


图2 不同测试情况的临界破坏水平拉力  $F_f$  的涨落 (o) 顶部砝码 3 kg; (x) 顶部砝码 6 kg; 插图为平均破坏拉力随剪切面上的法向压力的变化

Fig. 2. Fluctuation of the horizontal critical failure force  $F_f$ , measured with various loading ways. (o) Top load 3 kg; (x) Top load 6 kg. Inset shows linear trend for variation of the averaged failure force with top load.

随着  $F$  从零增加到一定值时, 剪切盒会突然垮塌, 这时的临界拉力称作样品破坏强度  $F_f$ . 我们的测量显示, 样品的制备历史、剪切速度的快慢、“连续”还是“断续”拉动等, 对  $F_f$  的影响均不大. 图2是多次不同剪切情况的破坏强度, 顶部砝码 3 kg 时其平均值和方差为  $2.73 \text{ kg} \pm 0.1 \text{ kg}$ , 6 kg 时为  $3.63 \text{ kg} \pm 0.15 \text{ kg}$ , 涨落的确不大. 图中每次测量的样品都按照上述方法制备. 不同测量的剪切时间 (即从开始到破坏的时间)  $t_f$ , 快剪切时只有十几秒, 极慢剪切时长达 1500 s. 拉动方式有连续的, 也有断续的. 另外还有将制备好的样品, 经过几次“拉动-放松”的循环剪切后, 再剪切至破坏的情况. 无论如何, 测得的  $F_f$  值基本一样. 如果用摩尔-库仑的线性公式来解释这两个顶部加载下的临界破坏力, 得到的库仑内摩擦角约为  $22^\circ$  (图2插图), 符合库仑角的典型值. 另外该直线偏离原点, 大多研究者都倾向将其归结于空气中的水汽导致样品颗粒表面有微弱黏湿的缘故. 当然也不排除在小  $N$

时, 剪切破坏力随它的变化会偏离直线, 向下弯曲到原点. 这是一个值得实验澄清的细节问题, 但技术上有一定难度, 需要专门处理 (如干燥空气下样品容易出现静电干扰,  $N$  趋向 0 时上剪切盒会掉下等问题). 注意这里的  $N$  是剪切面上的垂直压力, 即顶部砝码、上剪切盒 (约 1.63 kg) 和其中的颗粒 (约 1.08 kg) 的重量之和.

图3的上下两排分别是对按照前述方法制备的两个样品, 做“拉动-放松”12次循环慢剪切测试的结果. 注意循环变化的拉力峰值为  $F_0 = 2.34 \text{ kg}$ , 相当接近图2的破坏值 (大于平均  $F_f$  的 85%). 两次测试的循环周期  $T$  相差 2 个数量级: 下图的  $T = 23 \text{ s}$ , 样品状态的变化速度属于文献上常见的慢剪切盒测试, 其剪切力-位移曲线也与文献报道定性符合, 特别是经历每次循环后样品都有明显的残留变形. 以下我们将这个文献中通常采用的样品变形速率下的结果称作“常规慢剪切”. 它对应的惯性数  $I = \dot{\epsilon} \sqrt{m/(Pd)}$  的数量级为  $0.3 \times 10^{-5}$ , 与一些研究颗粒固体弹性的模拟计算所考虑的数量级符合, 例如文献 [10] (取下列值的估算结果: 国际 SI 单位下, 玻璃密度  $\rho_{\text{玻璃}} = 2600$ , 玻璃珠直径  $d = 0.005$ , 质量  $m = 1.7 \times 10^{-4}$ , 压强  $P \approx$  顶部加载/剪切盒面积  $\approx 30/0.1^2 = 3000$ , 剪切应变  $\epsilon \approx$  水平位移的振幅/ $d \approx 0.05/5 \sim 10^{-2}$ , 应变率  $\dot{\epsilon} \approx \epsilon/\text{半个循环周期} \approx 10^{-3}$ ).

图3上图的循环周期  $T = 2892 \text{ s}$ , 是本文特别考虑的“极慢剪切”测试, 对应非常小的惯性数:  $I = 10^{-8} - 10^{-9}$ . 它与下图的常规慢剪切有两个明显的不同: 一个是后面几个循环的残留变形基本没有了 (已经小于本文实验可测量的微米量级); 另一个是对刚制备好的样品, 在开始一两个循环中有三次明显的滑动大变形, 即滑-阻现象. 由于上下两个实验的差别只是循环速率的不同, 可以认为这个“力-位移”循环曲线的残留变形出现的“从有到无”转变是“速率驱动”的缘故, 属于“率相关 rate-dependence”现象. 注意极慢剪切时, 塑性主要集中在开始的六七个循环中出现. 另外后面几个循环有明显的小滞回圈现象, 严格讲还不算是纯弹性, 应归类为“阻尼弹性”行为 (由于“阻尼弹性”的形变是周期性可恢复的, 为了强调与不可恢复的残留塑性形变的区别, 在本文中我们将此“阻尼弹性”行为也一并称作“纯弹性行为”进行讨论).

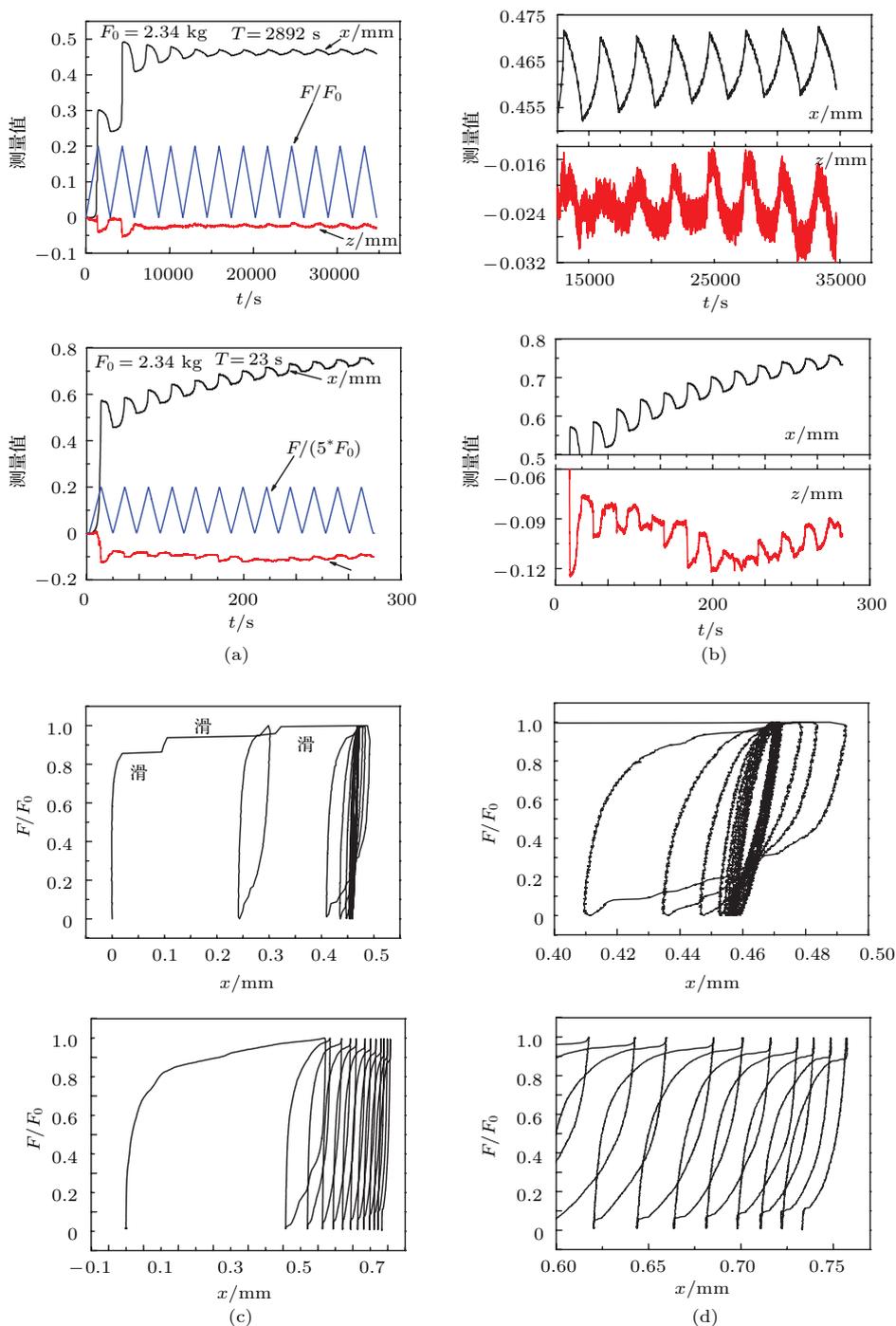


图3 (网刊彩色) 极慢的(上)和常规的(下)12次循环慢剪切测试对照图 (a)实时监测的拉力, 上剪切盒的水平 and 垂直位移曲线  $F(t), x(t), z(t)$ ; (b) 最后几个循环的  $x(t), z(t)$  放大图; (c) 水平力-位移曲线; (d) 最后几个循环的力-位移放大图  
 Fig. 3. (color online) Comparison of an extremely slowly cyclic shear load experiment (up) and a conventional slow one (down) 12 cycles were measured for each: (a) Temporal evolution of horizontal force, displacement and vertical displacement  $F(t), x(t), z(t)$ ; (b) amplified evolutions  $x(t), z(t)$  of the last circles; (c) the corresponding horizontal force-displacement curve; (d) amplified force-displacement curve of the last circles.

引言中提到, 开始几个循环出现的滑阻和塑性变形很可能都是样品的零星大崩塌和大量密集微弱小崩塌所致. 它们取决于样品的初-边值情况, 实验上不能被控制和重复. 相比之下, 极慢剪切时的后面几个“阻尼弹性”循环圈应该有一定的实验

可重复性. 对比图3与图4所示的另一次测量结果, 可以看到开始几个循环圈形状, 和滑阻情况等的确没有可重复性. 另外对下图的常规慢剪切, 两次测量的残留变形也不太一样. 相对而言, 上图中的“阻尼弹性”循环圈有较好的一致性. 图5是所有测

试的最后一个循环的放大图, 其中的3, 4, 5是极慢剪切时的阻尼弹性圈.

从图5的阻尼弹性圈, 可估算样品的弹性系数数量级为  $k = F_0/x_0 \approx 2.3 \text{ N}/\mu\text{m}$  (取  $F_0$  约 2.3 kg,  $x_0 \approx 10 \mu\text{m}$ ). 除以剪切盒的横截面积约  $0.01 \text{ m}^2$ , 再乘以剪切带的宽度约  $0.005 \text{ m}$ , 得样品的弹性模量数量级为  $E \approx 10^6 \text{ Pa}$ , 对应的声速

数量级为  $v \approx \sqrt{E/\rho} \approx 10\text{--}100 \text{ m/s}$  (取样品密度  $\rho \approx 1500 \text{ kg}/\text{m}^3$ ). 这些数量级符合文献报道的声速测量, 支持这里看到的应力-应变行为接近“纯弹性”的说法. 注意图5中的阻尼弹性圈3, 4, 5仍有差异, 并不完全重合. 其原因很可能是剪切盒应力的非均匀性等复杂因素, 在重复试验时不能保持完全一样.

