

非线性阻尼驱动的莱维飞行动力学性质

刘剑 陈晓白 徐登辉 李熊 陈晓松 杨波

Dynamical mechanism of Lévy flight driven by the nonlinear friction

Liu Jian Chen Xiao-Bai Xu Deng-Hui Li Xiong Chen Xiao-Song Yang Bo

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 160502 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.160502

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.160502>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I16>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于自规避随机游走的节点排序算法

A ranking method based on self-avoiding random walk in complex networks

物理学报.2015, 64(20): 200501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.200501>

带势估计的概率假设密度滤波的物理空间意义

Derivation of cardinalized probability hypothesis density filter via the physical-space approach

物理学报.2014, 63(22): 220204 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.220204>

概率假设密度滤波的物理空间意义

Derivation of the probability hypothesis density filter via the physical-space approach

物理学报.2014, 63(20): 200204 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.200204>

无标度立体 Koch 网络上随机游走的平均吸收时间

Exact solution for mean trapping time of random walk on a scale-free Koch network

物理学报.2012, 61(20): 200503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.200503>

混沌半导体激光器的弛豫振荡频率对随机序列速率的影响

The effect of the relaxation oscillation frequency of chaotic semiconductor laser on the rate of random sequence

物理学报.2012, 61(15): 150502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.150502>

非线性阻尼驱动的莱维飞行动力学性质*

刘剑^{1)2)†} 陈晓白¹⁾ 徐登辉¹⁾ 李熊¹⁾ 陈晓松²⁾ 杨波²⁾

1)(北京工商大学理学院, 北京 100048)

2)(中国科学院理论物理研究所, 理论物理前沿重点实验室, 北京 100190)

(2016年4月13日收到; 2016年6月1日收到修改稿)

基于动力学连续时间无规行走方法, 对受非线性阻尼驱动的莱维飞行在自由势场以及周期势场中的扩散行为进行了研究. 非线性阻尼取代斯托克斯阻尼, 通过动力学连续时间无规行走方法体现在莱维随机行走粒子的每一步跳跃中. 结果显示, 非线性阻尼的强阻尼耗散作用导致莱维飞行的超扩散行为衰减为正常扩散, 粒子速度定态分布呈现双峰与单峰的相互转化. 周期势场的束缚作用会导致粒子扩散达到一个稳定态, 而莱维粒子自身性质会使粒子存在极小概率跃出周期势阱的跳跃行为, 表现为方均位移随时间的演化出现跃迁现象.

关键词: 动力学连续时间无规行走, 非线性阻尼, 莱维飞行, 周期势场

PACS: 05.40.Fb, 02.50.Ey, 05.40.Ca

DOI: 10.7498/aps.65.160502

1 引言

近几十年来, 反常扩散问题一直是物理、化学以及生物科学等多个学科的基本问题和研究热点. 反常扩散指的是处于湍流、等离子体、渗透媒介、生长表面和细胞等环境中的系统表现出偏离正常布朗运动的扩散, 在一维情形下表现为粒子的方均位移满足 $\langle (x(t) - x_0)^2 \rangle \propto t^\alpha$, $\alpha \neq 1$, 其中, α 称为扩散指数或者反常指数^[1-3]. 在反常理论中, 如果 $0 < \alpha < 1$, 则称为欠扩散; 如果 $1 < \alpha < 2$, 则称为超扩散; $\alpha = 0$ 对应欠扩散的极限——局域化; $\alpha = 2$ 对应超扩散的极限——弹道扩散^[4]. 还有一类方均位移不能直接定义的扩散, 比如莱维飞行, 其方均位移是发散的, 一般也归为超扩散. 对于 $\alpha = 1$, 则表征正常扩散情形, 也就是布朗运动.

