

基于超指向性多极子矢量阵的水下低频声源方位估计方法研究

郭俊媛 杨士莪 朴胜春 莫亚泉

Direction-of-arrival estimation based on superdirective multi-pole vector sensor array for low-frequency underwater sound sources

Guo Jun-Yuan Yang Shi-E Piao Sheng-Chun Mo Ya-Xiao

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), 65, 134303 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.134303

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.134303>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I13>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

一种加权稀疏约束稳健 Capon 波束形成方法

[Robust Capon beamforming with weighted sparse constraint](#)

物理学报.2016, 65(10): 104303 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.104303>

基于时频分析的多目标盲波束形成算法

[A blind beamforming algorithm for multitarget signals based on time-frequency analysis](#)

物理学报.2015, 64(11): 114302 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.114302>

一种新的稳健波束形成算法及其一维搜索策略

[A new robust adaptive beamforming and the one-dimensional search strategy](#)

物理学报.2014, 63(15): 154303 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.154303>

基于半定规划和秩-1分解的稳健波束形成

[Robust adaptive beamforming based on semi-definite programming and rank-one decomposition](#)

物理学报.2013, 62(18): 184302 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.184302>

# 基于超指向性多极子矢量阵的水下低频声源方位估计方法研究\*

郭俊媛<sup>1)2)</sup> 杨士莪<sup>1)2)</sup> 朴胜春<sup>1)2)†</sup> 莫亚泉<sup>3)4)</sup>

1) (哈尔滨工程大学水声工程学院, 哈尔滨 150001)

2) (哈尔滨工程大学, 水声技术重点实验室, 哈尔滨 150001)

3) (中国科学院声学研究所, 北京 100190)

4) (中国科学院水声环境特性重点实验室, 北京 100190)

(2016年1月12日收到; 2016年4月22日收到修改稿)

针对水下低频声源的方位估计问题, 基于基元紧密排列的二维矢量阵, 建立了一种超指向性波束形成方法. 根据矢量基元差分运算构建各阶多极子模型, 获得了几乎与频率无关的模式函数, 并经加权计算可在低频条件下实现超指向性波束, 以解决阵列孔径对波束性能的限制. 同时, 结合输出信噪比最大准则所得波束, 分析了超指向性波束形成算法的稳定性与波导的影响程度, 探索模式阶数与阵列参数的选取原则. 通过阵列性能的仿真计算与实际阵列的测量数据表明, 该算法可在小尺寸阵列孔径下获得良好的阵列波束, 兼具了水下线型超指向性阵和环形超指向性阵的优点, 可有效实现水下低频声源的水平方位估计; 且波束性能可通过调节模式阶数与基元间距以达到最佳, 并受水下声波多途与频散效应影响有限.

**关键词:** 超指向性矢量阵, 低频声源方位估计, 多极子模式

**PACS:** 43.60.Fg, 43.58.Fm, 43.30.Wi

**DOI:** 10.7498/aps.65.134303

## 1 引言

随着船舶减震降噪技术的提高, 水下声探测逐渐向低频段发展, 然而声呐基阵的阵增益、角分辨能力与基阵孔径之间的矛盾严重制约着低频声探测技术的应用<sup>[1,2]</sup>. 相对于常规阵列, 基元紧密排列的超指向性阵列可在单空间点获取更多声场信息, 突破了基阵孔径对阵增益与角分辨力的限制<sup>[3]</sup>. 理论上已证明  $n$  个无指向性传感器排列的超指向性阵, 其指向性因子最高可达  $n^2$ <sup>[4]</sup>. 因此, 基于超指向性阵理论, 开展具有高阵列增益、高角度分辨力特点的小尺寸阵列波束形成技术研究成为实现水下基阵低频声探测的有效途径.

虽早在 20 世纪 40 年代超指向性波束形成原理

便已提出<sup>[5,6]</sup>, 但直到近 20 年, 得益于传感器制作工艺及电子运算能力的提高, 超指向性阵及其波束形成技术才得以实现, 并由此应用至水声和音频、通信、雷达及生物医学等领域<sup>[7-12]</sup>. 因工作频段原因与实际可操作性, 超指向性阵波束形成技术在高频、超高频领域中应用较为成熟, 而在中、低频的水声领域, 却仍处于研究阶段. 目前超指向性基阵布阵方式主要有三种: 基于差分原理的线型阵<sup>[13,14]</sup>、基于相位模式原理的环形阵<sup>[15,16]</sup>和基于本征波束分解方法的环形阵<sup>[17]</sup>. 基于差分原理的线型阵, 其原理稳定可靠, 易于实现, 同时也由此建立了许多用以降低电噪声和基元不匹配影响的优化算法<sup>[18-20]</sup>; 但作为端射阵, 其主响应方向固定, 无法用于导向, 故应用受到较大限制. 基于相位模式原理的环形阵则将基元的接收信号函数展

\* 国防科技重点实验室基金 (批准号: 9140C200103120C2001) 和国家自然科学基金重点项目 (批准号: 11234002) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: piaoshengchun@hrbeu.edu.cn

开为傅里叶级数形式,可获得任意形状的超指向性波束;但其算法较为复杂,且空间采样及级数截取易引入一定误差<sup>[3,17]</sup>.相较于上述两种超指向性阵,基于本征波束分解方法的环形阵通过噪声协方差矩阵特征值计算,获得解析的最优波束;但其鲁棒性随着基阵工作频率的降低而下降<sup>[3]</sup>.虽然基于阵列增益、指向性图、前后波瓣比及主瓣宽度等参数最优准则<sup>[21]</sup>是设计超指向性阵的主要参考;然而,对于复杂多变的水声波导,其频散效应、多途效应及环境的随机性等因素都将严重影响超指向性阵及其波束形成技术的有效性和可靠性,特别是对于几百赫兹的低频频段与浅海海域情况,其波导影响更为显著<sup>[22]</sup>.故对于水下波导中的低频声探测,建立超指向性基阵及其波束形成技术时,算法的适应性与可靠性也是主要考虑因素之一.

以上所指超指向性基阵皆为多基元情况,而单一的矢量传感器,可以说是最为简单的超指向性阵列,已在水下探测中得到了较为广泛的研究和应用<sup>[23,24]</sup>.相对于标量声压传感器,矢量传感器可拾取包含更多信息的振速矢量场,具有天然的“8”字形指向性,可有效抑制水中各向同性噪声的影响<sup>[25]</sup>.显然,以矢量传感器为基元,建立高阶超指向性基阵及其波束形成算法将具有更好的目标方位估计性能和噪声抑制能力<sup>[23,26]</sup>,更适用于复杂海洋环境下的声源定位.同时,相较于水声中超指向性矢量阵的初步探索<sup>[27,28]</sup>,矢量传感器为基元的超指向性阵及其波束形成技术已在空气声学中得到了相对广泛的研究<sup>[29,30]</sup>,进一步验证了矢量阵的高方位分辨能力.

根据以上论述,相较于在高频领域的广泛研究与应用,以矢量传感器为基元、适应于水下低频声探测的超指向性阵列及其稳健的波束形成技术研究较少.为此,本文综合考虑现有水下超指向性阵列及其波束形成方法的优势,基于矢量传感器与多极子理论<sup>[26]</sup>,建立可满足水下低频声探测要求的超指向性声矢量阵波束形成算法.全文结构大致如下:首先,由差分原理,构建多极子形式的模态函数,获得矢量传感器为基元且适应于低频情况的波束形成算法,建立超指向性声矢量阵模型;其次,针对最大信噪比准则所得波束,分析本文算法的性能,阐述其在水下低频探测时的优势,解决阵列孔径与阵增益、角分辨力之间的矛盾;然后,根据差分近似误差与浅海波导环境的影响分析,对算法的适

应性和可靠性进行研究,说明本文所建超指向性基阵及其波束形成技术在实现水下低频环境中声源方位估计的适应性;最后给出结论.

## 2 理论模型

### 2.1 矢量基元下的多极子理论

针对水下声源的水平方位估计问题,考虑置于 $xy$ 平面内的二维声矢量阵,如图1所示.

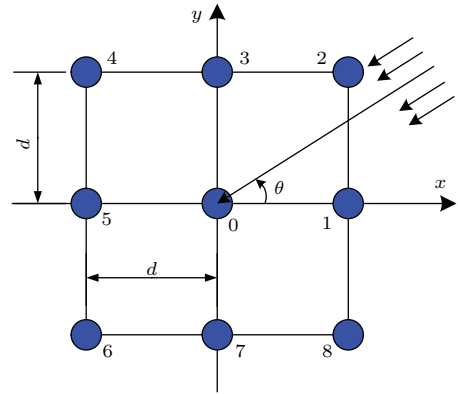


图1 超指向矢量阵几何示意图

Fig. 1. The schematic diagram of superdirective vector sensor array.

对于该基阵,其基元间距 $d$ 与波数之间满足 $kd \ll 1$ ,且每一基元可同时实现空间声压和水平振速矢量的测量.为避免矢量信号计算的复杂性,令矢量基元内部坐标与阵列坐标一致.若远场简谐平面波以 $\theta$ 方向入射至该基阵时,作为参考基元的0号基元,其声压响应为 $p_0$ ,则位于空间坐标 $(g, h)$ 处的第 $j$ 号( $j = 1, 2, \dots, 8$ )基元接收的声压和水平振速分量可表示为

$$p_j(g, h) = p_0 \exp[ik(g \cos \theta + h \sin \theta)], \quad (1a)$$

$$v_{jx}(g, h) = p_0 V \cos \theta \times \exp[ik(g \cos \theta + h \sin \theta)], \quad (1b)$$

$$v_{jy}(g, h) = p_0 V \sin \theta \times \exp[ik(g \cos \theta + h \sin \theta)], \quad (1c)$$

其中, $V$ 为振速信号的幅度常数,由尤拉方程<sup>[2]</sup>计算得到;而矢量通道与声压通道共点接收声场信息,且各通道相对参考点的时延差相同.忽略灵敏度差异,矢量通道相对声压通道只有指向性区别,令 $x$ 通道与 $y$ 通道指向性分别为

$$D_{1x}(\theta) = \cos \theta, \quad D_{1y}(\theta) = \sin \theta.$$

上述指向性  $D_{1x}(\theta)$  与  $D_{1y}(\theta)$  为偶极子形式, 也可由声压场的一阶差分近似得到, 即分别等效于  $\partial p/\partial x$  与  $\partial p/\partial y$ . 为更直观地由差分原理建立多极子形式的波束, 现以二阶差分进行说明. 在不失一般性的同时, 以图 1 阵列配置为例, 声压场的二阶差分形式可构成如下四阶极子形式:

$$\begin{aligned} M_{2p} &= [p_2(d, d) - p_8(d, -d)] \\ &\quad - [p_4(-d, d) - p_6(-d, -d)] \\ &= (2ikd)^2 p_0 \sin \theta \cos \theta \\ &= p_0 D_{2p}(\theta)/F_2(k), \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $F_2(k) = 1/(2ikd)^2$  为在  $kd \ll 1$  条件下所引入的幅度补偿因子, 由此可获得近似频率无关的四级子波束  $D_{2p}(\theta) = \sin \theta \cos \theta$ .

考虑声压场与水平振速场的表达式, 方程 (2) 可化为

$$\begin{aligned} M_{2p} &= p_0 D_{2p}(\theta)/F_2(k) \\ &= p_0 D_{1x}(\theta) D_{1y}(\theta)/F_2(k) \\ &= (2d)^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} \\ &= \frac{(2d)^2}{V} \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{(2d)^2}{V} \frac{\partial v_y}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3)$$

由该方程可以看出, 由于振速矢量本身具有偶极子指向性, 故振速通道的差分计算将降低差分的阶数, 从而理论上减小高阶差分运算的误差; 或者以相同个数的矢量基元进行差分计算时可直接构建更高阶多极子形式, 即

$$\begin{aligned} M_{3x} &= (v_{2x} - v_{8x}) - (v_{4x} - v_{6x}) \\ &= p_0 V D_x(\theta) D_{2p}(\theta)/F_2(k), \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} M_{3y} &= (v_{2y} - v_{8y}) - (v_{4y} - v_{6y}) \\ &= p_0 V D_y(\theta) D_{2p}(\theta)/F_2(k). \end{aligned} \quad (4b)$$

为便于后文高阶多极子的表述, 将上述差分所构建的多极子线性关系表示为  $f(\cdot)$  函数的形式:

$$M_{np} = f(p_i, \dots, p_j). \quad (5)$$

同时, 考虑到声压与振速分量表述形式的相似性, 有

$$\begin{aligned} M_{n+1x} &= f(v_{ix}, \dots, v_{jx}) \\ &= V D_{1x}(\theta) f(p_i, \dots, p_j), \end{aligned} \quad (6a)$$

$$M_{n+1y} = f(v_{iy}, \dots, v_{yj})$$

$$= V D_{1y}(\theta) f(p_i, \dots, p_j). \quad (6b)$$

根据方程 (5) 的表述, 由差分原理与波束形成的乘积定理可得图 1 所示阵列下声压通道所构成的其他高阶多极子形式为

$$\begin{aligned} D_{3p}(\theta) &= \cos^2 \theta \sin \theta = F_3(k) M_{3p} \\ &= F_3(k) f(p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5), \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} D_{4p}(\theta) &= \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\ &= F_4(k) M_{4p} \\ &= F_4(k) f(p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8), \end{aligned} \quad (7b)$$

其中, 幅度补偿因子  $F_n(k) = 1/(2ikd)^n$ ; 同理, 根据方程 (6a) 和方程 (6b), 水平振速矢量通道所构成的高阶多极子波束可表述成

$$D_{4x} = D_{1x}(\theta) D_{3p}(\theta) = F_3(k) M_{4x}/V, \quad (8a)$$

$$D_{4y} = D_{1y}(\theta) D_{3p}(\theta) = F_3(k) M_{4y}/V, \quad (8b)$$

$$D_{5x} = D_{1x}(\theta) D_{4p}(\theta) = F_4(k) M_{5x}/V, \quad (8c)$$

$$D_{5y} = D_{1y}(\theta) D_{4p}(\theta) = F_4(k) M_{5y}/V. \quad (8d)$$

从上述多极子模型的推导可以看出, 经过补充一定的相位因子, 即可获得几乎与频率无关的波束; 而由各阶多极子作为子波束加权合成的总波束, 同样几乎与频率无关, 表明经多极子理论所建立的波束形成算法可有效适用于水下低频声源的方位估计. 为将所获得的多极子模型推广至任意阵列形式, 同时为便于下文任意波束算法的建立, 根据方程 (3) 所示的差分与振速偏导之间的关系, 可将矢量传感器为基元下的各多极子模型归类为

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^{m+n} v_x}{\partial x^m \partial y^n} (2d)^{m+n} \\ &= \frac{p_0 V}{F_{m+n}(k)} D_x(\theta) \cos^m \theta \sin^n \theta, \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^{m+n} v_y}{\partial x^m \partial y^n} (2d)^{m+n} \\ &= \frac{p_0 V}{F_{m+n}(k)} D_y(\theta) \cos^m \theta \sin^n \theta, \end{aligned} \quad (9b)$$

其中, 常数  $V$  的定义与前文相同, 而  $F_{m+n}(k) = 1/(2ikd)^{m+n}$ .

## 2.2 超指向性波束形成算法

为根据前节多极子理论建立适应于水下低频超指向性声矢量阵的波束形成算法, 现考虑二维平

面内的任意波束  $B(k, \theta)$ , 其在  $[k_1, k_2] \times [-\pi, \pi]$  内的正交完备基函数  $\{\varphi_l(k, \theta)\}$  下可展开成

$$B(k, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \varphi_l(k, \theta), \quad (10)$$

其中,  $c_l$  表示  $\varphi_l(k, \theta)$  对应的级数展开系数, 其值为

$$\begin{aligned} c_l &= \langle \varphi_l, B \rangle \\ &= \int_{k_1}^{k_2} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_l(k, \theta) B(k, \theta) d\theta dk. \end{aligned} \quad (11)$$

针对水下声基阵的低频工作频段, 合理假定所需超指向性波束  $B(k, \theta) = B(\theta)$ , 且取  $\varphi_l(k, \theta)$  在  $k_1 < k < k_2$  范围内满足  $\varphi_l(k, \theta) = Q A_l(\theta)$ ,  $Q$  为常数, 令其值为 1, 则方程 (10) 可表示为

$$B(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l A_l(\theta). \quad (12)$$

为有效减小无穷级数的截取误差, 本文采用希尔伯特空间的正交基函数作为所需波束  $B(\theta)$  的模态函数, 即

$$\begin{aligned} A_0(\theta) &= 1, \quad A_{2\ell-1}(\theta) = \sin(\ell\theta), \\ A_{2\ell}(\theta) &= \cos(\ell\theta), \end{aligned}$$

其中, 模态函数以  $2\pi$  为周期, 且可保证级数随着模态阶数的增加而数值上快速收敛.

根据方程 (9a) 和方程 (9b) 所示, 由多极子理论所形成的波束图具有三角函数形式, 即可通过多极子模型来构建  $B(\theta)$  的模态函数  $A_0(\theta)$ ,  $A_{2\ell-1}(\theta)$  和  $A_{2\ell}(\theta)$ ; 同时将参考基元的声压通道视为 0 阶多极子, 可得

$$\begin{aligned} w_p &+ \sum_{\substack{m=0 \\ n=0}}^{m+n=L-1} \left[ \frac{(2d)^{m+n}}{p_0} \frac{\partial^{m+n} v_x}{\partial x^m \partial y^n} \right] w_{x,mn} \\ &+ \sum_{\substack{m=0 \\ n=0}}^{m+n=L-1} \left[ \frac{(2d)^{m+n}}{p_0} \frac{\partial^{m+n} v_y}{\partial x^m \partial y^n} \right] w_{y,mn} \\ &= c_0 + \sum_{\ell=1}^L c_{2\ell-1}(\theta) \sin(\ell\theta) + c_{2\ell}(\theta) \cos(\ell\theta), \end{aligned} \quad (13)$$

其中,  $w_p$  为声压通道的加权系数,  $w_{x,mn}$  为对应  $\frac{\partial^{m+n} v_x}{\partial x^m \partial y^n}$  项的系数,  $w_{y,mn}$  同理;  $L$  为  $B(\theta)$  级数截取下最高模态阶数, 也表示矢量传感器为基元时多极子波束的最大阶数, 其值与阵列形状所建立的多极子形式及实际工程的限制情况有关. 对于如图 1 所示的矢量阵而言,  $L$  值理论上最高可取至 5.

为与模态函数  $A_0(\theta)$ ,  $A_{2\ell-1}(\theta)$  和  $A_{2\ell}(\theta)$  对应, 方程 (13) 中偏导所示的多极子项可进行级数展开, 即

$$\begin{aligned} &\frac{(2d)^{m+n}}{p_0} \frac{\partial^{m+n} v_x}{\partial x^m \partial y^n} \\ &= \mathbf{a}_x^c(m, n)^T \mathbf{B}^c + \mathbf{a}_x^s(m, n)^T \mathbf{B}^s, \end{aligned} \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} &\frac{(2d)^{m+n}}{p_0} \frac{\partial^{m+n} v_y}{\partial x^m \partial y^n} \\ &= \mathbf{a}_y^c(m, n)^T \mathbf{B}^c + \mathbf{a}_y^s(m, n)^T \mathbf{B}^s, \end{aligned} \quad (14b)$$

其中, 上标 T 表示矩阵转置,  $\mathbf{B}^c$  和  $\mathbf{B}^s$  分别为以  $\cos(\ell\theta)$  ( $\ell = 0, 1, \dots, L$ ) 为元素的  $(L+1) \times 1$  维列向量和以  $\sin(\ell\theta)$  ( $\ell = 1, \dots, L$ ) 为元素的  $L \times 1$  维列向量;  $\mathbf{a}_x^c$ ,  $\mathbf{a}_x^s$ ,  $\mathbf{a}_y^c$  和  $\mathbf{a}_y^s$  分别为相应级数展开系数所构成的列向量, 以  $\mathbf{a}_x^c$  与  $\mathbf{a}_x^s$  为例, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_x^c &= \left[ a_x^c(0, m, n) \cdots a_x^c(\ell, m, n) \cdots a_x^c(L, m, n) \right]^T, \\ \mathbf{a}_x^s &= \left[ a_x^s(1, m, n) \cdots a_x^s(\ell, m, n) \cdots a_x^s(L, m, n) \right]^T, \end{aligned}$$

其元素  $a_x^c(\ell, m, n)$  表示  $x$  通道接收信号在  $x$  方向  $m$  次偏导  $y$  方向  $n$  次偏导后对  $\cos(\ell\theta)$  的贡献量, 其他同理. 根据二项式原理, 可获得  $\cos(\ell\theta)$  和  $\sin(\ell\theta)$  与  $\frac{\partial^{m+n} v_x}{\partial x^m \partial y^n}$  及  $\frac{\partial^{m+n} v_y}{\partial x^m \partial y^n}$  之间的关系, 其结果如附录中所示. 同时, 对于不同的  $m$  与  $n$  奇偶数组合情况, 偏导表示的多极子项皆以单一的  $\cos(\ell\theta)$  或  $\sin(\ell\theta)$  形式进行表述. 因此, 以  $\cos(\ell\theta)$  和  $\sin(\ell\theta)$  项进行划分, 则方程 (13) 可转换成如下矩阵形式:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \mathbf{A}_x^c & \mathbf{A}_y^c \\ \mathbf{A}_x^s & \mathbf{A}_y^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_x \\ \mathbf{w}_y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}^c & \mathbf{0}_{(L+1) \times (L+1)} \\ \mathbf{0}_{L \times L} & \mathbf{C}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^c \\ \mathbf{B}^s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{w}_p \\ \mathbf{0}_{L \times 1} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (15)$$

其中,  $\mathbf{B}^c$  和  $\mathbf{B}^s$  如上文定义, 矩阵  $\mathbf{C}^c$  和  $\mathbf{C}^s$  分别为  $B(\theta)$  级数展开系数所组成的对角矩阵, 其对角线上元素由所设计波束确定;  $\mathbf{0}_{p \times q}$  表示元素皆为 0 的  $p \times q$  维块矩阵; 系数矩阵  $\mathbf{A}_x^c = [\mathbf{a}_x^c(m, n)]$ ,  $\mathbf{A}_y^c = [\mathbf{a}_y^c(m, n)]$ ,  $\mathbf{A}_x^s = [\mathbf{a}_x^s(m, n)]$ ,  $\mathbf{A}_y^s = [\mathbf{a}_y^s(m, n)]$ , 即分别由向量  $\mathbf{a}_x^c$ ,  $\mathbf{a}_x^s$ ,  $\mathbf{a}_y^c$  和  $\mathbf{a}_y^s$  为列组成;  $\mathbf{w}_p$ ,  $\mathbf{w}_x$  和  $\mathbf{w}_y$  则分别表示声压加权列向量、 $x$  方向振速加权列

向量与  $y$  方向振速加权列向量, 具体形式为

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_p &= [w_p \ 0 \ \cdots \ 0]_{1 \times (L+1)}^T, \\ \mathbf{w}_x &= [w_{x,00} \ \cdots \ w_{x,mn} \ \cdots \ w_{x,(L-1)0}]_{1 \times [L(L+1)/2]}^T, \\ \mathbf{w}_y &= [w_{y,00} \ \cdots \ w_{y,mn} \ \cdots \ w_{y,(L-1)0}]_{1 \times [L(L+1)/2]}^T. \end{aligned}$$

虽然矩阵方程 (15) 形式上并非为方阵, 即待求未知量个数要大于线性方程; 但考虑到三角函数关系  $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$  及振速矢量偏导数之间的等价关系:

$$\begin{aligned} & \frac{p_0 V}{(2d)^{m+n-1} F_{m+n-1}(k)} \cos^m \theta \sin^n \theta \\ &= \frac{\partial^{m+n-1} v_x}{\partial x^{m-1} \partial y^n} = \frac{\partial^{m+n-1} v_y}{\partial x^m \partial y^{n-1}}. \end{aligned} \quad (16)$$

通过化简, 则矢量加权矩阵中仅需计算  $2L$  个未知量, 并通过  $c_0$  值求解出  $w_p$ .

综合上述推导, 可通过不同矢量基元的差分运算, 获得等价于振速矢量偏导的各阶多极子模型, 从而由相应的模态展开计算得到对应的系数矩阵  $\mathbf{A}_x^c$ ,  $\mathbf{A}_y^c$ ,  $\mathbf{A}_x^s$  和  $\mathbf{A}_y^s$ ; 再根据矩阵方程 (15) 求解出各基元加权系数, 获得任意所需指向性波束. 因此本方法具有基于相位模态原理的环形阵 [15,16] 的优点; 并且该波束形成理论也兼具了线型阵 [13,14] 的优势, 即波束形成算法理论上可靠易行. 同时, 在阵列模型和算法的建立中, 采用矢量传感器为基元, 有效提高了可形成多极子的阶数, 减小了差分与级数截取的误差.

### 3 算法对比验证

#### 3.1 算法验证与模态阶数分析

基于本文多极子理论所建立的超指向性波束形成算法, 理论上可获得任意形状的波束; 但考虑到水下复杂环境中声源方位估计的实际困难, 为使接收范围内的环境因素影响达到最小, 声能量集中于导向方向, 现依据阵列输出信噪比最大准则建立所需超指向性波束 [1], 并以此为基础对本文超指向性波束形成算法进行验证. 选取波束为

$$B(\theta, \vartheta_s) = 0.5 + \sum_{l=0}^L \beta^l \cos[l(\theta - \vartheta_s)], \quad (17)$$

其中,  $\vartheta_s$  为导向角度,  $\beta$  为常数, 取阶数上限  $L$  与上文  $B(\theta)$  中模态最高阶数相同. 从方程 (17) 中可以

看出, 相较于其他类型的波束表达类型, 该波束表述形式更易于矩阵方程 (15) 的求解. 当  $\beta = 1$  时, 不同  $L$  值下, 波束近似表达式为

$$\begin{aligned} B(\theta, \vartheta_s) &= 0.5 + \sum_{l=0}^L \cos[l(\theta - \vartheta_s)] \\ &\approx \frac{\sin[(L+0.5)(\theta - \vartheta_s)]}{\sin[0.5(\theta - \vartheta_s)]}. \end{aligned} \quad (18)$$

其形状如图 2 所示, 可以看出, 相较于波束主瓣而言, 波束旁瓣值较小, 声场能量集中于主瓣, 且该波束在较低阶数下便具有较窄的主瓣宽度; 虽然宽度随着阶数上限值  $L$  的增加而减小, 但减小程度逐渐下降, 即四阶与五阶的主瓣宽度差要小于三阶与四阶的差值.

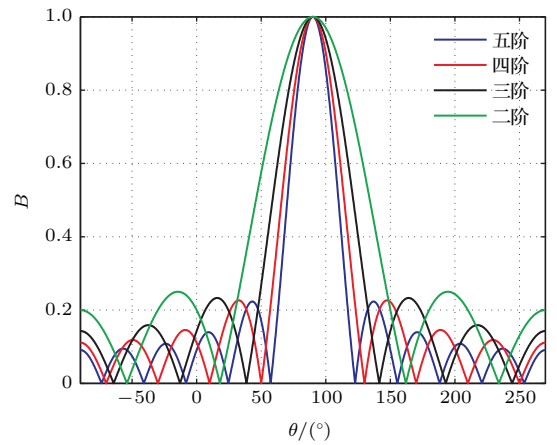


图 2 (网刊彩色) 不同阶数限制下的波束图

Fig. 2. (color online) The beam patterns of different order.

对于主瓣宽度, 也可由半功率点波束宽度进行定量描述, 显然将得到与图 2 相同的结论. 对于  $\beta = 1$  的情况, 可计算得半功率宽度为

$$BW_{0.5} = \frac{5.6}{2L+1}. \quad (19)$$

由此可以看出, 该矢量传感器阵所形成的波束具有良好的角分辨能力, 且该分辨能力随着阶数  $L$  的增加而提高. 另外, 对于常规线阵波束, 阵列对于信源的分辨力与在所测方向附近阵列导向矢量的变化率直接相关, 即相同基元个数情况下, 分辨力随信号的入射方向变化, 基阵对非零方向入射目标的分辨能力下降; 而该矢量传感器阵所形成的波束的分辨力不随入射角的变化而变化, 因而具有更好的测向能力, 进一步体现了本文算法所构建波束的优势.

为验证本文超指向性波束形成算法对输出信噪比最大准则所得波束的实现能力, 依照图 1 所示

的几何结构, 利用同振式二维矢量水听器作为基元且按小于六分之一波长间距排列, 构成小尺寸平面矢量阵, 如图 3 所示.



图 3 (网刊彩色) 小尺寸九元矢量平面阵  
Fig. 3. (color online) The actual 3 × 3 uniform rectangular array.

在此小尺寸平面矢量阵基础上, 考虑到水下低频的发展方向, 取理论计算与测量频率  $f$  为 170 Hz, 则不同模态阶数  $L$  时的理论波束与实测波束如图 4 所示.

根据图 4 所示, 三阶与四阶情况下的理论结果与实测结果基本吻合, 五阶情况下的理论结果与实测结果则存在稍许偏差; 但三者皆充分表明了本文超指向性波束形成算法的有效性, 即可在低频环境下由小尺寸平面矢量阵形成超指向性波束, 所形成的波束具有极窄的主瓣和量级较低的旁瓣, 有效解决了基阵尺寸与指向性增益的矛盾.

对于五阶模态时波束的偏差, 可由加权因子  $w_x$  和  $w_y$  进行解释. 根据差分原理, 块矩阵  $A_x^c$ ,  $A_y^c$ ,  $A_x^s$  和  $A_y^s$  中的元素将包含幅度补偿项  $1/F_{m+n}(k) = (2ikd)^{m+n}$  用以获得与频率无关的任意波束, 而所求加权向量  $w_x$  和  $w_y$  则将包含  $F_1(k), F_2(k) \cdots F_{L-1}(k)$ . 对于理想阵列而言, 该加权因子并不会导致实测与理论波束差异的产生. 然而对于实际阵列, 加权因子所含高阶  $F_l(k)$  项作用至各基元上时, 由于  $kd \ll 1$  的规定, 将使基元不一致性的影响极大地增加, 继而使得理论波束与实测波束之间存在差异. 为降低基元不一致性的影响, 需对该小尺寸基阵进行详细校准; 但相比于空气声学等领域和水声高频情况, 水下声基阵的低频校准难度较大, 代价昂贵. 为此, 相较于不易实现

的水下低频精确校准, 可采取适当降低模态阶数的方法.

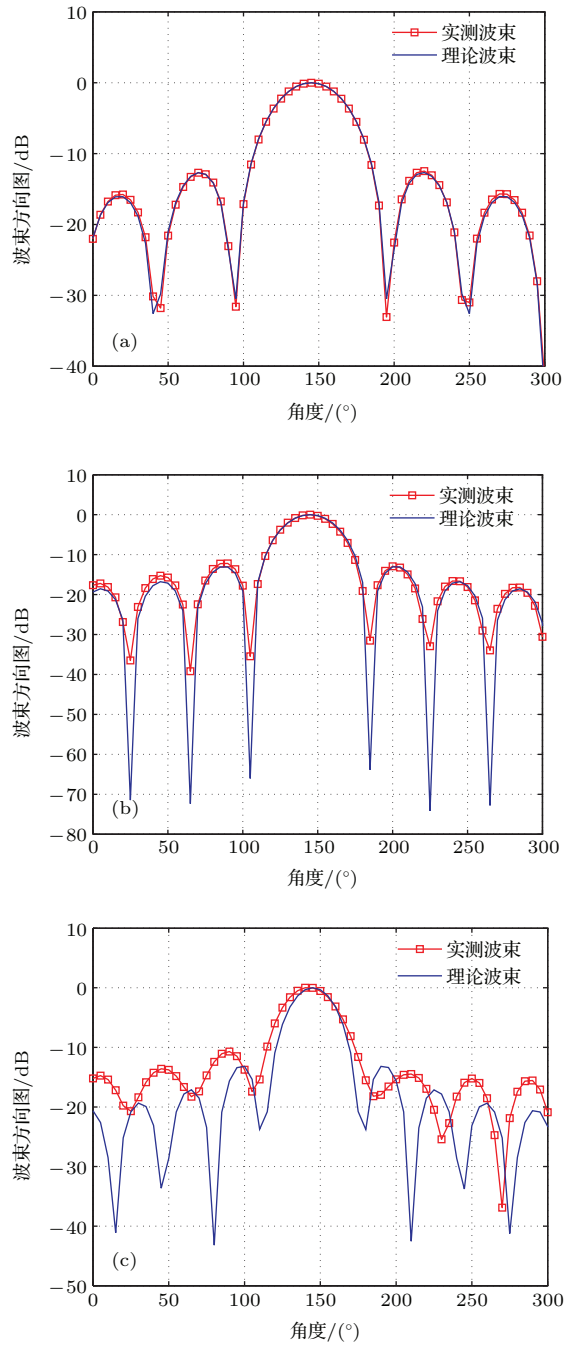


图 4 (网刊彩色) 本文超指向性波束算法下的理论波束与实测波束 (a) 三阶情况; (b) 四阶情况; (c) 五阶情况

Fig. 4. (color online) The theoretical beam patterns and the actual synthesized ones: (a) 3rd order; (b) 4th order; (c) 5th order.

### 3.2 阵增益与基元间隔影响分析

在建立小尺寸基阵的超指向性波束形成算法时, 需假设  $kd \ll 1$ . 对于本文的水下低频探测而言, 该假设皆已满足; 同时, 对于离散型阵列, 基元

间距  $d$  的变化将影响阵列的性能. 考虑到除主瓣宽度、角分辨能力等上文所讨论的参数外, 阵列增益也是描述基阵性能的重要参量, 因此从阵列增益的角度, 分析基元间距的选择标准以及本文超指向性阵列的优势.

与常规阵列相同, 超指向性矢量阵的阵列处理增益可定义为基阵输出信噪比与阵列中单个无指向性基元输入信噪比的比值, 即

$$AG = \frac{|\mathbf{W}^H(k, \theta)\mathbf{R}(\theta)|^2}{\mathbf{W}^H(k, \theta)\mathbf{\Gamma}_N\mathbf{W}(k, \theta)}, \quad (20)$$

其中,  $\mathbf{R}(\theta)$  和  $\mathbf{W}(k, \theta)$  分别为各基元接收信号所构成的矢量以及相应基元加权值所构成的矢量; 而作为接收噪声的协方差矩阵  $\mathbf{\Gamma}_N$ , 其元素则为对应通道的相关系数.

对于水下低频环境中的小尺寸基阵, 其接收信号中的噪声可大致分为两类: 根据海洋环境建模的三维各向同性噪声场, 以及基元自噪声等因素所产生的时空互不相关白噪声. 对于各向同性噪声场, 本文采用球面上有限个均匀分布的点声源进行逼近, 其相关系数可由以  $kd$  为自变量的贝塞尔函数给出; 而对于时空互不相关白噪声, 则采用高斯噪声进行模拟, 并且当白噪声作为背景干扰时, 阵列增益可看作是白噪声增益, 为阵列敏感度的重要量度. 现以模态阶数  $L = 3$  与  $L = 5$  为例, 考虑图 1 所示的阵列形状, 其阵列增益与白噪声增益随基元间距  $d$  变化情况如图 5 所示.

从仿真计算结果可以看出, 本文所建立的小尺寸基阵具有较高的阵列增益. 以基元间距  $\lambda/6$  的五阶模态情况为例, 其阵列指向性增益约为 13 dB, 相较于常规阵列, 本文超指向性矢量阵尺寸可降低 90%, 具有明显优势; 而当基元间距继续减小时, 阵列增益将有所提高, 但相应的白噪声增益会显著下降. 当白噪声增益越低时, 阵列对基元相位误差等因素的变化越敏感, 即表明阵列更易受基元不一致性的影响. 因此, 获得更高阵列增益与获得更加稳定的小尺寸阵列彼此相互矛盾, 其基元间距的选择还需综合阵列增益和基阵工艺的情况进行考虑.

同时, 通过不同阶数下阵列增益和白噪声增益的比对, 可见小尺寸基阵的阵列增益随着模态阶数增加而提高, 而白噪声增益则下降, 其更进一步表明了高阶模态的优势, 但也说明了高阶模态的阵列

更易受基元不一致性等参数的影响, 即高阶模态下对基阵工艺与阵列的校准要求更高.

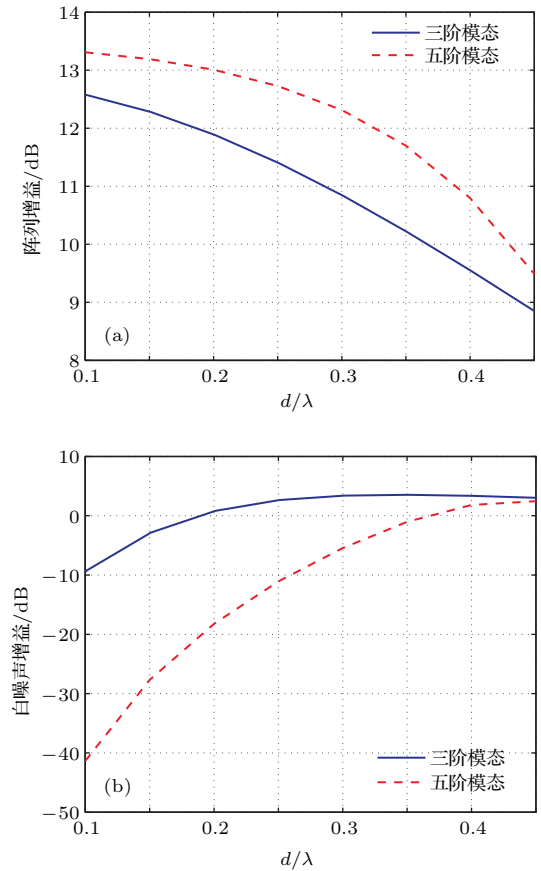


图 5 (网刊彩色) 不同模态阶数下增益随基元间距的变化 (a) 阵列增益; (b) 白噪声增益  
Fig. 5. (color online) The array gain and white noise gain versus inter-sensor spacing: (a) The array gain; (b) the white noise gain.

## 4 算法稳健性分析

### 4.1 差分算法的稳健性分析

基元间距  $d$  的选择需根据阵列增益与白噪声增益进行考虑, 以使得阵列性能达到最佳; 同时, 由基元差分计算可以看出, 基元间距  $d$  也将导致超指向性波束形成算法具有一定误差. 为确定超指向性算法的稳健性, 现对差分近似误差与基元间距的关系进行研究. 根据差分原理, 定义差分近似值与理论值的比为该误差的量度, 即

$$e_n(\theta) = \frac{\sin^n \left[ \left( \frac{kd}{2} \right) \cos \theta \right]}{\left( \frac{kd}{2} \right)^n \cos^n \theta}. \quad (21)$$

其中,  $n$  为差分计算的阶数. 由该方程可以看出, 差分近似误差与  $kd$  的大小及入射波的角度  $\theta$  有关.



以  $\theta = 0^\circ$  时为例, 不同差分阶数  $n$  下, 该误差随基元间距  $d$  的变化如图 6 所示.

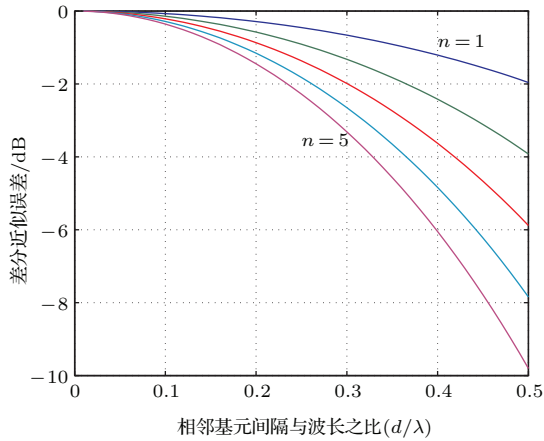


图 6 (网刊彩色) 不同阶数下的差分误差分布  
Fig. 6. (color online) The finite difference approximation error for each difference order.

根据图 6 所示, 差分近似误差随着基元间距的增加而增大; 且高阶差分所受影响程度要大于低价差分的情况, 即高阶模式更不稳定, 更易引起算法上误差的产生. 但从数值上而言, 当  $d/\lambda \leq 0.2$  时, 所计算的任意阶数误差皆影响有限.

为更直观地分析基元间距  $d$  与差分算法对波束形成算法稳健性的影响, 现考虑矢量基元下差分原理所构成的多极子波束. 相对于理论上的多极子波束, 在此处将实际差分原理所得多极子波束称之为伪多极子波束. 以伪偶极子和伪四极子情况为例, 分析多极子波束与伪多极子的差异. 当基元分布如图 1 所示时, 根据方程 (5), 偶极子与伪偶极子

波束之间的对应关系为

$$D_{1px}(\theta) = \cos \theta \leftrightarrow F_1(k)M_{1px} = F_1(k)f(p_1, p_5), \quad (22a)$$

$$D_{1py}(\theta) = \sin \theta \leftrightarrow F_1(k)M_{1py} = F_1(k)f(p_3, p_7). \quad (22b)$$

与伪偶极子相似, 根据方程 (6a) 和 (6b), 描述四极子与伪四极子波束对应关系的方程可表示为

$$D_{2xx}(\theta) = D_x(\theta) \cos \theta \leftrightarrow F_1(k)M_{2xx}/V = F_1(k)f(v_{x1}, v_{x5})/V, \quad (23a)$$

$$D_{2yx}(\theta) = D_y(\theta) \cos \theta \leftrightarrow F_1(k)M_{2yx}/V = F_1(k)f(v_{y1}, v_{y5})/V, \quad (23b)$$

$$D_{2xy}(\theta) = D_x(\theta) \sin \theta \leftrightarrow F_1(k)M_{2xy}/V = F_1(k)f(v_{x3}, v_{x7})/V, \quad (23c)$$

$$D_{2yy}(\theta) = D_y(\theta) \sin \theta \leftrightarrow F_1(k)M_{2yy}/V = F_1(k)f(v_{y3}, v_{y7})/V. \quad (23d)$$

上述方程在  $kd \ll 1$  时, 理论上恒成立; 而对于实际阵列, 二者所描述的波束存在一定偏差. 取基元间距  $d$  由  $0.01\lambda$  变化至  $0.5\lambda$ , 计算相应的伪多极子波束, 其结果分别如图 7 和图 8 所示.

根据图 7 和图 8 所示的伪多极子波束图, 当基元间距增加时, 伪偶极子及伪四极子的第二种情况与第三种情况存在着明显变化, 其波束主瓣幅度下降且逐渐呈现分裂现象; 而伪四极子中的第一种情况与第四种情况受影响程度相对较小.

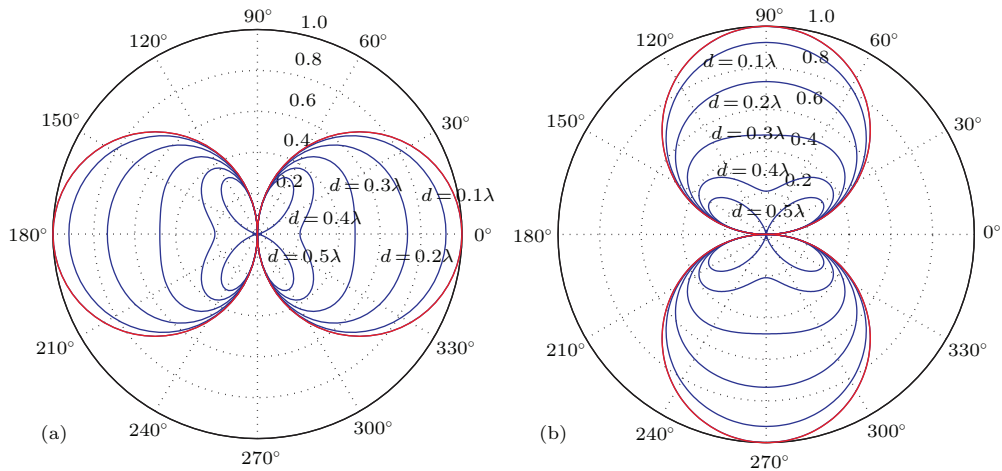


图 7 (网刊彩色) 不同基元间距下的伪偶极子波束图 (a) 对应  $D_{1px}(\theta)$ ; (b) 对应  $D_{1py}(\theta)$   
Fig. 7. (color online) The dipole beam patterns as a function of the inter-sensor spacing: (a) Corresponding to  $D_{1px}(\theta)$ ; (b) corresponding to  $D_{1py}(\theta)$ .

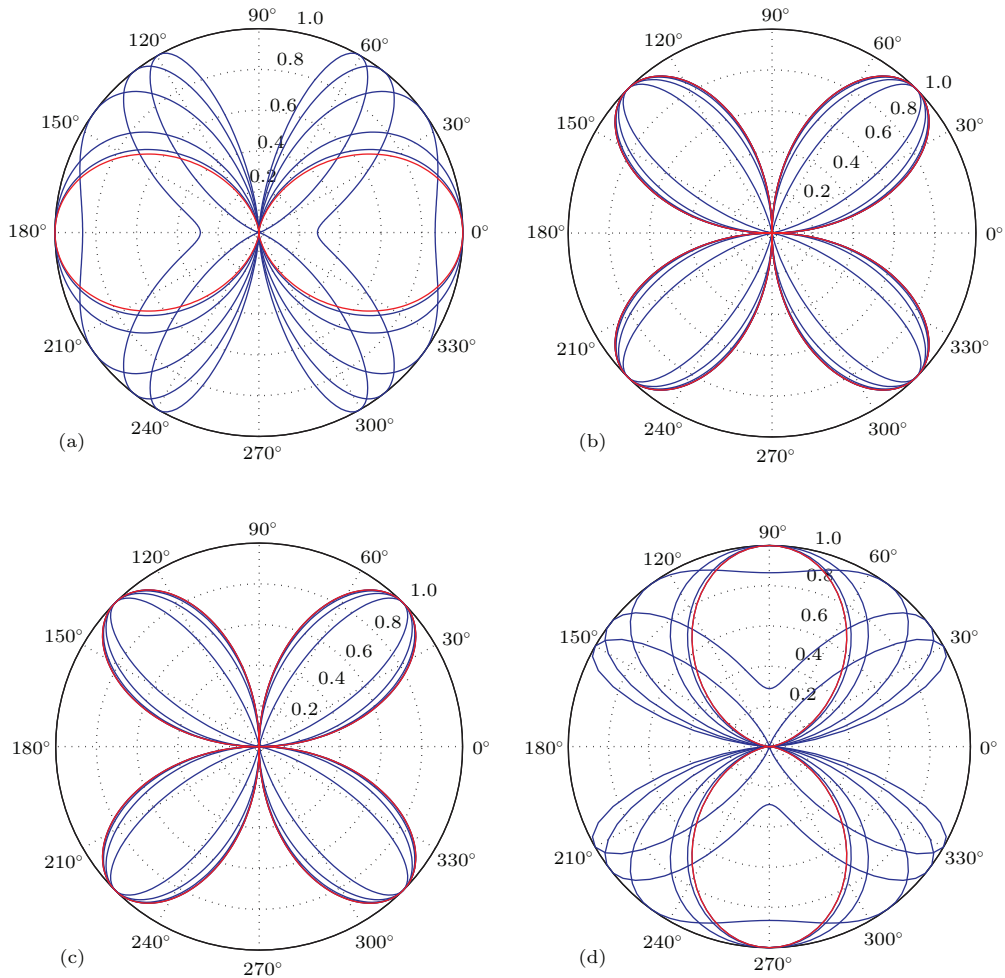


图8 (网刊彩色) 不同基元间距下的伪四极子波束图 (a) 对应  $D_{2xx}(\theta)$ ; (b) 对应  $D_{2yx}(\theta)$ ; (c) 对应  $D_{2xy}(\theta)$ ; (d) 对应  $D_{2yy}(\theta)$

Fig. 8. (color online) The quadrupole beam patterns as a function of the inter-sensor spacing: (a) Corresponding to  $D_{2xx}(\theta)$ ; (b) corresponding to  $D_{2yx}(\theta)$ ; (c) corresponding to  $D_{2xy}(\theta)$ ; (d) corresponding to  $D_{2yy}(\theta)$ .

在超指向性波束形成中, 由于不同基元和不同多极子波束需进行加权, 因此各阶伪极子对总波束的影响也将被减弱或增强. 为此, 考虑本文信噪比最大原则下所得波束, 如方程(17)所示, 其在不同基元间距下的变化如图9所示.

从图9中可以看出, 随着基元间距的增加, 其主瓣幅度逐渐下降直至趋于与旁瓣相同, 但变化相较于图8(a)和图8(d)更为缓慢, 表明了随基元间距剧烈变化的伪多极子影响经加权后得到减弱, 也进一步说明基于多极子理论建立的超指向性波束具有较高的稳健性. 当基元间距  $d = 0.3\lambda$  时, 波束主瓣幅度下降为  $0.01\lambda$  时的一半, 且并未出现较大旁瓣; 而当基元间距小于  $0.2\lambda$  时, 超指向性波束并未出现较大畸变, 基本可满足水下低频声探测的需要.

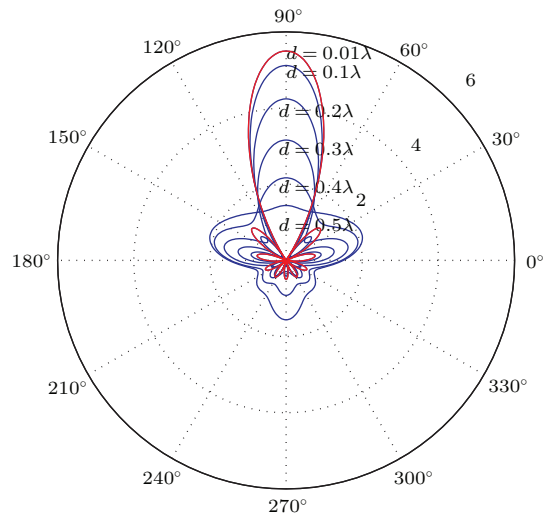


图9 (网刊彩色) 不同基元间距下超指向性波束的变化  
Fig. 9. (color online) The synthesized superdirective beam pattern as a function of the inter-sensor spacing.

同时, 虽然作为低频接收的水听器相较于高频换能器而言尺寸较大, 但由于水下低频声探测频段主要为几百赫兹, 其基元间距皆可到达上述差分计算要求, 形成良好的多极子波束. 因此本文水下低频超指向性波束形成算法具有较强的稳健性, 而基元间距的合理选择则更应从阵列增益与白噪声增益中进行考虑.

### 4.2 水下声波导影响分析

相比于空气声环境和电磁波传播环境, 水下声环境更加复杂, 特别是浅海低频情况, 波导效应更加明显, 频散效应和多途效应将使得接收信号的幅度和相位产生畸变. 考虑到多极子理论对相位差的要求, 此处对水下声波导的影响进行研究, 分析本文所建立的超指向性声矢量阵及其波束形成算法的可靠性与适用性.

由于较少阶数的波导模态即可有效表示声场, 故采用简正波理论<sup>[2]</sup>对浅海低频环境中的阵列信号进行模拟以充分考虑波导边界的影响. 对于中

心频率为  $f_0$  的窄带声信号, 假设波导中共存在  $M_W$  阶波导简正波, 忽略时间因子, 则参考基元接收声压场可表示为

$$p_0(r, z) = \sum_{n_W=1}^{M_W} \frac{-i}{\rho(z_s) \sqrt{8\pi k_{n_W} r}} Z_{n_W}(z_s) Z_{n_W}(z) \times \exp \left[ -i \left( k_{n_W} r - \frac{\pi}{4} \right) \right] = \sum_{n_W=1}^{M_W} B_{n_W}, \quad (24)$$

其中,  $Z_{n_W}(z)$  为对应第  $n_W$  阶简正波本征值  $k_{n_W}$  的本征函数. 考虑二维阵列中极坐标为  $(r_m, \gamma_m)$  的  $m$  号基元 ( $m = 1, 2, \dots, M$ ), 根据方程 (1a) 和方程 (24), 可得各基元相对于参考基元所接收到的声压场, 即

$$p_m(r, z) = \sum_{n_W=1}^{M_W} B_{n_W} \times \exp[ik_{n_W} r_m \cos(\theta - \gamma_m)]. \quad (25)$$

若采用矩阵表述形式, 则有

$$\mathbf{X}(f) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \exp[ik_1 r_1 \cos(\theta - \gamma_1)] & \cdots & \exp[ik_{M_W} r_1 \cos(\theta - \gamma_1)] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \exp[ik_1 r_M \cos(\theta - \gamma_M)] & \cdots & \exp[ik_{M_W} r_M \cos(\theta - \gamma_M)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{M_W} \end{bmatrix} S(f). \quad (26)$$

由方程 (26) 可以看出, 各基元所接收到的声压场为各阶简正波叠加的形式, 即波导所产生的影响. 考虑如图 10 所示的环境参数和几何参数, 当  $f_0 = 400$  Hz 时, 其声场能量传播损失以及相对于平面波的声场相位变化则如图 11 所示.

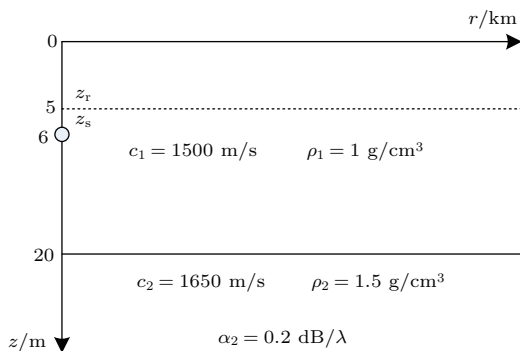


图 10 Pekeris 波导示意图

Fig. 10. The sketch map of Pekeris waveguide.

由图 11 可以看出, 声场能量由于不同阶简正波相互叠加干涉而产生起伏; 且相对于声场能量, 声压场的相位变化更加剧烈. 因此, 对于水下声阵列而言, 一般需补充波导所产生的影响, 即不同接收位置处信号幅度和相位的变化; 但考虑到本文中小尺寸基阵, 其最大尺度不超过半波长, 而在波导效应影响最剧烈的参数设定情况下, 在半波长范围内声压场幅度变化量不超过 0.8 dB, 而相位相对于平面波的畸变小于 3%, 即波导所导致的幅度和相位变化影响有限, 反而表明了小尺寸超指向性阵在水下低频声探测中的优势, 即避免了波导的复杂影响. 同时, 由于声压场与振速矢量场的相似性, 所得结论也同样适应于矢量基元.

为更加直观地体现海洋波导对本文波束形成算法的影响, 利用波导中所接收的矢量信号来建立多极子模型并实现超指向性波束. 考虑本文所采用

的波束  $B(\theta)$ , 与前文平面波的波束图相比, 浅海波导下的波束如图 12 所示.

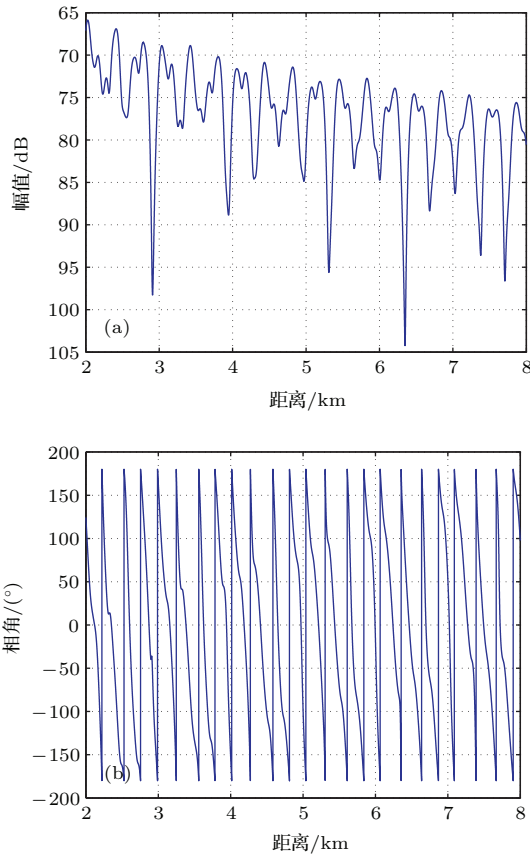


图 11 Pekeris 波导下的声场能量变化及相位相对变化 (a) 传播损失曲线; (b) 声压场的相位相对变化  
Fig. 11. The sound field energy and relative phase in the Pekeris waveguide: (a) The transmission loss; (b) the relative phase.

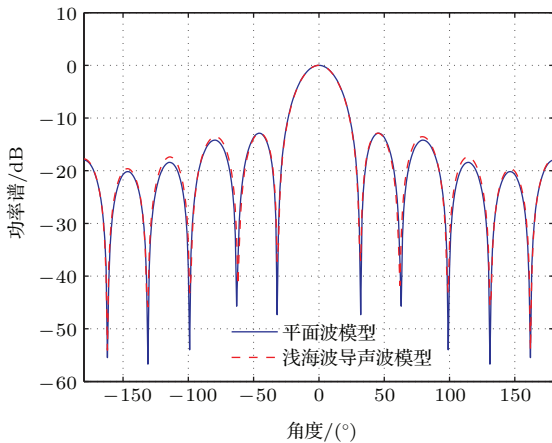


图 12 (网刊彩色) 波导影响下的波束对比  
Fig. 12. (color online) Beam pattern in the Pekeris waveguide, the theoretical one is also illustrated for comparison purpose.

根据图 12 所示的计算结果, 二者波束形状基本相同, 波导的作用主要表现在旁瓣和零点的抑制

上, 波导模型下波束图中的旁瓣幅度略有增加, 且凹点表现稍差于理想自由空间中平面波的情况; 但总体而言, 由于基元间距较小及声源频段较低, 波导效应对小尺寸矢量阵及其超指向性波束的影响较弱, 即基于多极子理论所构建的超指向性波束形成算法可很好地实现浅海波导中的低频声源方位估计, 具有较高的可靠性和适应性.

## 5 结 论

本文提出了一种基于多极子理论的超指向性声矢量阵波束形成算法, 经理论分析与实际验证, 表明本文波束形成算法可有效解决阵列孔径与阵列增益等参数之间的矛盾, 基阵既具有小尺寸孔径又可获得超指向性波束, 从而实现水下低频声源的方位估计. 与其他水下超指向性阵列波束形成算法相比, 由于采用离散矢量基元差分来构建多极子所表征的模式, 本文波束形成算法兼具了线型阵易于实现的优点, 又如同环形阵可形成任意波束; 并且所形成波束受频率影响较小, 因而可有效适用于水下低频情况. 同时, 结合阵列性能, 研究了波束形成算法的可靠性和适应性, 指出模式阶数越高时, 波束指向性性能越好, 但波束越易受基元的不一致性影响, 即需较准确的阵列校准; 基元间距则影响着阵增益与阵列白噪声增益, 阵增益随着基元间距的减小而提高, 但阵列白噪声增益也随之增加, 阵列灵敏度也越高. 因此需根据所需阵列性能, 对阵列模式阶数与基元间距进行合理取值. 虽然离散基元的差分运算和海洋波导作用将导致常规阵列性能下降, 然而由于本文基元间距较小以及基阵工作频段的优势, 差分近似误差及海洋波导效应对本文模型影响有限. 综上所述, 本文所建立的超指向性矢量阵波束形成算法突破了阵列孔径对波束性能的限制, 为实现水下低频声源方位的测量提供了一种可靠手段.

## 附录 A 振速矢量偏导数的化简

根据 Euler 公式,  $\cos \theta$  及  $\cos^{m+1} \theta$  可以表示为

$$\cos \theta = \frac{1}{2} [\exp(i\theta) + \exp(-i\theta)], \quad (\text{A1})$$

$$\cos^{m+1} \theta = \frac{1}{2^{m+1}} [\exp(i\theta) + \exp(-i\theta)]^{m+1}. \quad (\text{A2})$$

由二项式定理, 方程 (A2) 可转化为

$$\cos^{m+1} \theta = \frac{1}{2^{m+1}} \sum_{q=0}^{m+1} \binom{m+1}{q} \times \exp[i(m-2q+1)\theta]. \quad (\text{A3})$$

当  $m$  为奇数时, 则方程 (A3) 可展开成三部分, 即

$$\begin{aligned} & \cos^{m+1} \theta \\ &= \left[ \frac{1}{2^{m+1}} \sum_{q=0}^{(m-1)/2} \binom{m+1}{q} \exp[i(m-2q+1)\theta] \right. \\ & \quad \left. + \binom{m+1}{(m+1)/2} + \sum_{q=(m+3)/2}^{m+1} \binom{m+1}{q} \right] \\ & \quad \times \exp[i(m-2q+1)\theta]. \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

其中, 对于方程 (A4) 第三项, 令  $l = m+1-q$ , 且考虑求和数值与符号无关, 有

$$\begin{aligned} & \sum_{q=(m+3)/2}^{m+1} \binom{m+1}{q} \exp[i(m-2q+1)\theta] \\ &= \sum_{l=(m-1)/2}^0 \binom{m+1}{m+1-l} \exp[-i(m-2l+1)\theta] \\ &= \sum_q^{(m-1)/2} \binom{m+1}{q} \exp[-i(m-2q+1)\theta]. \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

因此, 对于  $m$  为奇数的情况, 方程 (A4) 可化为

$$\begin{aligned} \cos^{m+1} \theta &= \frac{1}{2^m} \sum_{q=0}^{(m-1)/2} \binom{m+1}{q} \cos(m-2q+1)\theta \\ & \quad + \frac{1}{2^{m+1}} \binom{m+1}{(m+1)/2}. \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

同理, 基于上述二项式定理, 由 Euler 公式可得:

$$\begin{aligned} & \frac{(2d)^m F_m(k)}{p_0 V} \frac{\partial^m v_x}{\partial x^m} = \cos \theta \cos^m \theta \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2^m} \sum_{q=0}^{m/2} \binom{m+1}{q} \cos[(m-2q+1)\theta] & m \text{ 为偶数,} \\ \frac{1}{2^m} \sum_{q=0}^{(m-1)/2} \binom{m+1}{q} \cos[(m-2q+1)\theta] \\ \quad + \frac{1}{2^{m+1}} \binom{m+1}{(m+1)/2} & m \text{ 为奇数;} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

$$\frac{(2d)^n F_n(k)}{p_0 V} \frac{\partial^n v_x}{\partial y^n} = \cos \theta \sin^n \theta$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{(2i)^n} \sum_{l=0}^{n/2} (-1)^l \binom{n+1}{l} \cos[(n-2l+1)\theta] & n \text{ 为偶数,} \\ \frac{1}{2(2i)^{n-1}} \sum_{l=0}^{(n-1)/2} (-1)^l \frac{n!(n-2l+1)}{l!(n-2l+1)!} \sin[(n-2l+1)\theta] & n \text{ 为奇数.} \end{cases} \quad (\text{A8})$$

而根据方程 (A7) 与方程 (A8), 则可得振速矢量的任意  $m, n$  阶偏导数, 即

$$\begin{aligned} & \frac{(2d)^{m+n} F_{m+n}(k)}{p_0 V} \frac{\partial^{m+n} v_x}{\partial x^m \partial y^n} = \cos \theta \cos^m \theta \sin^n \theta \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2^m} \sum_{q=0}^{m/2} \binom{m+1}{q} \cos[(m-2q+1)\theta] & m \text{ 为偶数,} \\ \frac{1}{2^m} \sum_{q=0}^{(m-1)/2} \binom{m+1}{q} \cos[(m-2q+1)\theta] \\ \quad + \frac{1}{2^{m+1}} \binom{m+1}{(m+1)/2} & m \text{ 为奇数;} \end{cases} \\ & \quad \times \begin{cases} \frac{1}{(2i)^n} 2 \sum_{l=0}^{n/2-1} (-1)^l \binom{n}{l} \cos[(n-2l)\theta] & n \text{ 为偶数,} \\ -\frac{1}{(2i)^n} \binom{n}{n/2} & n \text{ 为奇数;} \\ \frac{1}{(2i)^{n-1}} \sum_{l=0}^{(n-1)/2} (-1)^l \binom{n}{l} \sin[(n-2l)\theta] & n \text{ 为奇数;} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

$$\begin{aligned} & \frac{(2d)^{m+n} F_{m+n}(k)}{p_0 V} \frac{\partial^{m+n} v_y}{\partial x^m \partial y^n} = \cos^m \theta \sin^n \theta \sin \theta \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{q=0}^{m/2-1} \binom{m+1}{q} \cos[(m-2q)\theta] \\ \quad + \frac{1}{2^m} \binom{m}{m/2} & m \text{ 为偶数,} \\ \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{q=0}^{(m-1)/2} \binom{m}{q} \cos[(m-2q)\theta] & m \text{ 为奇数;} \end{cases} \\ & \quad \times \begin{cases} \frac{1}{(2i)^n} \sum_{l=0}^{n/2} (-1)^l \binom{n+1}{l} \times \sin[(n-2l+1)\theta] & n \text{ 为偶数,} \\ \frac{1}{(2i)^{n+1}} 2 \sum_{l=0}^{(n-1)/2} (-1)^l \binom{n+1}{l} \\ \quad \times \cos[(n-2l+1)\theta] & n \text{ 为奇数.} \\ -\frac{1}{(2i)^{n+1}} \binom{n+1}{(n+1)/2} & n \text{ 为奇数.} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A10})$$

当方程(A9)与方程(A10)中各项进行乘积运算时,由三角函数关系式易得到,  $\cos\theta\cos^m\theta\sin^n\theta$ 与  $\cos^m\theta\sin^n\theta\sin\theta$  可仅由正弦函数或余弦函数表示.

## 参考文献

- [1] Yang S E 2012 *Acoustics 2012 Hong Kong Conference and Exhibition* Hong Kong SAR, China, May 13–18, 2012 p336
- [2] Wang D Z, Shang E C 2013 *Underwater Acoustics* (Beijing: Science Press) pp545–549 (in Chinese) [汪德昭, 尚尔昌 2013 水声学 (北京: 科学出版社) 第 545—549 页]
- [3] Wang Y, Yang Y X, Ma Y L, He Z Y 2014 *J. Acoust. Soc. Am.* **136** 1712
- [4] Parsons A T 1987 *J. Acoust. Soc. Am.* **82** 179
- [5] Olson H F 1946 *J. Acoust. Soc. Am.* **17** 192
- [6] Uzsoky M, Solymar L 1956 *Acta Phys.* **6** 185
- [7] Morris M L, Jensen M A, Wallance J W 2005 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **53** 2850
- [8] Teutsch H, Kellermann W 2006 *J. Acoust. Soc. Am.* **120** 2724
- [9] Teutsch H 2007 *Modal Array Signal Processing: Principles and Applications of Acoustic Wavefield Decomposition* (Berlin: Springer-Verlag) pp33–113
- [10] Elko G W 2004 *Differential Microphone Arrays* (Berlin: Springer-Verlag) pp33–94
- [11] Thompson S C 2003 *Hearing J.* **56** 14
- [12] Chung K, Zeng F G, Acker K N 2006 *J. Acoust. Soc. Am.* **120** 2216
- [13] Benesty J, Souden M, Huang Y T 2012 *IEEE Trans. Audio Speech Lang. Process.* **20** 699
- [14] Benesty J, Chen J 2012 *Study and Design of Differential Microphone Arrays* (Berlin: Springer-Verlag) pp41–94
- [15] Griffiths J W R, Griffiths H D, Cowan C F N, Eiges R, Rafik T 1994 *Oceans 94/OSATES Conference on Oceans Engineering for Today's Technology and Tomorrow's Preservation* Brest, France, Sep. 13–16, 1994 p223
- [16] Meyer J 2001 *J. Acoust. Soc. Am.* **109** 185
- [17] Ma Y L, Yang Y X, He Z Y, Yang K D, Sun C, Wang Y M 2013 *IEEE Trans. Ind. Electron.* **60** 203
- [18] Elko G W 1999 *J. Acoust. Soc. Am.* **105** 1098
- [19] Buck M 2002 *Eur. T. Telecommun.* **13** 115
- [20] Abhayapala T D, Gupta A 2010 *J. Acoust. Soc. Am.* **127** EL227
- [21] Sena E D, Hacihabiboglu H, Cvetkovic Z 2012 *IEEE Trans. Audio Speech Lang. Process.* **20** 162
- [22] Zhang T W, Yang K D, Ma Y L 2010 *Chin. Phys. B* **19** 124301
- [23] Shi J, Yang D S, Shi S G 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 124302 (in Chinese) [时洁, 杨德森, 时胜国 2012 物理学报 **61** 124302]
- [24] Shi J, Yang D S, Shi S G, Hu B, Zhu Z R 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 024302 (in Chinese) [时洁, 杨德森, 时胜国, 胡博, 朱中锐 2016 物理学报 **65** 024302]
- [25] Sun G Q, Li Q H 2004 *Acta Acust.* **29** 491 (in Chinese) [孙贵青, 李启虎 2004 声学学报 **29** 491]
- [26] Guo J Y, Yang S E, Piao S C 2015 *170th Meeting Acoustical Society of America* Jacksonville, Florida, United States, Nov. 2–6, 2015 p1737
- [27] Zou N, Nehorai A 2009 *IEEE Trans. Signal Process.* **57** 3041
- [28] Gur B 2014 *J. Acoust. Soc. Am.* **135** 3463
- [29] Nehorai A, Paldi E 1994 *IEEE Trans. Signal Process.* **42** 2481
- [30] Smith K B, Vincent A, Leijen V 2007 *J. Acoust. Soc. Am.* **122** 370

# Direction-of-arrival estimation based on superdirective multi-pole vector sensor array for low-frequency underwater sound sources\*

Guo Jun-Yuan<sup>1)2)</sup> Yang Shi-E<sup>1)2)</sup> Piao Sheng-Chun<sup>1)2)†</sup> Mo Ya-Xiao<sup>3)4)</sup>

1) (College of Underwater Acoustic Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

2) (Acoustic Science and Technology Laboratory, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

3) (Institute of Acoustics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

4) (Key Laboratory of Underwater Acoustics Environment, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

( Received 12 January 2016; revised manuscript received 22 April 2016 )

## Abstract

With the advances of ship noise reduction technology, the working frequency of the passive sonar must be reduced in order to detect a target. For the conventional array, it requires a large array aperture, comparable to the wavelength, in order to achieve an acceptable angular resolution. Arrays of small physical size with high angular resolution are thus attractive for low-frequency direction-of-arrival estimation of underwater sound source. In this paper, we consider a  $3 \times 3$  uniform rectangular array which consists of vector sensors with inter-sensor spacing much smaller than the wavelength. A broadband super-directive beamforming method is proposed for this vector sensor array, which extracts multi-pole modes of different orders from the spatial differentials of the sound field. By normalizing the amplitudes of the multi-pole modes, frequency invariant mode functions can be obtained, which are used to build the desired beam pattern, despite the Rayleigh limit on the achievable angular resolution. Vector sensors are used to replace the pressure difference operation, thus to achieve a desirable beam pattern, the order of spatial differential will be reduced. In other words, for the same array configuration, using the vector sensors provides higher directivity than using the pressure sensor. To concentrate on the sources, and to minimize all hindrances from around circumference, a suitable beam pattern is constructed as an example to analysis. To verify the algorithm, a prototype is built and tested in a water tank. Comparisons are carried out between the actually synthesized beam patterns and the theoretical ones. The experimental results show good agreement with the theoretical results, and that the directivity increases with the multi-pole mode order increasing, at the expense of lower robustness. The performances for different values of  $ka$  are also investigated, where  $k$  is the wave number and  $a$  denotes the inter-sensor spacing. Simulation results show that when the inter-sensor spacing is no more than one-sixth of the incident wave length, the error introduced by the approximations for multi-pole mode extraction can be neglected. It should be noted that this result of the inter-sensor spacing still applicable when considering array gain, showing that the array is insensitive to uncorrelated noise while preserving a relatively high array gain. Finally, the influence of the underwater acoustic waveguide on the array performance is analyzed. Simulations and experimental tests show that due to the small array aperture, the waveguide effects on the array performance are limited.

**Keywords:** super-directive vector array, direction-of-arrival estimation for low-frequency underwater sound sources, multi-pole modes

**PACS:** 43.60.Fg, 43.58.Fm, 43.30.Wi

**DOI:** 10.7498/aps.65.134303

\* Project supported by the Science and Technology Foundation of State Key Laboratory, China (Grant No. 9140C200103120C2001) and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11234002).

† Corresponding author. E-mail: [piaoshengchun@hrbeu.edu.cn](mailto:piaoshengchun@hrbeu.edu.cn)