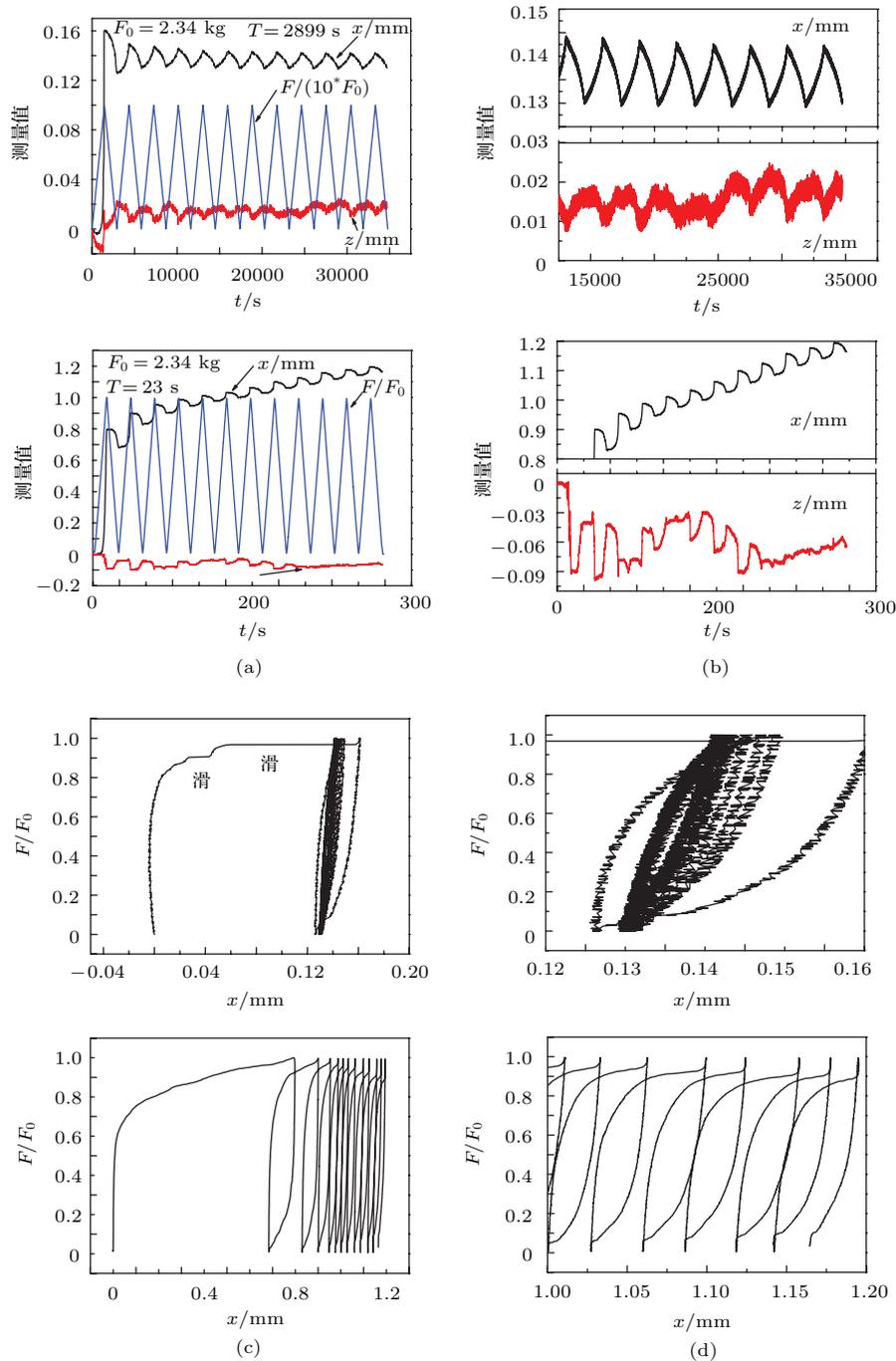


图4 (网刊彩色) 与图3一样的重复试验结果  
 Fig. 4. (color online) A repeat measurement result same as the Fig. 3.

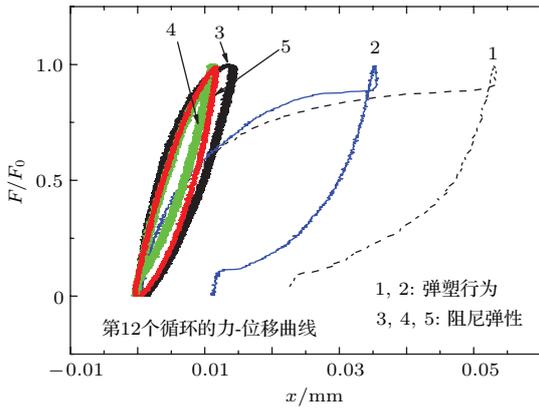


图5 (网刊彩色) 图3和图4的最后一次循环曲线的放大对比图 1, 图4下; 2, 图3下; 3, 图3上; 4, 图4上; 它们的顶部砝码都是 3 kg. 曲线5的顶部砝码6 kg,  $F_0 \sim 3.37$  kg的极慢循环剪切; 常规慢剪切的曲线1, 2有明显的残余塑性, 而极慢剪切的3, 4, 5是几乎没有残余塑性的阻尼弹性圈

Fig. 5. (color online) Amplified force-displacement curves of the last circles shown in the 1, Fig. 4 down; 2, Fig. 3 down; 3, Fig. 3 up; 4, Fig. 4 up; of which top load is 3 kg; the curve 5 is an extremely slow measurement result with 6 kg top load (its corresponding failure force is about 3.37 kg). Notably the curves (1, 2), which are conventional slow measurements, show clearly plastic residual displacements after circles. The extremely slow ones (3, 4, 5) are however almost closed, showing typical elastic damping behaviors without plasticity.

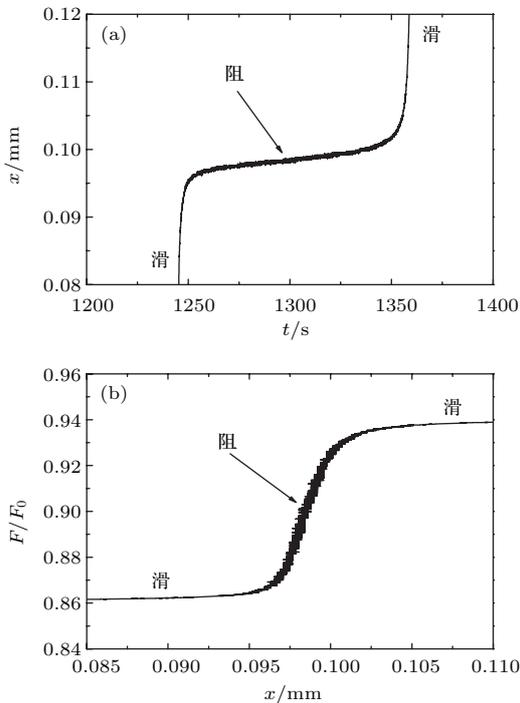


图6 图3上排(c)的第一个滑阻运动模式(发生在时间  $t = 1300$  s)的放大图 (a) 水平位移  $x$  随时间  $t$  的变化曲线; (b) 水平拉力  $F$  随水平位移  $x$  的变化曲线

Fig. 6. Amplified curve of the first stick-slip mode shown in the Fig. 3(c)(up), occurred at  $t = 1300$  second: (a) Horizontal displacement  $x$  versus time  $t$ ; (b) horizontal force  $F$  versus  $x$ .

从图3(c)和图4(c)可见, 极慢剪切时发生的滑阻现象只在头两个循环中出现(主要在第一个循环). 相对整个剪切时间, 这些滑阻都是不到一秒的快速过程, 因此可看作是一种只与新制备样品的力学情况有关的、复杂的短暂力学失稳现象. 图6是一个典型滑阻的上剪切盒力学运动曲线. 其他滑阻的曲线的形状也都与此类似, 只是发生的时间和强度都有随机性, 实验无法控制.

无论常规还是极慢剪切, 图3(a), (b)和图4(a), (b)所示的水平位移都是很清晰的可重复曲线. 相比之下垂直位移的变化小很多, 并且涨落大. 常规剪切时, 测量的垂直位移完全没有规律性. 极慢剪切时, 能看到它伴随循环剪切有波动变化的趋势, 但具体规律目前还难以判断.

### 3 讨 论

迄今为止, 人们普遍认为对颗粒固体在循环剪切下的塑性残留具有率无关性. 也就是说, 塑性残留与剪切的快慢无关, 减小它的惟一途径只能是减小剪切力循环变化的幅度  $F_0$ . 按照文献 [20] 的模拟计算结果, 当力幅度减小一个数量级, 塑性残留可减小 2—3 个数量级. 这意味着只有当力幅度足够小时, 才能观测到颗粒固体的弹性行为, 即颗粒固体只对微弱扰动作弹性相应. 因此测量弹性性质多采用扰动极小的声学方法. 本文实验结果表明, 这个率无关性的观点具有局限性, 并不能将它直接延伸到静态情况. 实际上即使对固定的大振幅(如本文的接近 90% 破坏强度的幅度), 颗粒固体也会在极慢但并不为零的速率时, 出现率相关行为, 开始从弹塑性到纯弹性的转变. 由于这个转变发生的剪切变形率出乎意料地小(本文图3“常规慢剪切”估算的变形率为  $10^{-3}$  Hz. 考虑转变在比它慢两个数量级的“极慢剪切”出现, 我们可大致认为转变的变形率在  $10^{-5}$  Hz 左右), 长期以来被忽略了. 它表明在如图7所示的密度-频率空间里, 颗粒固体不只是弹塑性一个区域, 还应该有一个纯弹性区域, 并且在两者过渡时一定有率相关行为.

因此描述颗粒固体的动-静转变动力学的物理方程, 例如 GSH [7,17], 必须反映这个率相关性. 下面将看到它的确如此. GSH是一个基于经典热力学的宏观动力学理论, 即一组能统一描述颗粒物质在图7所示的所有物态区域及其过渡的时空演化的

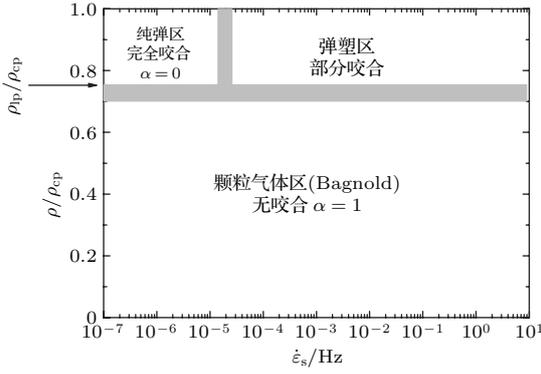


图7 颗粒物质不同物态区示意图 密度低于最松无规堆积密度  $\rho_{1p}$  时是没有咬合弹性的 Bagnold 类气态区, 高于它时有因咬合导致的弹性, 但随变形率的高低分为弹塑和纯弹两个区域, 之间的过渡呈率相关性,  $\rho_{cp}$  是最密无规堆积密度

Fig. 7. An illustration of three phase regimes of granular matter, in space of shear rate and mass density. When density is smaller than the loosest packing density  $\rho_{1p}$ , we have a gas-like regime without grain gearing, where the Bagnold scaling holds. For density higher than it the gearing may appear, which leads elasticity. Depending on the shear rate this is divided into a elastoplastic regime and a purely elastic regime, both are rate independent but transition between them is rate dependent,  $\rho_{cp}$  is the closest packing density.

偏微分方程. 虽然原则上可用它直接分析计算本文的剪切实验, 但考虑到样品情况的复杂性, 这里仅给出一个初步的定性讨论. 首先我们忽略样品的空间不均匀, 仅计算时间演化, 并假设其密度不变. 另外忽略应力  $\sigma_{ij}$ , 弹应变  $u_{ij}$ , 几何应变率  $\dot{\epsilon}_{ij}$  等的矩阵复杂性, 仅考虑它们的剪切强度  $\sigma_s$ ,  $u_s$ ,  $\epsilon_s$  的时间动力学. 这时的 GSH 偏微分方程简化为下面的常微分方程 [17]:

$$\frac{d}{dt}u_s = (1 - \alpha)\dot{\epsilon}_s - \lambda T_g u_s, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}T_g = \eta \dot{\epsilon}_s^2 - \gamma_0 T_g - \gamma_1 T_g^2, \quad (2)$$

其中  $T_g$  是颗粒温度, 其他符号都是反映迁移行为的材料参数. 注意除描述颗粒之间咬合程度的  $\alpha$  外, 其他参数只与密度有关, 样品的密度变化不大时它们均可视作常数.  $\alpha$  一般随着颗粒固体的  $T_g$  从零开始增加时, 有一个从  $\alpha = 0$  的完全咬合到大约  $\alpha = 0.7$  的部分咬合的跃变. 可以简单地用

$$\alpha = \frac{0.7T_g}{T_g + T_0} \quad (3)$$

来模拟它, 其中的常数  $T_0$  大致为这个跃变发生的位置. 不难看出, 如果忽略这个  $\alpha$  跃变和常数  $\gamma_0$ ,

方程 (1), (2) 具有率无关性. 而这两个参数的出现, 会带来率相关性. 这意味着本文实验看到的纯弹性到弹塑性转变可以用 (1), (2), (3) 式来定性理解. 这时可将决定剪切力的弹应变  $u_s$  对应于实验的水平拉力  $F$ , 将剪切几何应变  $\epsilon_s$  对应于测得的水位位移  $x$ .

引入量纲 1 的时间  $\tilde{t} = \lambda\gamma_0 t/\gamma_1$ , 剪切速率  $\tilde{\epsilon}_s = \gamma_1 \dot{\epsilon}_s/(\lambda\gamma_0)$  和颗粒温度  $\tilde{T}_g = \gamma_1 T_g/\gamma_0$ , 可以将 (1), (2), (3) 式写成

$$\frac{d}{d\tilde{t}}u_s = \left(1 - \frac{0.7\tilde{T}_g}{\tilde{T}_g + \tilde{T}_0}\right)\tilde{\epsilon}_s - \tilde{T}_g u_s, \quad (4)$$

$$\frac{d}{d\tilde{t}}\tilde{T}_g = \tilde{\eta}\tilde{\epsilon}_s^2 - \tilde{\gamma}\left(1 + \tilde{T}_g\right)\tilde{T}_g, \quad (5)$$

其中  $\tilde{\eta} = \lambda\eta$ ,  $\tilde{\gamma} = \gamma_1/\lambda$ . 实验时循环变化的水平拉力可以用周期变化的弹应变来模拟, 例如  $u_s = A[1 - \cos(2\pi f t)]$ . 将它代入 (4), (5) 式后, 可数值解出剪切几何应变的时间演化  $\epsilon_s(\tilde{t})$ , 由此得到一个周期变化的塑性残留变形  $\delta\epsilon_s = \epsilon_s(\tilde{t} = 1/f) - \epsilon_s(\tilde{t} = 0)$ . 图 8 是取量纲 1 常数  $\tilde{\eta} = 4 \times 10^7$ ,  $\tilde{\gamma} = 100$ ,  $\tilde{T}_0 = 10^{-3}$ , 和  $u_s$  的振幅  $A = 10^{-4}$  时计算的残留变形随频率  $f$  的变化曲线, 它的确是一个纯弹性到弹塑性的转变. 如取  $\gamma_0 = 10^{-3}$  Hz 可将这个转变的位置放到本实验看到的  $f \sim 10^{-5}$  Hz 处. 图 8 中插图是一个纯弹的应力-应变曲线与一个弹塑的对照情况, 除没有阻尼现象外它们也与图 5 相似. 弹性阻尼的一个可能来源是固体黏滞. 它在 GSH 理论中也存在 (详见文献 [7, 17]), 但这里出于简单起见, 没有考虑应力的详细公式, 只是用弹应变来反映它, 其中的黏滞应力部分相应地被忽略了.

基于上述讨论可以认为 GSH 在定性上符合本文的实验结果. 我们期望今后更加仔细的系统测量能有助于定量标定 GSH 的某些材料参数, 特别是其中的导致率相关的那些迁移系数. 这里的主要困难将是如何分析处理因剪切盒非均匀性带来的复杂影响, 会涉及空间非均匀情况的 GSH 计算问题. 在目前的 GSH 方程里, 颗粒固体的塑性都是因颗粒温度  $T_g$  而激发的, 并且当这个温度足够小时样品将进入几乎没有塑性的纯弹性状态. 另外颗粒温度又主要在变形率的驱动下产生, 故 GSH 特别强调即使对振幅很大 (接近破坏) 的循环剪切, 仅通过降低剪切速率也能出现从弹塑性到纯弹性的转变. 注意本文工作仅在定性上对此给予了正面的支持.

在不能可靠评估样品状态的各种非均匀性的影响情况下, 尽管可以用方程 (1)—(3) (及其修正补充

等) 很好地模拟出实验结果, 得到的材料参数值也是需要谨慎对待的.

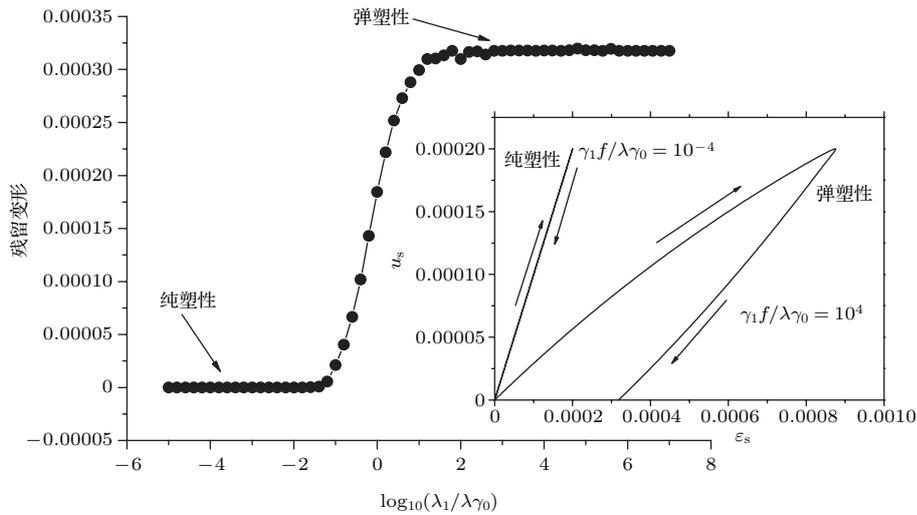


图8 GSH 方程 (3), (4) 给出的塑性残留变形随应力循环频率的变化, 插图为低频纯弹性情况与高频弹塑性的应力-应变曲线对照

Fig. 8. Variation of plastic residual deformation with frequency of cyclic shear stress, calculated from the GSH equations (3), (4). Inset: the calculated stress-strain curves for a purely elastic case with low cyclic frequency, and an elastoplastic case with high cyclic frequency.

## 4 结 论

目前人们大都认为颗粒固体在大幅度循环剪切时的力-位移曲线具有率无关性, 相应的塑性残留位移因此也是率无关的. 考虑到这不属于经典弹性物理行为, 而静态颗粒固体应该是纯经典弹性体, 该率无关性不应延续到完全静态情况. 这意味着当它从率  $\neq 0$  的动态向率  $= 0$  的静态转变时, 应该出现一个率相关的转变区. 本文通过直接剪切颗粒固体 (玻璃珠样品) 确认了这个转变现象的存在. 主要实验结果有: 1) 不受剪切力幅度的影响, 在剪切力循环变化幅度高达 90% 样品被剪切破坏的临界力时, 这个转变仍然存在, 因此颗粒固体不仅对诸如声波等小振幅扰动作有弹性响应, 对大剪切力变化也有弹性行为; 2) 对这个大剪切幅度, 转变发生在大致  $10^{-5}$  Hz 的极慢变形率上, 对应  $10^{-8}$  的极小惯性数, 这很可能是它长期未被注意到的原因; 3) 新制备样品的开始几个循环有明显的滑阻运动和微弱崩塌带来的塑性行为, 但在后续的循环中它们会基本消失掉, 这是该转变被成功观测的一个关键; 4) 剪切破坏时的临界力基本不受各种不同测试情况的影响, 对应的库仑内摩擦角可以看做材料常数; 5) 由于 GSH 理论含有一些导致率相关的迁移

系数, 这些结果可以用该理论来初步定性地解释.

由于颗粒系统可以处于部分静止、部分运动状态 (如表面流动内部静止的沙堆), 理论上需要建立一组能够统一描述动静转变的动力学方程. 本文实验表明它不应该是率无关的, 必须含有在转变区域不能忽略的率相关项. 考虑到动静转变的重要性, 我们将进一步仔细测量这个转变区域的各种力学曲线随应变率的变化情况, 以期能在定量上对这些率相关项有更多的了解.

感谢 Mario Liu 的有益讨论.

## 参考文献

- [1] Landau L D, Lifshitz E M 1986 *Theory of Elasticity* (New York: Pergamon Press)
- [2] Zhang Q, Li Y C, Hou M Y, Jiang Y M, Liu M 2012 *Phys. Rev. E* **85** 031306
- [3] Bonneau L, Andreotti B, Clément E 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 118001
- [4] Bonneau L, Andreotti B, Clément E 2007 *Phys. Rev. E* **75** 016602
- [5] Jia X Caroli C Velicky B 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 1863
- [6] Wittmer J, Claudin P, Cates M, Bouchaud J 1996 *Nature* **382** 336
- [7] Sun Q C, Hou M Y, Jin F 2011 *Physics and Mechanics of Granular Materials* (Beijing: Sciences Press) (in Chi-

- nese) [孙其诚, 厚美瑛, 金峰 2011 颗粒物质物理与力学 (北京: 科学出版社)]
- [8] Wichtmann T 2005 *Ph. D. Dissertation* (Bochum: Ruhr-University Bochum)
- [9] Schwedes J 2003 *Granular Matter* **5** 1
- [10] Agnolin I, Roux J N 2007 *Phys. Rev. E* **76** 061304
- [11] Laughlin R B, Pines D 2000 *Proc. Natl. Acad. Sci.* **97** 28
- [12] Laughlin R B 2004 *A Different Universe* (Changsha: Hunan Science and Technology Press) (in Chinese) [王文浩 译 2008 不同的宇宙 (长沙: 湖南科学技术出版社)]
- [13] Makse H A, Gland N, Johnson D L, Schwartz L 2004 *Phys. Rev. E* **70** 061302
- [14] Mayer M, Liu M 2010 *Phys. Rev. E* **82** 042301
- [15] Zheng H P, Jiang Y M, Peng Z, Fu L P 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 214502 (in Chinese) [郑鹤鹏, 蒋亦民, 彭政, 符力平 2012 物理学报 **61** 214502]
- [16] Jiang Y M, Liu M 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 148001
- [17] Jiang Y M, Liu M 2015 *Eur. Phys. J. E* **38** 15
- [18] Chen Q, Wang Q H, Zhao C, Zhang Q, Hou M Y 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 154502 (in Chinese) [陈琼, 王青花, 赵闯, 张祺, 厚美瑛 2015 物理学报 **64** 154502]
- [19] Ma Q W, Sandali Y, Zhang R N, Ma F Y, Wang H T, Ma S P, Shi Q F 2016 *Chin. Phys. Lett.* **33** 038101
- [20] Alonso-Marroquin F, Herrmann H J 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 054301

## Measurement of shear elasticity of granular solid\*

Yan Xi-Ping Peng Zheng<sup>†</sup> He Fei-Fei Jiang Yi-Min

(School of Physics and Electronics, Central South University, Changsha 410083, China)

( Received 26 November 2015; revised manuscript received 8 March 2016 )

### Abstract

Using a direct shear-box capable of very low shearing rate, we measure the force-displacement curve of cyclic, large-amplitude shear, and also the total plastic displacement residual after each cycle, for samples of glass beads. As the shear rate decreases, we observe a transition from normal, elastoplastic behavior to pure elastic behavior, with reducing residual, or total plastic, displacement after each cycle. Remarkably, this transition is also observed for large amplitude of the cyclic shear, up to 90% of the failure value. The force-displacement relation is necessarily rate-dependent during this transition. These experimental results demonstrate that granular solids may respond in a purely elastic manner, both for low amplitude force oscillations of high frequencies (such as sound) and for large amplitude ones of low frequencies, implying that the granular matter has a purely elastic regime, in which the theory of elasticity holds fully true. This regime has been overlooked in the literature, probably because its deformation rate is nearly two orders of magnitude lower than those typically used. Theoretically, the present measurements support granular solid hydrodynamics, or the fact that strong deviation from elastoplastic dynamics and rate independence take place in the low frequency limit, with a rate-dependent transition to the classic theory of elasticity.

**Keywords:** granular solid, rate-dependence, elasticity, plasticity

**PACS:** 45.70.-n, 83.80.Fg, 81.40.Jj, 83.60.Fg

**DOI:** 10.7498/aps.65.124501

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10904175, 11274390).

† Corresponding author. E-mail: zpeng@csu.edu.cn