为了描述和研究反常扩散, 诸多理论和模型已付诸应用和研究, 连续时间无规行走 (continuous time random walk, CTRW) 作为其中的一种手段, 自20世纪60年代由 Montroll 及其合作者^[5,6] 提出

来以后, 已经被证明是非常有效和强大的研究方法, 且被成功的应用于多个领域, 具体请参阅参考文献^[1, 7, 8] 及其所引文献. CTRW 理论包含两个要素: 粒子的随机跳跃距离和两次成功跳跃之间的随机等待时间. 两者满足一个联合分布密度函数 $\psi(x, t)$, 跳跃距离的分布通过

$$\lambda(x) = \int_0^\infty dt \psi(x, t)$$

得到, 等待时间的分布通过

$$\omega(t) = \int_{-\infty}^\infty dx \psi(x, t)$$

得到. CTRW 理论以跳跃距离二次矩

$$\sigma^2 = \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty dx x^2 \psi(x, t)$$

以及平均等待时间一次矩

$$\langle T \rangle = \int_{-\infty}^\infty dx \int_0^\infty dt t \psi(x, t)$$

是否有限来对扩散类型进行分类. 对于正常扩散, 两者皆为有限; 如果跳跃距离二次矩有限而等待时间一次矩发散, 则为欠扩散; 如果等待时间一次矩

* 国家自然科学基金 (批准号: 11547231, 61405003, 11404013) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: liujian@mail.bnu.edu.cn

有限而跳跃距离二次矩发散, 则为超扩散. 基于标准CTRW方法, 我们提出动力学连续时间无规行走方案(dynamical continuous time random walk, DCTRW)^[9]. 此方案关注粒子跳跃速度与跳跃时间取代以往的跳跃距离与等待时间, 这使得模型更加贴近物理真实, 另外通过描述粒子跳跃的动力学函数, 阻尼耗散与外势场可以很自然的引入到粒子跳跃过程中, 用于体现环境对粒子的作用. 基于DCTRW方案, 我们在解析上以及数值上对超扩散进行了研究, 具有莱维分布形式的速度分布被考虑作为粒子随机跳跃速度.

莱维飞行(Lévy flights)是反常扩散领域的研究热点^[1,10], 作为处理问题的统计模型一直被用于许多领域. 比如研究结果表明, 一些实际生命系统可以用莱维行走模型来描述^[11,12], 可见光在混沌光学介质中的传播^[13], 闪烁量子点的动力学行为^[14], 生物活细胞中单分子的反常输运行为^[15], 都可以用莱维飞行模型来描述. 可以看出, 对莱维飞行问题的研究, 对物理学、生命科学、信息科学等多个学科的发展都有着现实意义. 从物理上看, 莱维飞行来源于粒子和周围环境之间的强烈相互作用, 它是发生长程跳跃为特征的一类具有马尔可夫性质的随机过程, 其跳跃的长度满足莱维分布, 具有长尾渐进形式 $p(x) \propto Dt/|x|^{\mu+1}$, $0 < \mu < 2$ 为莱维指数. 这使得莱维飞行即使是处于简谐势场中, 坐标方均位移依旧发散^[1,16]. 为了克服这一困扰, 物理学者们采用了诸多手段比如莱维行走^[17,18]、截断方法^[19,20]以及引入更为陡峭的势场 $U(x) \propto x^{2n+2}/(2n+2)$ ($n = 1, 2, \dots$)等^[21]. 其中一种更为自然的方法是在阻尼项 $\gamma(v)v(t)$ 中引入非线性阻尼 $\gamma(v) = \gamma_0 + \gamma_2 v^2 + \dots + \gamma_{2N} v^{2N}$, $\gamma_{2N} > 0$, 取代与速度大小呈线性关系的斯托克斯阻尼^[21,22], 在阻尼环境中高速运动的粒子来讲, 这种非线性耗散会很自然的出现. 一个典型例子就是在重力场中以加速度 g 做自由落体的粒子其运动方程为 $Mdv(t)/dt = Mg - Kv^2(t)$. 由于非线性阻尼的出现, 粒子速度分布密度函数表现为保留低速粒子的特征, 但会强烈抑制高速粒子特征. 近期我们运用朗之万方法对引入非线性阻尼的莱维飞行的扩散性质进行了研究, 结果显示, 由于引入非线性阻尼, 超扩散的莱维飞行衰减为正常扩散, 但是在倾斜周期势场中, 势场条件调节适宜, 粒子会重新表现为超弹道扩散的现象^[23].

近期, 实验物理学者首次观测到超冷⁸⁷Rb原子团在光学陷阱中的超扩散行为, 发现原子团的分布呈长尾的莱维分布形式, 其运输过程为莱维飞行过程^[24], 理论分析指出周期分布的光学陷阱(等效为周期势场)的深度会影响粒子的扩散行为, 甚至会决定超冷原子的扩散类型^[24,25]. 这项实验工作意味着精确调整描述系统的参数在实验上成为可能, 使得实验上可以直接研究莱维飞行. 因此, 原子团在阻尼环境中甚至更加复杂的传输环境中的扩散行为以及动力学性质, 应是这方面实验以及理论研究工作的研究方向之一. 基于以上考虑, 本文从DCTRW方案出发, 通过蒙特卡罗方法研究了考虑非线性阻尼的莱维飞行在自由势场以及周期势场中的扩散行为. 结果显示, 非线性阻尼的强阻尼耗散作用导致莱维飞行的超扩散现象衰减为正常扩散, 而周期势场的束缚作用会导致粒子在长时间演化后达到一个稳定态, 粒子方均位移趋于定值.

2 模型

在每一步的跳跃中, 粒子初始的跳跃速度与整个跳跃过程花费的跳跃时间取代以往的跳跃距离与等待时间, 是DCTRW模型的两个基本要素^[9]. 粒子首先从已知的速度分布抽取获得随机跳跃速度开始每一步的跳跃, 速度既可以是正值也可以是负值, 这实际上是包含了粒子跳跃的方向. 跳跃一旦开始, 粒子在每一步的跳跃中遵守运动方程:

$$\dot{x} = v(t), m\dot{v}(t) = -\gamma(v)v(t) + g(x), \quad (1)$$

其中, $g(x) = -U'(x)$ 是外势场力; $U(x)$ 是外势场; $-\gamma(v)v(t)$ 表征每一步跳跃中, 作用方向始终与运动方向相反的阻尼力; $\gamma(v)$ 代表阻尼系数. 与此同时, 粒子每一步跳跃花费的时间由已知的跳跃时间分布抽取获得, 决定了粒子每一步跳跃的时间长短. 粒子每一步的跳跃速度与跳跃时间共同决定了每一步跳跃的距离. 另外, 这里我们认为跳跃是马尔可夫的, 下一步的跳跃由随机抽取的跳跃速度与跳跃时间决定, 而与前一步跳跃无关, 即下一步的跳跃不会有对当前跳跃的记忆. 正如之前所述, 对于莱维飞行, 阻尼力与粒子速度呈非线性关系而不再是线性关系, 非线性阻尼 $f(v) = -\gamma(v)v(t) = -\gamma_0 v - \gamma_2 v^3$ 会很自然的出现, $\gamma(v) = \gamma_0 + \gamma_2 v^2$ 是非线性阻尼系数. 对于莱维飞

行, 速度分布采用莱维形式的长尾分布:

$$\lambda(v) = \sigma^\mu \frac{\Gamma(1 + \mu) \sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{\pi|v|^{1+\mu}}, \quad \mu = 2/\alpha, \quad (2)$$

其中, $1 < \mu < 2$ 是莱维指数.

2.1 自由势场

不考虑外势场时, 即在自由势场中,

$$\dot{x} = v(t), \quad m\dot{v}(t) = -\gamma_0 v - \gamma_2 v^3, \quad (3)$$

可以看到非线性阻尼项 $-\gamma_0 v - \gamma_2 v^3$ 实际上在速度空间起到了束缚势场的作用,

$$\Phi(v) = \gamma_0 v^2/2 + \gamma_2 v^4/4, \quad (4)$$

因此, 速度的稳态概率密度分布函数具有比莱维定态分布衰减更为迅速的幂律形式

$$W(v) \propto \frac{1}{|v|^{\mu+3}}, \quad (5)$$

相应地,

$$\langle v^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} W(v)v^2 dv \quad (6)$$

收敛^[24], 方均位移 $\langle x^2(t) \rangle$ 不再发散. 图1为自由势场的方均位移随时间的演化, 可以看出, 受非线性阻尼驱动的莱维飞行的扩散表现出方均位移不

再有反常超扩散现象. 另外, 由于非线性阻尼的出现, 类似于粒子空间坐标在非简谐势场中的定态分布^[26,27], 速度的定态分布出现了双峰与单峰的共存与相互转化.

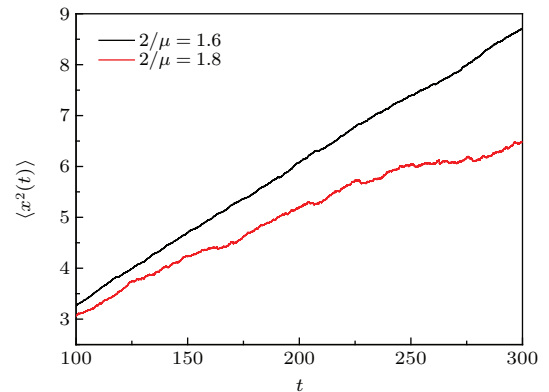


图1 (网刊彩色) 自由场中, 莱维指数 $2/\mu = 1.6$ 以及 $2/\mu = 1.8$ 时, 方均位移 $\langle \delta x^2(t) \rangle$ 随时间的演化图

Fig. 1. (color online) The mean square displacement $\langle \delta x^2(t) \rangle$ varying with time in the force free potential with $2/\mu = 1.6$ and $2/\mu = 1.8$, respectively.

速度的定态分布的双峰与单峰转化表现为:

- 1) $\mu = 1$ 时双峰最为显著, 随着 μ 增大, 双峰减弱, 并在 $\mu = 2$ 时消失, 实际上 $\mu = 2$ 时已经退变为高斯的, 参见图2(a), 这是由于莱维指数越小, 粒子存在大速度的概率越高, 粒子越容易到达远离初始位

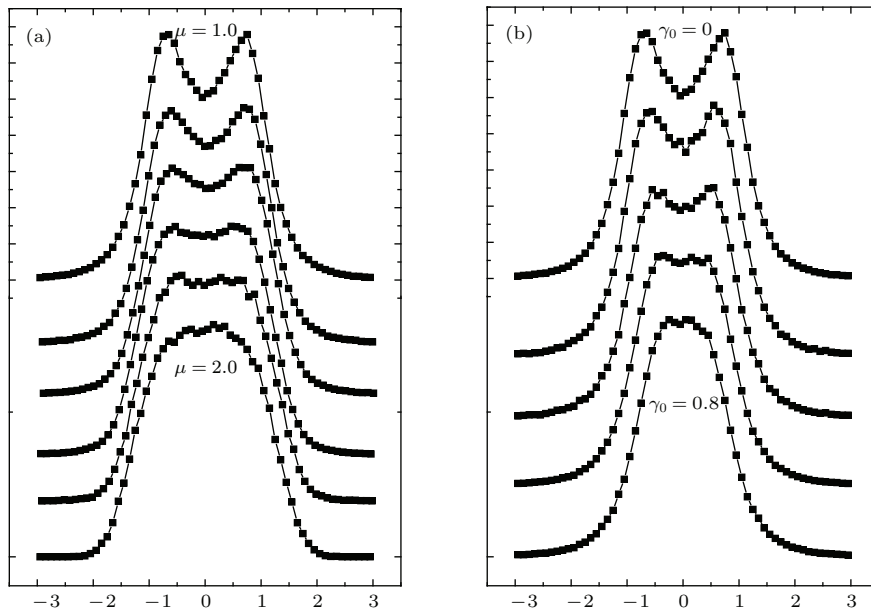


图2 速度定态分布 (a) 不同莱维指数 μ 时的速度定态分布, 从顶端到底端依次为: $\mu = 1.0, \mu = 1.2, \mu = 1.4, \mu = 1.6, \mu = 1.8, \mu = 2.0$; (b) 不同 γ_0 时的速度定态分布, 从顶端到底端依次为 $\gamma_0 = 0, \gamma_0 = 0.2, \gamma_0 = 0.4, \gamma_0 = 0.6, \gamma_0 = 0.8$

Fig. 2. The stationary velocity distribution: (a) the stationary velocity distribution with different Lévy index μ , from top to bottom it is $\mu = 1.0, \mu = 1.2, \mu = 1.4, \mu = 1.6, \mu = 1.8, \mu = 2.0$; (b) the stationary velocity distribution with different γ_0 , from top to bottom it is $\gamma_0 = 0, \gamma_0 = 0.2, \gamma_0 = 0.4, \gamma_0 = 0.6, \gamma_0 = 0.8$.

置 $x = 0$ 两侧的势场区域, 然后在这个区域附近徘徊直到出现一个反方向的高速跳跃, 到达势场的另一侧, $\Phi(v)$ 的强束缚作用使其能够在 $x = 0$ 两侧对称区域俘获粒子, 因此速度定态分布呈双峰形式. 莱维指数越大, 粒子出现大速度的概率越低, 粒子越难到达势垒区域, 双峰效应越弱; 当 $\mu = 2$ 时, 莱维速度已经退变为高斯速度, 大速度跳跃不再出现, 因而此时速度定态分布退变回单峰形式; 2) 如果令 $\gamma_2 = 1$, 存在一个阈值 $\gamma_{0c} = 0.793701$ (此阈值的解析表达式请参见文献 [27] 的第四节), 这个阈值同样影响速度稳态分布的双模形式, $\gamma_0 = 0$ 时双峰最为显著, 随着 γ_0 增大, 双峰逐渐变得平滑直至 $\gamma_0 > \gamma_{0c}$ 变为单峰形式, 参见图 2 (b).

2.2 周期势场

考虑外势场为周期势场 $U(x) = -U_0 \cos x$ 时, (1) 式则为

$$\dot{x} = v(t), m\dot{v}(t) = -\gamma_0 v - \gamma_2 v^3 - U_0 \sin x, \quad (7)$$

其中, $F(x) = -U_0 \sin x = -\partial U(x)/\partial x$ 表征周期势场力, U_0 为周期势场的势阱深度. 蒙特卡罗计算结果发现, 在周期势场中, 方均位移 $\langle \delta x^2(t) \rangle$ 随时间演化, 经过一个弛豫过程后, 逐渐达到一个定值, 这意味着周期势场对粒子起到了一个束缚作用, 粒子到达周期势场的势阱处并束缚在该位置附近. 图 3 为莱维指数分别为 $2/\mu = 1.2, 2/\mu = 1.6$ 的粒子方均位移随时间的演化图, 势阱深度为 $U_0 = 10.0$. 可以看到受周期势场的束缚作用, 经过一个短弛豫过程后, 粒子方均位移迅速达到稳态. 图 4 为演化时间 $t = 500$ 时不同莱维指数、不同势阱深度下的粒子坐标分布图, 可以看出, 粒子的坐标空间概率分布波包被周期势场的势垒劈裂成许多小波包.

对于速度服从莱维分布的随机行走粒子来讲, 其速度存在一定概率的高速跳跃, 因此其方均速度是发散的, 方均位移即使在简谐势场中也是发散的. 但是由于考虑了非线性阻尼对粒子速度的强阻尼耗散作用, 这使得粒子分布长尾被强烈约束, 粒子长距离跳跃被抑制. 因此, 受非线性阻尼驱动的莱维随机行走粒子能够被周期势场俘获, 方均位移呈现出随时间的稳态演化、甚至呈现出局域化的现象.

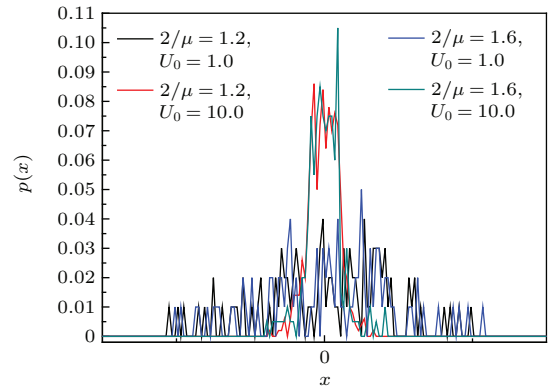


图 3 (网刊彩色) $t = 500$ 时不同莱维指数以及不同势阱深度下的粒子坐标分布 $p(x)$

Fig. 3. (color online) The stationary coordinate distribution $p(x)$ with various Lévy index and depth of potential well with $t = 500$.

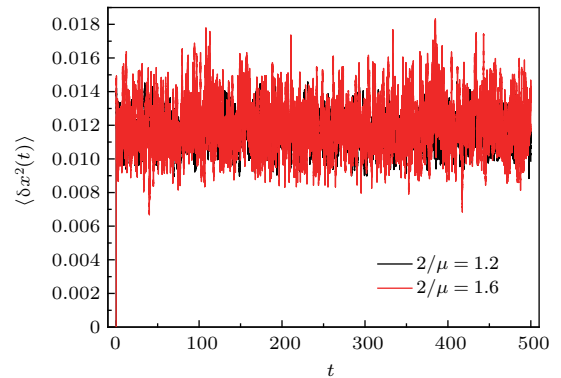


图 4 (网刊彩色) 莱维指数 $2/\mu = 1.2$ 以及 $2/\mu = 1.6$ 时, 粒子方均位移 $\langle \delta x^2(t) \rangle$ 随时间的演化图, 所选参数 $U_0 = 10.0$

Fig. 4. (color online) The mean square displacement $\langle \delta x^2(t) \rangle$ varying with time with Lévy index $2/\mu = 1.2$ and $2/\mu = 1.6$, respectively, the parameter used is $U_0 = 10.0$.

虽然如此, 非线性阻尼对莱维分布的高速粒子的约束作用并不等于对其分布长尾作截断, 粒子跳跃仍存在极小概率的长程跳跃, 当粒子的跳跃距离足够长且周期势场的势阱深度不足以约束此长距离跳跃时, 粒子会出现一个跳出势阱的长距离跳跃, 表现为粒子坐标方均位移出现一个跃迁, 参见图 5. 从图 5 中可以看出, 对于 $2/\mu = 1.2$ 的处于势阱深度 $U_0 = 1.0$ 的周期势场中的莱维随机行走粒子, 方均位移 $\langle \delta x^2(t) \rangle$ 随时间的演化在 $t = 550$ 附近出现一个跃迁, 随后再次趋于稳定. 但由于粒子高速跳跃的出现概率本身就很小, 又存在非线性阻尼的约束作用, 因此粒子方均位移的跃迁现象只以极小的概率出现.

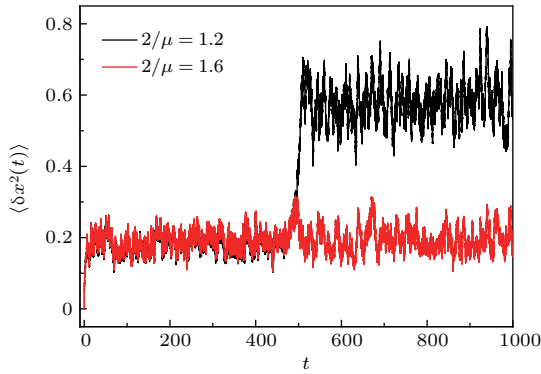


图5 (网刊彩色) 势阱深度为 $U_0 = 1.0$ 时, 莱维指数为 $2/\mu = 1.2$ 以及 $2/\mu = 1.6$ 的粒子方均位移 $\langle \delta x^2(t) \rangle$ 随时间的演化图

Fig. 5. (color online) For the depth of potential well $U_0 = 1.0$, the mean square displacement $\langle \delta x^2(t) \rangle$ varying with time with Lévy index $2/\mu = 1.2$ and $2/\mu = 1.6$, respectively.

2.3 结果与讨论

引入非线性阻尼后, 非线性阻尼项 $-\gamma_0 v - \gamma_2 v^3$ 实际上在速度空间起到了束缚势场的作用, 粒子速度分布密度函数表现为保留低速粒子特征, 但会强烈抑制高速粒子特征, 莱维飞行方均速度收敛, 方均位移不再呈现反常超扩散行为. 因此, 非线性阻尼驱动的莱维粒子能够被周期势场俘获, 展现为粒子方均位移经过短时弛豫后, 迅速达到稳态.

虽然如此, 非线性阻尼的约束作用并非对速度分布的长尾作截断, 粒子速度仍有极小概率出现长程跳跃, 当长程跳跃出现时且跳跃距离足够长, 周期势场的势阱深度不足以约束此长程跳跃, 粒子便会跳出势阱, 但由于受非线性阻尼的约束, 粒子随后立即再次被周期势场俘获, 即粒子方均位移出现一次跃迁后再次进入稳态. 图6为莱维指数 $2/\mu = 1.2$, 势阱深度 $U_0 = 1.0$ 的周期势场中的莱维随机行走粒子分别在 $t = 400$ 及 $t = 1000$ 粒子的坐标概率密度分布, 即粒子方均位移发生跃迁之前以及之后的粒子坐标分布. 从图6中可以看出, 跃迁之后的粒子分布, 即 $t = 1000$ 时的粒子坐标分布出现一个远离平衡位置 $x = 0$ 的分布波包. 不过势阱深度足够深的周期势场始终可以束缚粒子, 即使粒子出现长程跳跃, 也无法跳出势阱, 那么粒子的方均位移随时间的演化始终都不会出现跃迁现象. 通过图4与图5的结果对比可以看出, $U_0 = 10.0$ 时, 势阱足够深, 粒子方均位移随时间演化始终没有出现跃迁现象.

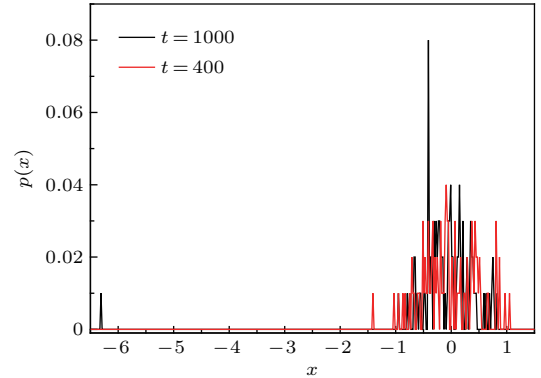


图6 (网刊彩色) 势阱深度为 $U_0 = 1.0$ 、莱维指数为 $2/\mu = 1.2$ 时, 粒子分别在 $t = 400$ 以及 $t = 1000$ 时的坐标概率密度分布

Fig. 6. (color online) For the depth of potential well $U_0 = 1.0$ and Lévy index $2/\mu = 1.2$, the coordinate probability density distribution with $t = 400$ and $t = 1000$, respectively.

3 结论

本文基于动力学连续时间无规行走方法, 研究了考虑非线性阻尼的莱维飞行在自由势场以及周期势场中的扩散行为. 非线性阻尼的引入使得粒子速度分布密度函数表现为保留低速粒子特征, 但会强烈抑制高速粒子特征, 速度的稳态概率密度分布函数因而具有比莱维定态分布衰减更为迅速的幂律形式, 因此莱维飞行的方均位移不再呈现反常超扩散行为. 非线性阻尼项起到了速度空间的束缚势场的作用, 粒子的速度分布呈现双峰与单峰的相互转化, 莱维指数 μ 以及阻尼系数 γ_0, γ_2 会影响双峰形式的强弱.

非线性阻尼驱动的莱维粒子能够被周期势场俘获, 展现为粒子方均位移经过短时弛豫后, 迅速达到稳态. 但非线性阻尼的约束作用并非对速度分布的长尾作截断, 粒子速度仍有极小概率出现长程跳跃, 当跳跃距离足以越过周期势场的势阱深度时, 粒子会跳出势阱, 表现为坐标方均位移出现一个跃迁, 但由于粒子跳跃始终受非线性阻尼的约束, 因此, 粒子随后立即再次被周期势场俘获. 即粒子方均位移出现跃迁后再次进入束缚稳态.

近期实验物理学者首次观测到超冷 ^{87}Rb 原子团在光学陷阱中的超扩散行为, 发现原子团的分布呈长尾的莱维分布形式, 其输运过程为莱维飞行过程^[24], 周期分布的光学陷阱(等效为周期势场)的深度会影响粒子的扩散行为, 甚至会决定超冷原子的扩散类型^[24,25]. 这项工作意味着实验上已经可

以精确调整描述系统的参数,使得实验上可以直接研究莱维飞行.因此原子团在阻尼环境中甚至更加复杂的传输环境中(比如非均匀介质)的扩散行为以及动力学性质,应是这方面实验以及理论研究工作的未来一个研究方向.因此,本文基于动力学连续时间无规行走方法,对受非线性阻尼驱动的莱维扩散系统在周期势场中的输运行为的研究,能够对目前超冷原子在更加复杂的光学陷阱中的实验研究提供前瞻、指导作用.

参考文献

- [1] Bouchaud J-P, Georges A 1990 *Phys. Rep.* **195** 127
- [2] Havlin S, Ben-Avraham D 1987 *Adv. Phys.* **36** 695
- [3] Metzler R, Jeon J H, Cherstvy A G, Barkai E 2014 *Phys. Chem. Chem. Phys.* **16** 24128
- [4] Bao J D, Zhuo Y Z 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 138104
- [5] Montroll E W, Weiss G H 1965 *J. Math. Phys.* **6** 167
- [6] Scher H, Montroll E W 1975 *Phys. Rev. B* **12** 2455
- [7] Metzler R, Klafter J 2000 *Phys. Rep.* **339** 1
- [8] Haus W, Kehr K W 1987 *Phys. Rep.* **150** 263
- [9] Liu J, Yang B, Chen X S, Bao J D 2015 *Eur. Phys. J. B* **88** 88
- [10] Zaburdaev V, Denisov S, Klafter J 2015 *Rev. Mod. Phys.* **87** 483
- [11] Jager M, Weissing F J, Herman P M, Noler B A, Koppel J 2011 *Science* **332** 1551
- [12] Harris T H, Banigan E J, Christian D A, Konradt C, Wojno E D T, Norose K, Wilson E H, John B, Weninger W, Luster A D, Liu A J, Hunter C A 2012 *Nature* **486** 545
- [13] Barthelemy P, Bertolotti J, Wiersma D S 2008 *Nature* **453** 495
- [14] Margolin G, Barkai E 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 080601
- [15] Barkai E, Garini Y, Metzler R 2012 *Phys. Today* **65** 29
- [16] Jespersen S, Metzler R, Fogedby H C 1999 *Phys. Rev. E* **59** 2736
- [17] Shlesinger M F, West B J, Klafter J 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 11
- [18] Klafter J, Blumen A, Shlesinger M F 1987 *Phys. Rev. A* **35** 7
- [19] Mantegna R N, Stanley H E 1994 *Phys. Rev. Lett.* **73** 2946
- [20] Koponen I 1995 *Phys. