物理学报 Acta Physica Sinica

Chinese Physical Society

Institute of Physics, CAS

一种含时贝塞尔光束的理论性质研究

乐阳阳 张兴宇 杨波 陆蓉儿 洪煦昊 张超 秦亦强 朱永元

Theoretical investigation on a kind of time-dependent Bessel beam

Yue Yang-Yang Zhang Xing-Yu Yang Bo Lu Rong-Er Hong Xu-Hao Zhang Chao Qin Yi-Qiang Zhu Yong-Yuan

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 65, 144201 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.144201

在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.144201

当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I14

一种含时贝塞尔光束的理论性质研究*

乐阳阳[1)2)] 张兴宇[1)2)] 杨波[1)2)] 陆蓉儿[1)2)] 洪煦昊[1)3)]
张超[1)2)†] 秦亦强[1)2)] 朱永元[1)3)]

1) (南京大学, 固体微结构物理国家重点实验室, 人工微结构科学与技术协同创新中心, 近代声学教育部重点实验室, 南京 210093)

2) (南京大学现代工程与应用科学学院, 南京 210093)

3) (南京大学物理学院, 南京 210093)

(2016 年 2 月 29 日收到; 2016 年 5 月 17 日收到修改稿)

本文从理论角度提出了一种"含时贝塞尔光束"的概念. 在非傍轴和非时谐条件下, 直接从麦克斯韦方程出发, 借鉴半贝塞尔光束的处理方法, 同时引入第四维虚数坐标, 由此获得了完整的"含时贝塞尔光束"的解析表达式. 并从无衍射性质和时空特性两个方面对其进行了探讨和研究, 发现该光束具有如下性质: 符合贝塞尔光束类型的无衍射特征; 在时空双曲线上强度保持不变; 光波时空特性的临界条件类似于相对论中的光锥. "含时贝塞尔光束"的概念为无衍射自加速光束的研究开拓了新的思路和方向.

关键词: 含时贝塞尔光束, 无衍射, 时空特性, 临界条件

PACS: 42.25.–p, 03.50.De, 41.20.Jb, 41.85.–p **DOI:** 10.7498/aps.65.144201

1 引 言

在 Airy 波包 [1] 被引进到光学领域之后 [2,3], 自加速、无衍射光束就一直为学术界研究的热点. 无论是在理论性质 [4,5]、实验制备 [6], 还是在应用前景方面, 都取得了突破性进展, 为很多领域打开了新视界: 微观粒子操控 [7−9]、真空电子加速 [10−12]、光学成像 [13,14] 以及 Airy 电子束 [15] 等.

但基于 Airy 光束的这些研究, 都存在一个很大的局限性: 由于 Airy 光束是在傍轴波动方程下获得的, 也就是说, 光的传播轨迹必须限制在一个很小的 (傍轴) 角度内, 一旦超出这个限制, 光束实际波形与严格的 Airy 光束之间就会产生较大的偏离. 显然, 突破这种傍轴限制极具现实意义, 2012 年 Kamine 等 [16] 在非傍轴条件下获得了时谐的"半贝塞尔光束", 在此基础上, 人们还进一步提出了 Mathieu 光束、Weber 光束等新型非傍轴无衍射光束 [17].

以上这些特殊光束都是在时谐近似的条件下得到的. 本文则从非傍轴条件出发, 同时摒弃时谐的限制条件, 从理论上获得一种全新的无衍射、自加速光束——含时贝塞尔光束.

2 理论推导

Airy 光束存在一定的局限性, 即仅在傍轴传输时具有严格的无衍射、自加速性质. 由于 Airy 光束是二维傍轴波动方程的严格解, 从根本上讲傍轴的限制从一开始选定二维傍轴波动方程的时候就已经存在了. 为了摆脱傍轴条件的限制, 我们借鉴半贝塞尔光束的处理方式, 直接从非傍轴的含时标量波动方程出发:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=0, \quad (1)$$

式中, E 表示光波的电场强度, c 是真空中的光速, 为一常数.

对于含时波动方程通常的处理方法是采用时谐波假设, 直接将与时间 t 相关的函数设为 $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$, i 为虚数单位, ω 为角频率. 然后化为亥

* 国家自然科学基金 (批准号: 11274163, 11274164, 11374150, 11504166) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zhch@nju.edu.cn

姆霍兹方程的形式, 而我们避免这样的处理, 希望寻找类似Airy光束的含时非平凡解.

为了对(1)式进行更方便的处理, 我们参考相对论中对于时间和空间的协变处理, 从形式上引入第四维虚数坐标$p = \mathrm{i}ct$, 做一个变量代换, 那么(1)式即可变为

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial p^2} = 0. \tag{2}$$

从形式上讲(2)式是一个四维拉普拉斯方程, 为了获得比较简单的解, 我们做变量代换: $E(x, y, z, p) = E(x, y, p)\exp(\mathrm{i}k_z z)$, 其中$k_z$表示波矢$\boldsymbol{k}$在$z$方向上的分量的大小. 将其代入(2)式可以化简得

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial p^2} + (\mathrm{i}k_z)^2 E = 0, \tag{3}$$

此时依旧有三个变量, 若考虑y方向上为平面波形式: $\exp(\mathrm{i}k_y y)$, 式中k_y表示波矢$\boldsymbol{k}$在y方向上的分量的大小. 那么对于(3)式可以做进一步的化简:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial p^2} + \beta^2 E = 0, \tag{4}$$

其中β满足$\beta^2 = -k_y^2 - k_z^2$, 是一个纯虚数, 那么(4)式的一个严格解就可以写成0阶第一类贝塞尔函数的形式: $E = \mathrm{J}_0(\beta r)$, 这里$r = \sqrt{x^2 + p^2} = \sqrt{x^2 - c^2t^2}$, 相当于扩展的时空距离, 类似于相对论中定义的间隔. 于是最终解的形式可以表示为

$$\begin{aligned} & E(x, y, z, t) \\ = & \exp(\mathrm{i}k_y y + \mathrm{i}k_z z)\mathrm{J}_0(\beta\sqrt{x^2 - c^2t^2}). \end{aligned} \tag{5}$$

由(5)式所定义的光束就是本文所要讨论的新型特殊光束. 从形式上看, 该光束与常规的贝塞尔光束有一定类似之处, 然而两者的物理性质有着根本的区别, 由于该光束形式上含有带时间项的贝塞尔函数, 因此我们将其命名为"含时贝塞尔光束".

3 性质探讨

对照贝塞尔光束类型[18]的无衍射性质特征, 我们来探讨"含时贝塞尔光束"的无衍射性质. 文献[18]指出贝塞尔光束是一种严格无衍射光束:

$$E(x, y, z) = \mathrm{J}_0(k_1\rho)\exp(\mathrm{i}k_2 z), \tag{6}$$

其中$k_1^2 + k_2^2 = k^2$, $x^2 + y^2 = \rho^2$. 在沿z方向传播时, 光波的横向强度分布保持恒定, 差别仅在于一个和z有关的相位因子, 因而他们认为这就是一种严格无衍射光束.

对照(6)式, (5)式可以改写成如下形式:

$$E(x, y, z, t) = \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{r})\,\mathrm{J}_0(\beta\rho), \tag{7}$$

其中$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{r} = \mathrm{i}k_y y + \mathrm{i}k_z z$, $\boldsymbol{\alpha}$为y, z方向的合成波矢, $\boldsymbol{r}$为y, z方向的合成位移. $\rho = \sqrt{x^2 - c^2t^2}$可以理解为空间$x$方向和第四维时间坐标之间的方向合成. 在沿$\boldsymbol{r}$方向传播时, 光波的时空方向强度分布保持恒定, 差别仅在于一个和$\boldsymbol{r}$有关的相位因子. 通过和常规贝塞尔光束的类比, 可以认为这是一种四维时空意义上的无衍射光束.

为了更方便地理解, 我们分别从空间和时间两个方面来单独分析. 当时间t是一个定值的情形, 此时光波电场强度是关于空间x, y, z坐标的一个分布, 而强度$I(x, y, z, t) = \left|\mathrm{J}_0\left(\beta\sqrt{x^2 - c^2t^2}\right)\right|^2$则是关于空间$x$坐标的一个分布, 它不因传输距离$y$, z的变化而变化. 当空间坐标x是一个定值的情形, 此时光波电场强度是关于t, y, z的一个分布, 但对于强度I则只是关于时间t的一个分布, 它不因传输距离y, z的变化而变化. 图1是以$\beta = \mathrm{i}$, $c = 1$为特例, 做出的光束二维横向强度分布, 图1(a)和图1(b)是在时间t一定的情况下的光束的二维横向强度分布, 图1(c)和图1(d)是在空间距离x一定的情况下的光束的二维横向强度分布, 图1(b)和图1(d)都是在$x^2 = c^2t^2$为分界下, 将被湮没的细节做一个详细展示. 不论时间一定或者空间一定, 两种情况下的无衍射光束的有效宽度都是由β决定.

在图1中, 我们将时间一定或者空间一定的情况下的光波强度分布分别用两张图来展示, 这实际上是由(7)式中贝塞尔函数里面的项决定的, 它深刻影响着整个光束的特性. 其中β必然是一个纯虚数, 而$\rho = \sqrt{x^2 - c^2t^2}$可能为实数也可能为纯虚数, 以下我们对此做进一步的探讨.

对$\rho = \sqrt{x^2 - c^2t^2}$进行平方后得到$\rho^2 = x^2 - c^2t^2$, 这是一个标准双曲线方程的形式. 在每一个固定的ρ值处, 都会对应一条关于x-t的双曲线, 在这条双曲线上, 贝塞尔函数值是一个定值, 对光束强度不会造成影响. 因而随着时间的推移, 该光束中强度相同的光的轨迹会形成一系列的双曲线, 在同一条双曲线上传播的光波将严格保持强度恒定. 而随着的x-t延伸, 各条双曲线之间的距离将越来越靠近, 由此, 在延伸方向上, 强度将会越来越集中. 图2 ($\beta = \mathrm{i}$, $c = 1$)的强度分布就很好地展示了这些特性.

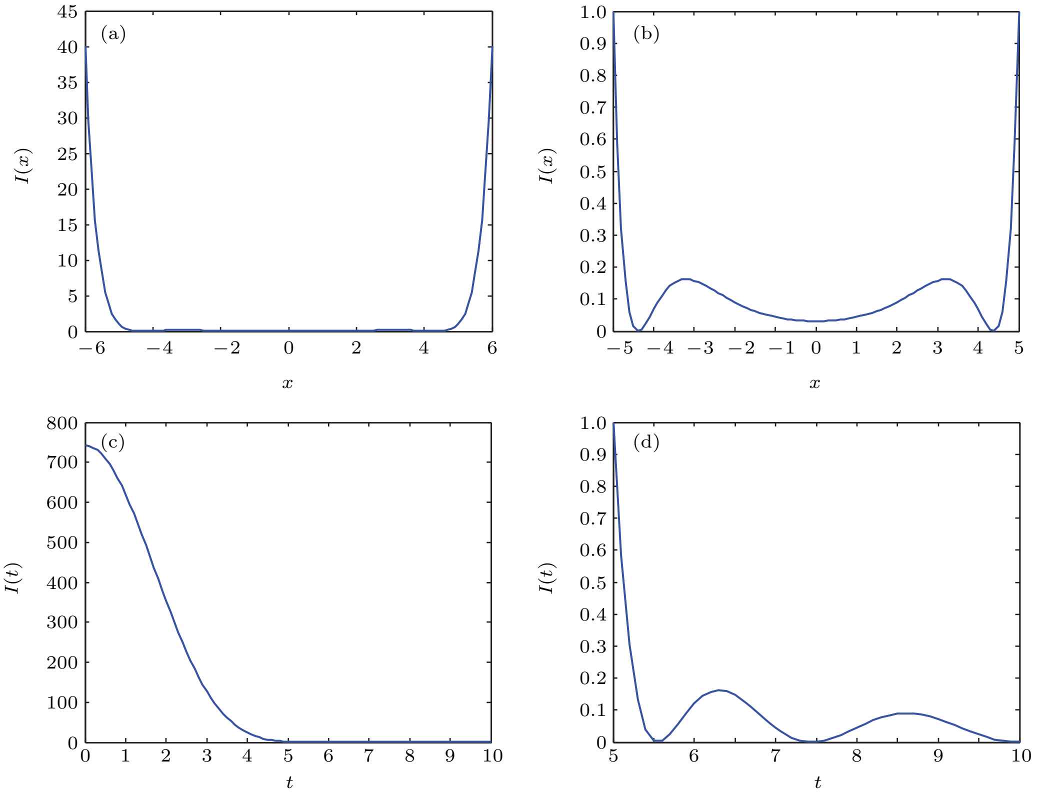

图1 光束二维横向强度分布 (a) 时间 t 一定, $t=5$, $x=[-6,6]$; (b) 时间 t 一定, $t=5$, $x=[-5,5]$; (c) 空间 x 一定, $x=5$, $t=[0,10]$; (d) 空间 x 一定, $x=5$, $t=[5,10]$

Fig. 1. The transverse intensity of the beam: (a) t is constant, $t=5$, $x=[-6,6]$; (b) t is constant, $t=5$, $x=[-5,5]$; (c) x is constant, $x=5$, $t=[0,10]$; (d) x is constant, $x=5$, $t=[5,10]$.

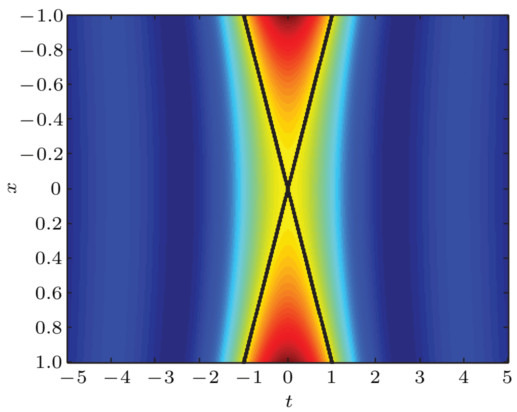

图2 (网刊彩色) 含时贝塞尔光束的时空强度分布

Fig. 2. (color online) The intensity distribution of the time-dependent Bessel beam.

另一方面, ρ 的数值的改变直接影响着双曲线特性的改变, 从而深刻影响着光波强度的时空特性. 从数学角度来看, 可以分为以下两类情况: 1) 当 $\rho^2=x^2-c^2t^2>0$ 时, ρ 为实数, 贝塞尔函数的宗量为纯虚数; 2) 当 $\rho^2=x^2-c^2t^2<0$ 时, ρ 为纯虚数, 贝塞尔函数的宗量为实数. 显然以 $\rho^2=x^2-c^2t^2=0$ 为分界, 两部分光波强度的性质是截然不同的. 在图2中可以明显地反映出来, 其临界条件为 $x^2=c^2t^2$ (图2中的两条黑线). 在图1中, 时间一定或者空间一定的情况下, 光波强度分布分别用两张图来展示, 是因为我们选取的变化范围恰好跨越了临界条件, 若只用一幅图会凸显临界条件一边的性质而掩盖另一边的性质细节.

更进一步, 我们发现这一临界条件与相对论中的光锥概念符合得很好, 印证了在不同的时空区域内, 含时贝塞尔光束有着完全不同的光波强度特性. 同时, 这种差别被临界条件隔离开来. 除此之外, 这一临界条件与光锥的符合, 恰好与我们一开始参考相对论引入第四维虚数坐标的处理方法相呼应, 说明我们的理论是自洽的.

4 结论与展望

本文从理论角度探寻新型的无衍射光束, 从麦克斯韦方程出发, 参考相对论的时空协变处理, 提出"含时贝塞尔光束"的概念, 并获得了该光束的严格解析式. 根据得到的解析表达式, 深入分析了其传播特性, 发现了该光束传播过程中的强度恒定性, 并简单探讨了其临界条件与相对论光锥之间的关联.

值得提出的是, 本文所研究的含时贝塞尔光束解析式是在一定的简单假设下获得的, 在不同的假设下, 会获得另外的解析结果, 因此完全可能存在其他的含时非傍轴无衍射光束, 这也是未来工作的方向. 另一方面, 本文对光束特性与光锥之间的关联仅作了初步探讨, 而两者更深层次的内在联系也值得进一步研究, 同时也希望本文工作为无衍射自加速光束的探究开启一个新的思路.

参考文献

[1] Berry M V, Balazs N L 1979 *Am. J. Phys.* **47** 264

[2] Siviloglou G A, Broky J, Dogariu A, Christodoulides D N 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 213901

[3] Siviloglou G A, Christodoulides D N 2007 *Opt. Lett.* **32** 979

[4] Broky J, Siviloglou G A, Dogariu A, Christodoulides D N 2008 *Opt. Express* **16** 12880

[5] Yue Y Y, Xiao H, Wang Z X, Wu M 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 044205 (in Chinese) [乐阳阳, 肖寒, 王子潇, 吴敏 2013 物理学报 **62** 044205]

[6] Li L, Li T, Wang S M, Zhang C, Zhu S N 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 126804

[7] Baumgartl J, Mazilu M, Dholakia K 2008 *Nat. Photon.* **2** 675

[8] Zhang P, Prakash J, Zhang Z, Mills M S, Efremidis N K, Christodoulides D N, Chen Z 2011 *Opt. Lett.* **36** 2883

[9] Polynkin P, Kolesik M, Moloney J V, Siviloglou G A, Christodoulides D N 2009 *Science* **324** 229

[10] Li J X, Zang W P, Tian J G 2010 *Opt. Express* **18** 7300

[11] Wang G H, Wang X F, Dong K G 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 165201 (in Chinese) [王广辉, 王晓方, 董克攻 2012 物理学报 **61** 165201]

[12] Guo C S, Wang S Z, Rong Z Y, Sha B 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 084201 (in Chinese) [国承山, 王淑贞, 荣振宇, 沙贝 2013 物理学报 **62** 084201]

[13] Hong X H, Yang B, Zhang C, Qin Y Q, Zhu Y Y 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 163902

[14] Lumer Y, Drori L, Hazan Y, Segev M 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 013901

[15] Bloch N V, Lereah Y, Lilach Y, Gover A, Arie A 2013 *Nature* **494** 331

[16] Kaminer I, Bekenstein R, Nemirovsky J, Segev M 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 163901

[17] Zhang P, Hu Y, Li T, Cannan D, Yin X B, Morandotti R, Chen Z G, Zhang X 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 193901

[18] Durnin J, Miceli Jr J J, Eberly J H 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 1499

Theoretical investigation on a kind of time-dependent Bessel beam*

Yue Yang-Yang[1,2] Zhang Xing-Yu[1,2] Yang Bo[1,2] Lu Rong-Er[1,2] Hong Xu-Hao[1,3]
Zhang Chao[1,2]† Qin Yi-Qiang[1,2] Zhu Yong-Yuan[1,3]

1) (*National Laboratory of Solid State Microstructures, Collaborative Innovation Center of Advanced Microstructures, Key Laboratory of Modern Acoustics, Nanjing University, Nanjing 210093, China*)

2) (*College of Engineering and Applied Sciences, Nanjing University, Nanjing 210093, China*)

3) (*School of Physics, Nanjing University, Nanjing 210093, China*)

(Received 29 February 2016; revised manuscript received 17 May 2016)

Abstract

Non-diffracting beams have been a hot topic since the Airy wave packet was introduced to optics domain from quantum mechanics. Great efforts have been made to study this theme in recent years. The researches have ranged from paraxial regime to non-paraxial regime, and a series of new non-diffracting beams have been discovered. However, most of these beams are obtained under the time harmonic condition. To break this limitation, we propose a concept of time-dependent Bessel beam in this paper, which generalizes the non-diffracting beams to non-time-harmonic regime.

We start from Maxwell's equations in vacuum under non-paraxial condition using the method borrowed from the half-Bessel beam. To obtain the non-time-harmonic solution, the fourth dimensional imaginary coordinate is introduced, which refers to the covariance in the theory of special relativity. By solving the wave equation without the time harmonic condition, we obtain the analytical expression for a time-dependent beam in the form of Bessel functions. Thus we call it time-dependent Bessel beam.

The diffraction properties and space-time characteristics of the time-dependent Bessel beam are investigated theoretically. The transverse intensity and the intensity distribution of the beam are calculated and discussed in detail. The wave function of the time-dependent Bessel beam is in the same form as the normal Bessel beam so that it can exhibit non-diffraction in the four dimensional space-time. When propagating along a space-time hyperbolic trajectory, the intensity of the time-dependent Bessel beam remains constant and the width of the beam decreases with propagating distance and time increasing. Besides, we deduce the critical condition of the spatiotemporal characteristics of the beam, and the result agrees well with the concept of the light cone in the theory of special relativity.

The method to deduce the time-dependent Bessel beam used in this paper is universal, and it will provide a valuable access to other solutions for the wave equations under different conditions. We extend the study of non-diffracting beams from time harmonic regime to non-time-harmonic regime. Furthermore, our work demonstrates the relation between the non-diffracting accelerating beams and the theory of special relativity. We believe this work will open up a new vista and give a new insight into the research of non-diffracting accelerating beams or other relevant research fields.

Keywords: time-dependent Bessel beams, non-diffraction, space-time characters, critical condition

PACS: 42.25.–p, 03.50.De, 41.20.Jb, 41.85.–p **DOI:** 10.7498/aps.65.144201

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11274163, 11274164, 11374150, 11504166).

† Corresponding author. E-mail: zhch@nju.edu.cn