

基于格子玻尔兹曼方法的一类 FitzHugh-Nagumo 系统仿真研究

何郁波 唐先华 林晓艳

Numerical simulation of a class of FitzHugh-Nagumo systems based on the lattice Boltzmann method

He Yu-Bo Tang Xian-Hua Lin Xiao-Yan

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 154701 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.154701

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.154701>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I15>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

探空温度传感器的计算流体动力学分析与实验研究

Computational fluid dynamics analysis and experimental study of sounding temperature sensor

物理学报.2016, 65(11): 114701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.114701>

基于间断有限元方法的并列圆柱层流流动特性

Numerical simulation of laminar flow past two side-by-side cylinders by discontinuous Galerkin method

物理学报.2016, 65(8): 084701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.084701>

三角波脉动流通栓的晶格玻尔兹曼方法模型

Triangle wave pulsating flow effect on thrombus simulated by the lattice Boltzmann method

物理学报.2016, 65(7): 074701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.074701>

多孔介质中流体流动及扩散的耦合格子 Boltzmann 模型

A coupled lattice Boltzmann model for fluid flow and diffusion in a porous medium

物理学报.2016, 65(1): 014702 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.014702>

干斜压大气拉格朗日原始方程组的半解析解法和非线性密度流数值试验

Semi-analytical solution of the dry baroclinic Lagrange primitive equation and numerical experiment of a non-linear density current

物理学报.2015, 64(19): 194702 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.194702>

基于格子玻尔兹曼方法的一类 FitzHugh-Nagumo 系统仿真研究*

何郁波^{1)2)†} 唐先华^{1)‡} 林晓艳²⁾

1)(中南大学, 数学与统计学院, 长沙 410083)

2)(怀化学院数学与应用数学系, 长沙 418008)

(2016年3月20日收到; 2016年5月25日收到修改稿)

格子玻尔兹曼方法在复杂的流体系统中得到了广泛的应用. 本文针对在高于阈值常电流刺激下神经元动作电位周期性振荡的 FitzHugh-Nagumo 系统, 构造了一类带源项和修正项的仿真格子玻尔兹曼模型. 通过合理选择适当的局部平衡态分布函数和修正函数, 再应用 Chapman-Enskog 多尺度分析, 可以正确恢复出一类宏观非线性方程. 通过积分法得到了修正函数的构造方法, 并分析了格子玻尔兹曼模型 L^∞ 稳定的充分条件. 利用网格相关性分析, 本文所构造的模型具有二阶空间精度. 应用本文所提出的模型, 仿真模拟了几个具有解析解的初边值系统, 并与传统的改进有限差分格式 (MFDM) 进行了对比, 结果表明本文模型所得的数值解与解析解吻合, 其模拟误差小于 MFDM. 此外, 还针对不具有解析解的初边值系统进行了数值仿真, 并与 MFDM 进行了对比. 数值结果表明, 两种计算格式的数值解比较吻合, 进一步证明了本文所构造模型的有效性和稳定性.

关键词: 格子玻尔兹曼模型, FitzHugh-Nagumo 方程, Chapman-Enskog 展开, 有限差分法

PACS: 47.11.-j, 47.11.Qr, 47.55.Kf

DOI: 10.7498/aps.65.154701

1 引言

随着计算机硬件和软件技术的快速发展, 仿真和数值模拟方法日益成为研究计算流体力学的重要手段^[1-3]. 传统的仿真模拟方法包括有限差分、有限元、有限体积等方法, 还包括近二十年来兴起的格子玻尔兹曼方法 (lattice Boltzmann method, LBM). 关于 LBM 在处理流体建模方面的最新进展, 可参阅综述文献^[4].

LBM 是基于微观模型和介观动力学方程的数值仿真技术, 从诞生至今一直受到国内外学者的广泛关注. LBM 将连续流体假想为离散粒子分布到欧拉坐标系的格子上, 采用固定的欧拉网格代表流场, 避免传统的有限体积法和有限元方法中移动网

格的重建, 降低计算成本, 在多相流^[5]、非牛顿流体^[6]、悬浮粒子流^[7]、微流体^[8]、多孔流^[9]等复杂的流体系统^[10]中具有较多优势. LBM 的特点是利用微观特性反映出宏观问题, 从而更有效地从问题的本质出发来解决问题. LBM 方法的原理就是将流体抽象为大量具有离散速度的微观流体粒子的集合, 流体粒子在离散格子上按一定规则进行迁移和碰撞, 通过对粒子密度分布函数变化过程进行统计, 获得宏观流动信息. LBM 演化方程如下:

$$f_i(x + e_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(x, t) = -\frac{1}{\tau} [f_i(x, t) - f_i^{(eq)}(x, t)], \quad (1)$$

其中, $f_i(x, t)$ 为 t 时刻粒子密度分布函数, 即 x 位置处以 e_i 速度运动的粒子量; Δt 是时间步长; Δx

* 国家自然科学基金 (批准号: 11471137, 11571370, 11501232) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: heyinpc@csu.edu.cn

‡ 通信作者. E-mail: tangxh@csu.edu.cn

是网格单位长度; $f_i^{(eq)}(x, t)$ 是粒子密度平衡态分布函数; τ 是弛豫时间. e_i 和 $f_i^{(eq)}(x, t)$ 由所选取的 LBM 模型决定. 宏观流速 u 和格子点上的流体密度 ρ 满足动量守恒定律和质量守恒定律:

$$\rho = \sum_i f_i, \quad \rho \cdot u = \sum_i e_i f_i. \quad (2)$$

LBM 独特的微观粒子背景使它有别于传统方法, 且在处理某些问题上已经显示出比传统计算方法具有更高的稳定性、有效性和精度. 从编程计算的角度看, LBM 的演化过程物理清晰, 计算简单, 编程容易, 并且因为计算是局部的, 故具有良好的并行性和扩展性, 在复杂的流体系统中具有较多优势 [11-14]. 近年来, 也用 LBM 方法来仿真模拟一些非线性演化模型. 如 Burgers 系统 [15,16], MKDV 系统 [17]. 文献 [18] 中提出了模拟 KdV-Burgers 系统的一种带修正项的格子 Boltzmann 模型. 文献 [19, 20] 中分别提出了针对二维偏微分方程组和带源项的非线性偏微分方程的格子 Boltzmann 模型.

本文考虑利用 LBM 仿真模拟一类 FitzHugh-Nagumo 系统.

$$u_t - \nabla^2 u = F(u), \quad (3)$$

其中 $F(u) = u(u - \alpha)(1 - u)$, α 为任意常数, $u(x, t)$ 是域函数, ∇ 是域函数关于空间的梯度算子. 1952 年, Hodgkin 和 Huxley 通过对神经纤维中神经冲动传播的研究, 提出了 Hodgkin-Huxley (HH) 模型. 该模型是用来描述神经元的轴突中膜电位和膜电流之间关系的微分方程组. 而 FitzHugh-Nagumo 系统是 FitzHugh 和 Nagumo 等基于 HH 模型建立的一个简化模型, FitzHugh-Nagumo 系统是一类重要的非线性反应扩散系统 [21], 除了通常用于模拟神经脉冲的传输 [22-25], 也作为数学模型用在电路理论、生物学以及种群遗传学等领域 [26]. 同时作为热传导模型, FitzHugh-Nagumo 系统也描述了温度的动态扩散过程.

近些年来, 人们对于神经脉冲传导的 FHN 系统已经做了很多的研究 [27-32], 但是对此类系统数值仿真的研究还比较少. 本文考虑在高于阈值的常电流刺激下神经元动作电位的周期性振荡非线性带源项的 FitzHugh-Nagumo 系统的 LBM 模型.

系统 (3) 中, 当 $\alpha = -1$ 时, FitzHugh-Nagumo 系统退化为实的 Newell-Whitehead 系统. 应用 Hirota 方法, Kawahara 和 Tanaka [33] 找到了系统 (3)

的精确解; 利用非经典的对称约化方法, Nucci 和 Clarkson [34] 得到了系统 (3) 带 Jacobbi 椭圆函数的一些精确解. Li 和 Guo [35] 应用第一积分方法, 获得了 FitzHugh-Nagumo 系统的一系列新精确解.

本文考虑在高于阈值的常电流的刺激下, 神经元动作电位周期性振荡的 FitzHugh-Nagumo 系统. 当系统在高于阈值的常电流的刺激下, 系统的势函数 $F(u)$ 中未知参数 α 对神经元脉冲传播方向会产生影响; 另外, 我们研究当参数 α 小于何值时, 神经元脉冲会产生爆破现象. 文中构造了一类带源项 $F(u)$ 和修正函数的格子玻尔兹曼模型. 通过合理选择适当的局部平衡态分布函数和修正函数, 再应用 Chapman-Enskog 多尺度分析, 可以正确恢复出一类宏观非线性方程. 我们通过积分方法得到了修正函数的构造方法, 并分析了格子玻尔兹曼模型 L^∞ 稳定性的充分条件. 利用网格相关性的分析, 我们得到文中所构造的格子玻尔兹曼模型具有二阶空间精度. 同时针对具有解析解和不具有解析解的几类初边值问题, 利用本文模型所得到的数值解和改进的有限差分法得到的数值解进行了对比, 数值试验的结果表明文中所建立的迭代格式合理有效, 数值解和解析解相吻合, 误差精度高于改进的有限差分法.

本文剩余部分的安排如下: 第二节提出了模拟 FitzHugh-Nagumo 系统带修正项和源项的 LBM 演化方程, 并设计了一种构造修正函数的积分方法; 第三、第四和第五节分别是模型的稳定性分析、数值试验及结论.

2 带修正函数和源项的格子玻尔兹曼模型及截断误差

根据 LBM 的理论, 其状态演化可以分为两个阶段:

- 1) 迁移过程, 粒子从一个节点在一个时间步长内, 以恒定的速度运动到相邻的节点;
- 2) 碰撞过程, 每一个格点上的粒子与从相邻节点运动来的粒子发生碰撞, 根据质量、动量和能量守恒的规则, 使得在格点各个方向上粒子的分布函数得到相应的改变, 从而通过改变各个方向上粒子的分布来进行动量和能量的演化.

本文设计带修正项和源项的格子 BGK 演化

方程为

$$\begin{aligned}
 & f_i(x + c\epsilon e_i, t + \epsilon^2 T) - f_i(x, t) \\
 &= -\frac{1}{\tau}[f_i(x, t) - f_i^{(\text{eq})}(x, t)] + \epsilon h_i(u) \\
 & \quad + \frac{\epsilon^3 d}{4} F(u), \tag{4}
 \end{aligned}$$

其中 $f_i(x, t)$ ($i = 1-4$) 和 $f_i^{(\text{eq})}(x, t)$ ($i = 1-4$) 分别表示密度分布函数和局部平衡态分布函数; $\epsilon h_i(u)$ 为修正项, $\frac{\epsilon^3 d}{4} F(u)$ 为源项; T 为无量纲的特征时间; c 为常数; τ 为弛豫时间, 稳定性要求 $\tau > 1/2$.

我们采用一维五速格子离散速度模型, 离散速度方向 e_i ($i = 1-4$) 定义如下:

$$\begin{aligned}
 e_0 &= 0, \quad e_1 = 1, \quad e_2 = -1, \\
 e_3 &= 2, \quad e_4 = -2. \tag{5}
 \end{aligned}$$

宏观变量 u 满足如下守恒条件

$$u = \sum_i f_i(x, t) = \sum_i f_i^{(\text{eq})}(x, t). \tag{6}$$

只需选择合适的局部平衡态分布函数 $f_i^{(\text{eq})}(x, t)$ ($i = 1-4$) 和修正函数 $h_i(u)$ ($i = 1-4$), 再通过对分布函数的 Taylor 展开和 Chapman-Enskog 多尺度分析, 便可恢复出对应的宏观方程. 我们定义局部平衡态分布函数 $f_i^{(\text{eq})}(x, t)$ ($i = 1-4$) 如下:

$$\begin{aligned}
 \sum_i e_i f_i^{(\text{eq})}(x, t) &= 0, \\
 \sum_i e_i^2 f_i^{(\text{eq})}(x, t) &= \lambda u, \\
 \sum_i e_i^3 f_i^{(\text{eq})}(x, t) &= \eta u, \tag{7}
 \end{aligned}$$

其中 λ 和 η 是待定常数.

对方程 (4) 左边运用 Taylor 展开, 并保留至 $O(\epsilon^4)$ 项, 得到

$$\begin{aligned}
 & \epsilon^2 T \frac{\partial f_i(x, t)}{\partial t} + c\epsilon(e_i \frac{\partial}{\partial x}) f_i(x, t) \\
 & + \frac{1}{2} c^2 \epsilon^2 e_i^2 \frac{\partial^2 f_i(x, t)}{\partial x^2} + c\epsilon^3 T e_i \frac{\partial^2 f_i(x, t)}{\partial x \partial t} \\
 & + \frac{1}{6} c^3 \epsilon^3 e_i^3 \frac{\partial^3 f_i(x, t)}{\partial x^3} \\
 &= -\frac{1}{\tau}[f_i(x, t) - f_i^{(\text{eq})}(x, t)] + \epsilon h_i(u) \\
 & \quad + \frac{\epsilon^3 d}{4} F(u). \tag{8}
 \end{aligned}$$

利用 Chapman-Enskog 多尺度展开技术, 有

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + o(\epsilon^2), \\ f_i(x, t) = f_i^{(\text{eq})}(x, t) + \epsilon f_i^{(1)}(x, t) \\ \quad + \epsilon^2 f_i^{(2)}(x, t) + \epsilon^3 f_i^{(3)}(x, t) + o(\epsilon^3). \end{cases} \tag{9}$$

其中 $f_i^{(k)}(x, t)$, ($k = 1, 2, 3$) 是非平衡态分布函数, 满足可解性条件:

$$\sum_i f_i^{(k)}(x, t) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots).$$

记 $f_i^{(k)} = f_i^{(k)}(x, t)$, $f_i^{(\text{eq})} = f_i^{(\text{eq})}(x, t)$, 将 (9) 式代入 (8) 式, 得到不同精度的格子 Boltzmann 方程.

$O(\epsilon)$:

$$c \frac{\partial}{\partial x} (e_i f_i^{(\text{eq})}) - h_i = -\frac{1}{\tau} f_i^{(1)}, \tag{10}$$

$O(\epsilon^2)$:

$$\begin{aligned}
 & T \frac{\partial f_i^{(\text{eq})}}{\partial t_0} + c \frac{\partial}{\partial x} (e_i f_i^{(1)}) \\
 & + \frac{1}{2} c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (e_i^2 f_i^{(\text{eq})}) = -\frac{1}{\tau} f_i^{(2)}, \tag{11}
 \end{aligned}$$

$O(\epsilon^3)$:

$$\begin{aligned}
 & T \frac{\partial f_i^{(\text{eq})}}{\partial t_1} + T \frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial t_0} + cT \frac{\partial^2}{\partial t_0 \partial x} (e_i f_i^{(\text{eq})}) \\
 & + c \frac{\partial}{\partial x} (e_i f_i^{(2)}) + \frac{1}{2} c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (e_i^2 f_i^{(1)}) \\
 & + \frac{1}{6} c^3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} (e_i^3 f_i^{(\text{eq})}) = -\frac{1}{\tau} f_i^{(3)} + \frac{d}{4} F(u). \tag{12}
 \end{aligned}$$

在方程 (10) 两边关于 i 求速度矩, 并利用 (6) 式和 (7) 式, 得到 $f_i^{(1)}$ 的表达式及一阶和二阶矩,

$$\begin{aligned}
 e_i f_i^{(1)} &= \tau e_i h_i - c\tau \frac{\partial}{\partial x} (e_i^2 f_i^{(\text{eq})}), \\
 e_i^2 f_i^{(1)} &= \tau e_i^2 h_i - c\tau \frac{\partial}{\partial x} (e_i^3 f_i^{(\text{eq})}), \tag{13}
 \end{aligned}$$

$$\sum_i e_i f_i^{(1)} = \tau \sum_i e_i h_i - c\tau \lambda \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{14}$$

$$\sum_i e_i^2 f_i^{(1)} = \tau \sum_i e_i^2 h_i - c\tau \eta \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{15}$$

我们记

$$\Phi(u) = \sum_i e_i h_i(u). \tag{16}$$

为了恢复宏观方程 (3), 令修正函数 $h_i(u)$ ($i = 1-4$) 满足

$$\begin{cases} h_1(u) + h_2(u) = 0, \\ h_3(u) + h_4(u) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

由(5)式和(17)式, 立即得到修正函数 $h_i(u)$ ($i = 1-4$) 满足

$$\sum_i e_i^2 h_i(u) = 0. \quad (18)$$

将方程(13)代入(11)得

$$T \frac{\partial f_i^{(eq)}}{\partial t_0} + c^2 \left(\frac{1}{2} - \tau\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (e_i^2 f_i^{(eq)}) + c\tau \frac{\partial}{\partial x} (e_i h_i) = -\frac{1}{\tau} f_i^{(2)}. \quad (19)$$

从而可得

$$f_i^{(2)} = -\tau T \frac{\partial f_i^{(eq)}}{\partial t_0} - c^2 \tau \left(\frac{1}{2} - \tau\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (e_i^2 f_i^{(eq)}) - c\tau^2 \frac{\partial}{\partial x} (e_i h_i) \quad (20)$$

和

$$e_i f_i^{(2)} = -\tau T \frac{\partial}{\partial t_0} (e_i f_i^{(eq)}) - c^2 \tau \left(\frac{1}{2} - \tau\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (e_i^3 f_i^{(eq)}) - c\tau^2 \frac{\partial}{\partial x} (e_i^2 h_i). \quad (21)$$

分别求方程(11)的零阶矩和一阶矩, 则得到如下方程:

$$T \frac{\partial u}{\partial t_0} + c\tau \frac{\partial \Phi(u)}{\partial x} + c^2 \lambda \left(\frac{1}{2} - \tau\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (22)$$

$$\sum_i e_i f_i^{(2)} = c^2 \eta \left(\tau^2 - \frac{1}{2}\tau\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (23)$$

将(7), (13)和(21)式代入(12)式得

$$T \frac{\partial f_i^{(eq)}}{\partial t_1} + \tau T \frac{\partial h_i}{\partial t_0} + cT(1-2\tau) \frac{\partial^2}{\partial t_0 \partial x} (e_i f_i^{(eq)}) + c^2 \tau \left(\frac{1}{2} - \tau\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (e_i^2 h_i) + c^3 \left(\tau^2 - \tau + \frac{1}{6}\right) \frac{\partial^3}{\partial x^3} (e_i^3 f_i^{(eq)}) = -\frac{1}{\tau} f_i^{(3)} + \frac{d}{4} F(u). \quad (24)$$

由(24)式可得截断误差项

$$R = T \frac{\partial}{\partial t_1} \sum_i f_i^{(eq)} + \tau T \frac{\partial}{\partial t_0} \sum_i h_i + cT(1-2\tau) \frac{\partial^2}{\partial t_0 \partial x} \left(\sum_i e_i f_i^{(eq)}\right) + c^2 \tau \left(\frac{1}{2} - \tau\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sum_i e_i^2 h_i\right) + c^3 \left(\tau^2 - \tau + \frac{1}{6}\right) \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\sum_i e_i^3 f_i^{(eq)}\right). \quad (25)$$

(25)式表明, 对于五速度模型, 恢复具有二阶导数项的宏观方程, 截断误差项与局部平衡态分布函数的零阶、一阶和三阶矩, 修正函数的零阶和二阶矩有关. 在方程(24)两边关于 i 求和, 联合(6), (7), (17)和(18)式有

$$T \frac{\partial u}{\partial t_1} + c^3 \eta \left(\tau^2 - \tau + \frac{1}{6}\right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = dF(u). \quad (26)$$

为了恢复宏观方程, 并使截断误差(25)最小, 我们合理选择局部平衡态分布函数 $f_i^{(eq)}$, ($i = 1-4$) 和修正函数 $h_i(u)$, ($i = 1-4$) 满足(7), (17)和(18)式.

由(22)+ ε ×(26)式, 则得到恢复的宏观方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c\tau}{T} \frac{\partial \Phi(u)}{\partial x} + \frac{1}{T} c^2 \lambda \left(\frac{1}{2} - \tau\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon c^3 \eta}{T} \left(\tau^2 - \tau + \frac{1}{6}\right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{\varepsilon d}{T} F(u). \quad (27)$$

比较方程(3)和方程(27)两边, 只要令

$$\Phi(u) = \int_0^u F(s) ds = \int_0^u s(s-\alpha)(1-s) ds = \frac{1}{12} u^2 (6\alpha - 4u - 4\alpha u + 3u^2) \quad (28)$$

和

$$\begin{cases} \frac{\lambda c^2 (\tau - 1/2)}{T} = 1, \\ \frac{c^2 \varepsilon \eta (\tau^2 - \tau + 1/6)}{T} = 0, \\ \frac{d\varepsilon - c\tau}{T} = 1, \end{cases}$$

即可. 在模型中我们取

$$\Delta x = c\varepsilon = h, \quad \Delta t = \varepsilon^2 T, \quad (29)$$

则得到

$$\begin{cases} \tau = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} > \frac{1}{2}, \\ d\varepsilon^3 = \Delta t + \tau \Delta x, \\ \lambda = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2 (\tau - 1/2)}, \quad \eta = 0. \end{cases} \quad (30)$$

求解方程(6)和(7), 得到模拟 FitzHugh-Nagumo 系统(3)的局部平衡态分布函数

$$\begin{cases} f_1^{(eq)} = \frac{1}{6} (4 - \lambda - \eta) u \triangleq \theta_1 u, \\ f_2^{(eq)} = \frac{1}{6} (4 - \lambda + \eta) u \triangleq \theta_2 u, \\ f_3^{(eq)} = \frac{1}{12} (2\lambda + \eta - 2) u \triangleq \theta_3 u, \\ f_4^{(eq)} = \frac{1}{12} (2\lambda - \eta - 2) u \triangleq \theta_4 u. \end{cases} \quad (31)$$

利用方程 (16), (17) 和 (28), 可以定义多组修正函数 $h_i (i = 1-4)$. 本文中, 我们定义修正函数如下:

$$\left\{ \begin{aligned} h_1(u) &= \frac{1}{2}\Phi(u) \\ &= \frac{1}{24}u^2(6\alpha - 4u - 4\alpha u + 3u^2), \\ h_2(u) &= -\frac{1}{2}\Phi(u) \\ &= -\frac{1}{24}u^2(6\alpha - 4u - 4\alpha u + 3u^2), \\ h_3(u) &= \frac{1}{4}\Phi(u) \\ &= \frac{1}{48}u^2(6\alpha - 4u - 4\alpha u + 3u^2), \\ h_4(u) &= -\frac{1}{4}\Phi(u) \\ &= -\frac{1}{48}u^2(6\alpha - 4u - 4\alpha u + 3u^2). \end{aligned} \right. \quad (32)$$

3 稳定性分析

本节, 我们将分析迭代格式的稳定性. 首先, 根据演化方程 (4), 我们得到各个方向上的迭代格式

$$\left\{ \begin{aligned} f_{1,j+1}^{n+1} &= \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) f_{1,j}^n + \frac{\theta_1}{\tau} u_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} h_1(u_j^n) \\ &\quad + \frac{\tau\Delta x + \Delta t}{4} F(u_j^n), \\ f_{2,j-1}^{n+1} &= \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) f_{2,j}^n + \frac{\theta_2}{\tau} u_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} h_2(u_j^n) \\ &\quad + \frac{\tau\Delta x + \Delta t}{4} F(u_j^n), \\ f_{3,j+2}^{n+1} &= \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) f_{3,j}^n + \frac{\theta_3}{\tau} u_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} h_3(u_j^n) \\ &\quad + \frac{\tau\Delta x + \Delta t}{4} F(u_j^n), \\ f_{4,j-2}^{n+1} &= \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) f_{4,j}^n + \frac{\theta_4}{\tau} u_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} h_4(u_j^n) \\ &\quad + \frac{\tau\Delta x + \Delta t}{4} F(u_j^n), \end{aligned} \right. \quad (33)$$

其中 $f_{i,j}^n = f_i(x_j, t_n)$, $t_n = n \cdot \Delta t$, $x_j = j \cdot \Delta x$, $u_j^n = \sum_i f_{i,j}^n$, $f_{i,j}^{(0)} = f_{i,j}^{(eq)} = \theta_j u_j^0$, $u_j^0 = u_0(x_j)$ ($i = 1-4$).

假设初值 $u_0(x)$ 有界且光滑. 当 $\alpha \in [-1, 2]$ 时, 我们将分析迭代格式 (33) 是 L^∞ 稳定的. 不难看出当 $\alpha \in [-1, 2]$ 时, 源项函数 $F(u)$ 是单调递减的, 因此我们在稳定性分析时不考虑源项函数 $F(u)$, 用

$H(w)$ 记迭代格式 (33) 的左边

$$\begin{aligned} H(w_1, w_2, \dots, w_8) &= \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) \sum_{i=1}^4 w_i + \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^4 \theta_i w_{i+4} \\ &\quad + \frac{\Delta t}{16\Delta x} (2w_5^4 - 2w_6^4 + w_7^4 - w_8^4) \\ &\quad + \frac{(1+\alpha)\Delta t}{12\Delta x} (-2w_5^3 + 2w_6^3 - w_7^3 + w_8^3) \\ &\quad + \frac{\alpha\Delta t}{8\Delta x} (2w_5^2 - 2w_6^2 + w_7^2 - w_8^2). \end{aligned} \quad (34)$$

其中 θ_i 由 (31) 式定义.

假设

$$|u_0(x)| \leq 1. \quad (35)$$

联合方程 (30), (34) 和 (35), 当且仅当

$$\theta_i \leq -\tau(1+\alpha) \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (i = 1-4), \quad (36)$$

算子 $H(w)$ 单调递减. 因此迭代格式 (33) 是单调的.

下面引理指出迭代格式 (33) 满足极值原理.

引理 [极值原理^[15]] 若初始值满足 $|u_0(x)| \leq 1$ 且限制条件 (36) 成立. 则对于任意 $\forall j \in Z$, 函数 $u(x, t)$ 满足

$$\min_l u_l^0 \leq u_j^{n+1} \leq \max_l u_l^0, \quad n \geq 0. \quad (37)$$

由 (37) 式, 我们有

$$\begin{aligned} \|u^{(n+1)}\|_\infty &= \max_j |u_j^{n+1}| \leq \max_j |u_j^0| \\ &= u_L^0 = \|u^0\|_\infty, \end{aligned} \quad (38)$$

因此迭代格式 (33) 是在 L^∞ 意义下的稳定格式.

注: 限制条件 (35), (36) 是充分非必要条件.

4 数值模拟

为了验证上述模型的正确性和有效性, 本节给出针对不同 α 的 FitzHugh-Nagumo 系统的数值模拟结果. 我们将所构造的 LBM 模型的数值结果与改进的有限差分法 (modified finite difference method, MFDM) 的数值结果进行对比, MFDM 格式如下.

变量对时间的一阶导数采用三阶全变差下降龙格库塔 (TVD Runge-Kutta) 显式时间推进格式^[14]:

$$\begin{cases} u^{(1)} = u^k + \Delta t \left(\frac{\partial^2 u^k}{\partial x^2} + F(u^k) \right), \\ u^{(2)} = \frac{3}{4}u^k + \frac{1}{4}u^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t \left(\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} + F(u^{(1)}) \right), \\ u^{k+1} = \frac{1}{3}u^k + \frac{2}{3}u^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t \left(\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} + F(u^{(2)}) \right). \end{cases}$$

空间导数采用中心差分格式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2}.$$

当时间 $t = 0$ 时, 所有节点上分布函数 $f_i(x, t)$ 初始化成与局部平衡态函数 $f_i^{(eq)}(x, t)$ 相等. 流速 $u(x, t)$ 满足初始化条件, 若边界条件未知时边界处理采用 Guo 等 [36] 提出的非平衡态外推格式. 为测定模型误差精度, 我们定义总体相对误差 (GRE) 为

$$GRE = \frac{\sum_i |u(x_i, t) - u^*(x_i, t)|}{\sum_i |u^*(x_i, t)|},$$

其中 $u(x_i, t), u^*(x_i, t)$ 分别为数值解和解析解, 在所有的格点进行求和. 我们定义 L_∞ 模误差和 L_2 模误差如下:

$$L_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |u(x_i, t) - u^*(x_i, t)|,$$

表1 FitzHugh-Nagumo 系统在不同时刻数值解与解析解的全局相对误差
Table 1. Comparison of the GRE at different time obtained by the LBM with the analytical solution.

t/s	1	2	3	4	5
GRE	8.6305×10^{-4}	3.5518×10^{-4}	2.5688×10^{-4}	1.4098×10^{-4}	5.6811×10^{-4}

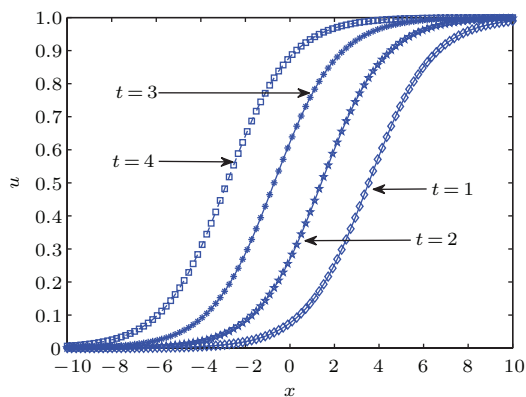


图1 不同时刻解析解和 LBM 得到的数值解的比较, 实线代表解析解

Fig. 1. Comparison of $u(x, t)$ at different time between the numerical solutions obtained by LBM and analytical solutions of $u(x, t)$. The solid line represents the analytical solution.

$$L_2 = \left(\sum_i |u(x_i, t) - u^*(x_i, t)|^2 \right)^{1/2}.$$

算例 1 [13] 在带边界条件和初始条件的 FitzHugh-Nagumo 系统中取 $\alpha = -1$

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = F(u) = u(u+1)(1-u) \\ x \in \Omega = [-10, 10], \\ u(-10, t) = 0, u(10, t) = 1 \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) = \frac{1}{2} \left[1 - \coth \left(-\frac{x}{2\sqrt{2}} \right) \right] \quad x \in \Omega. \end{cases}$$

其精确解为

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[1 - \coth \left(-\frac{x}{2\sqrt{2}} - \frac{3}{4}t + c \right) \right],$$

其中 c 为任意常数.

数值模拟中, 我们取参数 $c = 2, \Delta x = 0.1, \Delta t = 0.0001, \Omega = [-10, 10]$, 格子数是 200. 时刻 $t = 1, t = 2, t = 3$ 和 $t = 4$ 的模拟结果见图 1. 我们还给出了不同时刻的全局相对误差, 见表 1.

对算例 2, 参数同算例 1, 不同时刻 $t = 1, t = 2, t = 3$ 和 $t = 4$ 的模拟结果见图 2. 从图 1 和图 2 可以看出, 本文所构造的 LBM 所得到的数值解与解析解拟合得很好.

算例 2 FitzHugh-Nagumo 系统中取 $\alpha = 2$

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = F(u) = u(u-2)(1-u) \\ x \in \Omega = [-20, 0], \\ u(-20, t) = 1, u(0, t) = 0 \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = \frac{1}{2} \left[1 - \coth \left(-\frac{x}{2\sqrt{2}} \right) \right] \quad x \in \Omega, \end{cases}$$

有精确解

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[1 - \coth \left(-\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{4}t + c \right) \right],$$

其中 c 是任意常数.

从图 1 和图 2 可以知, 当系统受到外界高于阈值常电流的干扰作用时, 神经元电波的传导方式呈周期波的形式. 神经元电波的振幅为 $u(x, t) = 1$, 系统右端的势函数 $F(u)$ 中参数 α 小于零时, 神经

元电波的传播方向为沿着空间的正方向传递; 当势函数中参数 α 大于零时, 神经元电波的传播方向反向. 由此可见, 系统中的参数 α 是与神经元产生的神经脉冲传输方向密切相关的.

算例 3 FitzHugh-Nagumo 系统中取 $\alpha = -2$

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = F(u) = u(u+2)(1-u) \\ x \in \Omega = [-10, 10], \\ u(-10, t) = -5, u(10, t) = 5 \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) = \frac{1}{2} \left[1 - \coth \left(-\frac{x}{2\sqrt{2}} \right) \right] \quad x \in \Omega. \end{cases}$$

对上述初边值问题, 目前尚未有统一的解析解表达式. 我们选取相同的初始条件和边界条件, 给出了所构造的格子玻尔兹曼模型数值解和改进的有限差分法的数值解的对比.

在数值模拟试验中, 空间步长 $\Delta x = 0.05$, $\Delta t = 0.0001$, 空间网格数 $N = 400$. 对于改进的有限差分法的时间步长和空间步长均与格子玻尔兹曼模型取值相同, 数值计算区域为 $[-10, 10]$, 仿真结果见图 3.

图 3 说明, 当系统势函数 $F(u)$ 中的参数 α 的取值小于 -1 时, 即使在受到外界高于阈值常电流的刺激, 神经元产生的神经脉冲发生爆破的现象. 此

时, 在平衡位置 $x = 0$ 处神经脉冲产生爆破, 且爆破现象不会随时间的推移而消失. 从四组数值试验可以看出, 本文所构造的格子玻尔兹曼模型的数值解与改进的有限差分法得到的数值解非常吻合, 具有很好的一致性, 表明所构造的格子玻尔兹曼模型的有效性和稳定性.

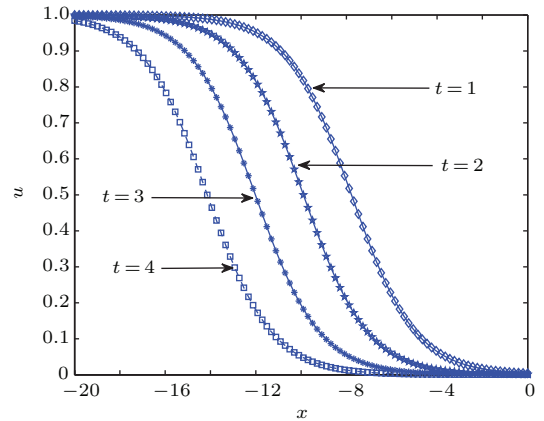


图 2 不同时刻解析解和 LBM 得到的数值解的比较, 实线代表解析解

Fig. 2. Comparison of $u(x, t)$ at different time between the numerical solutions obtained by LBM and analytical solutions of $u(x, t)$. The solid line represents the analytical solution.

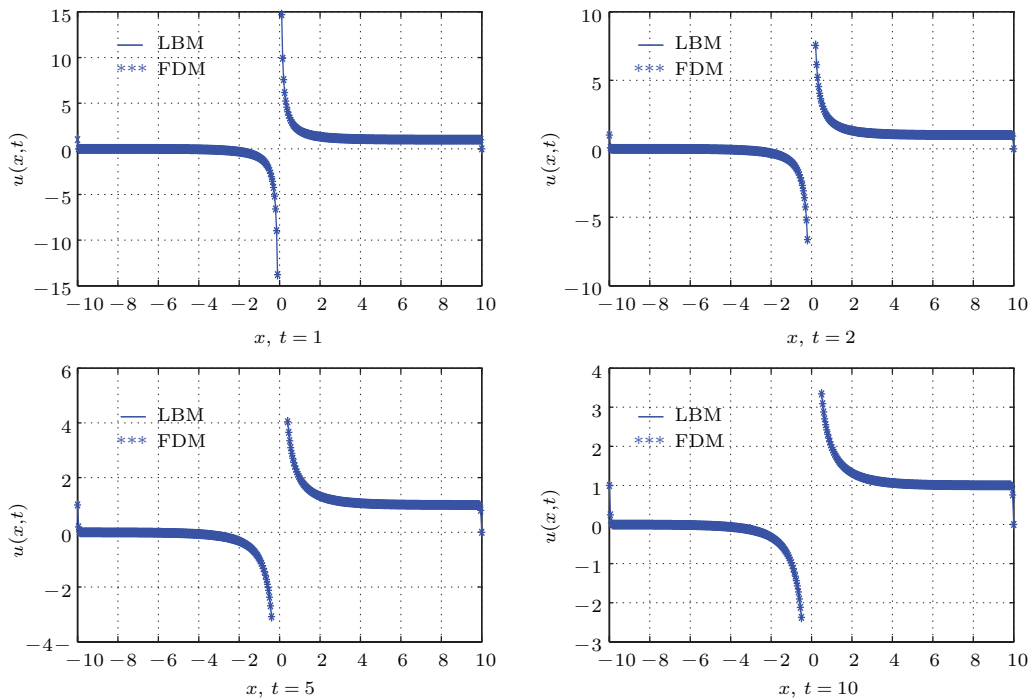


图 3 (网刊彩色) LBM 的数值解 $u(x, t)$ 与 MFDM 的数值解 $u(x, t)$ 的对比, 实线代表 LBM 方法得到的数值解, * 代表 MFDM 得到的数值解

Fig. 3. (color online) Comparison of the numerical solution of $u(x, t)$ obtained by the LBM with the modified finite difference method (MFDM). The solid line represents the solution obtained by the LBM, and * represents the solution obtained by the MFDM.

算例4 FitzHugh-Nagumo 系统中取 $\alpha = 3/4$

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = F(u) = u\left(u - \frac{3}{4}\right)(1 - u) \\ x \in \Omega = [-10, 10], \quad t > 0, \\ u(-10, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh\left(-\frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{t}{8}\right) \quad t > 0, \\ u(10, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{t}{8}\right) \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right) \quad x \in \Omega. \end{cases}$$

有精确解

$$u(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} - \frac{t}{8}\right).$$

为了考察本文所构造的格子玻尔兹曼模型的误差精度, 我们给出了七种不同时刻下LBM和MFDM的数值解与解析解的误差对比情况, 见表2. 数值模拟结果表明, 本文所构造的LBM模型数值解的误差小于MFDM得到数值解的误差.

同时, 我们也给出了由本文所构造的LBM的

数值解与解析解的时空演化图. 图4(a)为LBM所获得 $u(x, t)$ 的数值解; 图4(b)为解析解. 我们可以看到两者具有很好的一致性, 进一步说明了本文所构造的格子玻尔兹曼模型的有效性.

进一步, 我们考察在相同的时间步长下, 不同的空间网格数对格子玻尔兹曼模型误差精度的影响. 为了减少时间步长对精度的影响, 尽量选取较小的时间步长 $\Delta t = 0.001$. 重复模拟 $t = 2.0$ 时刻数值解 $u(x, t)$ 与解析解的 L_∞ 模误差和 L_2 模误差, 结果见表3. 从表3的结果可以看出, 当空间网格数较小即空间步长较大时, 本文所构造的LBM模型的数值解与解析解的误差较大. 随着空间网格的加密, 空间步长变小时, 两种模误差都相应变小. 在指数坐标系下, L_2 模误差随着空间网格数变化在 2.0147 到 2.4416 之间变动. L_∞ 模误差随着空间网格数变化在 1.9625 到 2.4325 之间变动. 这两种误差的平均收敛阶都大于 2.0, 即说明本文所构造的格子玻尔兹曼模型的空间精度不低于二阶.

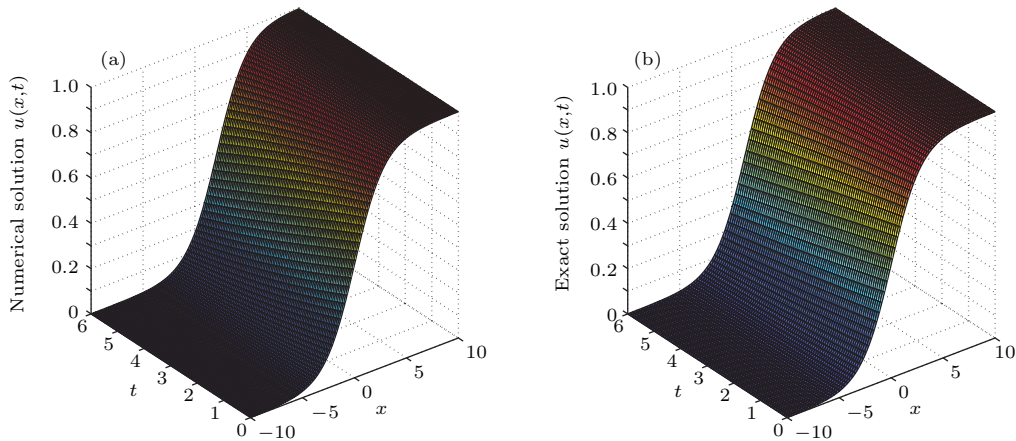


图4 (网刊彩色) (a) 数值解 $u(x, t)$ 时空演化图; (b) 解析解 $u(x, t)$ 时空演化图, 参数取 $\Delta x = 0.2, \Delta t = 0.06, N = 100$

Fig. 4. (color online) (a) Space-time evolution graph of the numerical solutions of $u(x, t)$ obtained by the LBM; (b) space-time evolution graph of the analytical solutions of $u(x, t)$. The parameters are taken as follows: $\Delta x = 0.2, \Delta t = 0.06, N = 100$.

表2 本文构造的LBM的数值解和MFDM的数值解与解析解的误差情况, 参数取 $\Delta x = 0.2, \Delta t = 0.06, N = 100$
Table 2. Comparison of the errors obtained by the LBM and the MFDM with the analytical solution. The parameters are taken as follows: $\Delta x = 0.2, \Delta t = 0.06, N = 100$.

t	L_∞		L_2	
	LBM	MFDM	LBM	MFDM
0.2	8.5283×10^{-5}	7.1027×10^{-5}	4.8342×10^{-6}	7.8909×10^{-5}
0.5	3.3511×10^{-5}	4.1554×10^{-4}	6.0895×10^{-6}	8.3528×10^{-5}
1.0	1.2435×10^{-4}	9.1033×10^{-4}	2.1312×10^{-5}	5.3402×10^{-5}
2.0	5.8317×10^{-4}	3.1416×10^{-4}	5.0170×10^{-5}	8.1671×10^{-5}
3.0	2.8166×10^{-4}	1.7297×10^{-4}	3.3551×10^{-5}	1.3122×10^{-4}
5.0	6.1098×10^{-4}	3.2436×10^{-4}	1.7965×10^{-5}	4.8344×10^{-4}

表3 本文所构造的LBM的数值解在不同空间网格数 N 下的误差情况和收敛阶数, 参数取 $\Delta t = 0.001, t = 2.0$
 Table 3. The errors and the convergence rate of the present method for $u(x, t)$ with fixed time step Δt and different space grid N . The parameters are taken as $\Delta t = 0.001, t = 2.0$.

空间格子数 N	L_∞		L_2	
	LBM	收敛阶	LBM	收敛阶
20	2.3060×10^{-3}		3.6092×10^{-3}	
40	1.0324×10^{-3}	1.9625	1.4637×10^{-3}	2.0147
60	5.9989×10^{-4}	2.1164	4.6251×10^{-4}	2.1037
80	4.2095×10^{-4}	2.2312	2.0136×10^{-4}	2.2472
100	5.8317×10^{-4}	2.4325	5.0170×10^{-5}	2.4416

5 结 论

为了模拟FitzHugh-Nagumo系统的数值解, 我们提出了带有修正函数和源项的格子 Boltzmann 演化方程. 利用多尺度技术使得FitzHugh-Nagumo系统得到了恢复, 数值解与解析解十分吻合. 文中, 我们提出了一个构造修正函数的积分方法, 利用该方法, 可以得到演化方程中为了提高精度而增加的修正项函数 $h(u)$, 同时, 迭代格式的 L^∞ 稳定性在一定条件下得到了保证. 通过对势函数 $F(u)$ 中已知参数 α 的不同取值进行仿真, 我们得到了 α 的符号不同, 导致在高于阈值的常电流刺激下神经元所产生的神经脉冲传播方向相反; 另外, 当 $\alpha < -1$ 时, 神经脉冲在平衡位置产生爆破现象.

本文的模型可以推广到高维的FitzHugh-Nagumo系统及耦合的FitzHugh-Nagumo系统的LBM模拟, 我们将在今后继续展开相关研究.

感谢审稿专家和编辑部老师对本文提出的宝贵意见.

参考文献

[1] Kaya D 2001 *Int. J. Math. Math. Sci.* **27** 675
 [2] Abdou M A, Soliman A A 2005 *J. Comput. Appl. Math.* **181** 245
 [3] Ram J, Gupta R K, Vikas K 2014 *Ain. Sha. Eng. J.* **5** 1343
 [4] Xu A G, Zhang G C, Ying Y J 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 184701 (in Chinese) [许爱国, 张广财, 应阳君 2015 物理学报 **64** 184701]
 [5] Ollila S, Denniston C, Karttunen M, Nissila T 2011 *J. Chem. Phys.* **134** 064902
 [6] Fallah K, Khaya M, Hossein B M, Ghaderi A, Fattahi E 2012 *J. Non-Newton. Fluid.* **177** 1
 [7] Mao W, Guo Z L, Wang L 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 084703 (in Chinese) [毛威, 郭照立, 王亮 2013 物理学报 **62** 084703]
 [8] Yang T Z, Ji S D, Yang X D, Fang B 2014 *Int. J. Eng. Sci.* **76** 47

[9] Koido T, Furusawa T, Moriyama K 2008 *J. Power. Sour.* **175** 127
 [10] Zhang W, Wang Y, Qian Y H 2015 *Chin. Phys. B* **24** 064701
 [11] Qian Y, Succi S, Orszag S 1995 *Annu. Rev. Comput. Phys.* **195** 195
 [12] Chen S, Doolen G D 1998 *Annu. Rev. Fluid. Mech.* **30** 329
 [13] Zu Y Q, He S 2013 *Phys. Rev. E* **87** 043301
 [14] Shu C W, Osher S 1998 *J. Comput. Phys.* **77** 439
 [15] Duan Y L, Liu R X 2007 *J. Comp. Appl. Math.* **206** 432
 [16] Zhang J Y, Yan G W 2008 *Physica A* **387** 4771
 [17] Ma C F, Tang J, Chen X H 2007 *Chin. J. Appl. Mech.* **24** 519 (in Chinese) [马昌凤, 唐嘉, 陈小红 2007 应用力学学报 **24** 519]
 [18] Ma C F 2005 *Chin. Phys. Lett.* **22** 2313
 [19] He Y B, Lin X Y, Dong X L 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 194701 (in Chinese) [何郁波, 林晓艳, 董晓亮 2013 物理学报 **62** 194701]
 [20] Zhou Z Q, He Y B 2012 *Pure. Appl. Math.* **28** 29 (in Chinese) [周志强, 何郁波 2012 纯粹数学与应用数学 **28** 29]
 [21] Yung K L, Lei Y M, Xu Y 2010 *Chin. Phys. B* **19** 010503
 [22] FitzHugh R 1961 *Biophys. J.* **6** 445
 [23] Nagumo J S, Arimoto S, Yoshizawa S 1962 *Proc. IRE* **50** 2061
 [24] Gan C B, Matja P, Wang Q Y 2010 *Chin. Phys. B* **19** 040508
 [25] Song Y L 2014 *Chin. Phys. B* **23** 080504
 [26] Prager T, Neiman A B, Schimansky G L 2009 *Euro. Phys. J. B* **69** 119
 [27] Llibre J, Valls C 2010 *J. Geom. Phys.* **60** 1974
 [28] Lv Y, Wang W 2010 *Nonlinear Anal. Real.* **11** 3091
 [29] Hsu C H, Yang T H, Yang C R 2009 *J. Differ. Equations* **247** 1185
 [30] Gaiko V A 2011 *Nonlinear Anal. Theor.* **74** 7532
 [31] Olmos D, Shizgal B 2008 *Math. Comput. Simulat.* **79** 2258
 [32] Browne P, Nomoniati E, Mahomed F M 2008 *Nonlinear. Anal. Theor.* **68** 1006
 [33] Kawahara T, Tanaka M 1983 *Phys. Lett. A* **97** 311
 [34] Nucci M C, Clarkson P A 1992 *Phys. Lett. A* **164** 49
 [35] Li H Y, Guo Y C 2006 *Appl. Math. Comput.* **180** 524
 [36] Guo Z L, Zheng C G, Shi B C 2002 *Chin. Phys.* **11** 366

Numerical simulation of a class of FitzHugh-Nagumo systems based on the lattice Boltzmann method*

He Yu-Bo^{1)2)†} Tang Xian-Hua^{1)‡} Lin Xiao-Yan²⁾

1) (School of Mathematics and Statistics, Central South University, Changsha 410083, China)

2) (Department of Mathematics and Applied Mathematics, Huaihua University, Huaihua 418008, China)

(Received 20 March 2016; revised manuscript received 25 May 2016)

Abstract

The lattice Boltzmann method (LBM) was proposed as a novel mesoscopic numerical method, and is widely used to simulate complex nonlinear fluid systems. In this paper, we develop a lattice Boltzmann model with amending function and source term to solve a class of initial value problems of the FitzHugh Nagumo systems, which arises in the periodic oscillations of neuronal action potential under constant current stimulation higher than the threshold value. Firstly, we construct a non-standard lattice Boltzmann model with the proper amending function and source term. For different evolution equations, local equilibrium distribution functions and amending function are selected, and the nonlinear FitzHugh Nagumo systems can be recovered correctly by using the Chapman Enskog multi-scale analysis. Secondly, through the integral technique, we obtain a new method on how to construct the amending function. In order to guarantee the stability of the present model, the L^∞ stability of the lattice Boltzmann model is analyzed by using the extremum principle, and we get a sufficient condition for the stability that is the initial value $u_0(x)$ must satisfy $|u_0(x)| \leq 1$ and the parameters must satisfy $\theta_i \leq -\tau(1 + \alpha) \frac{\Delta t}{\Delta x}$, ($i = 1-4$). Thirdly, based on the results of the grid independent analysis and numerical simulation, it can be concluded that the present model is convergent with two order space accuracy. Finally, some initial boundary value problems with analytical solutions are simulated to verify the effectiveness of the present model. The results are compared with the analytical solutions and numerical solutions obtained by the modified finite difference method (MFDM). It is shown that the numerical solutions agree well with the analytical solutions and the global relative errors obtained by the present model are smaller than the MFDM. Furthermore, some test problems without analytical solutions are numerically studied by the present model and the MFDM. The results show that the numerical solutions obtained by the present model are in good agreement with those obtained by the MFDM, which can validate the effectiveness and stability of the LBM. In conclusion, our model not only can enrich the applications of the lattice Boltzmann model in simulating nonlinear partial difference equations, but also help to provide valuable references for solving more complicated nonlinear partial difference systems. Therefore, this research has important theoretical significance and application value.

Keywords: lattice Boltzmann model, FitzHugh-Nagumo equation, Chapman-Enskog expansion, finite difference method

PACS: 47.11.-j, 47.11.Qr, 47.55.Kf

DOI: [10.7498/aps.65.154701](https://doi.org/10.7498/aps.65.154701)

* Project supported by National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11471137, 11571370, 11501232).

† Corresponding author. E-mail: heyinprc@csu.edu.cn

‡ Corresponding author. E-mail: tangxh@csu.edu.cn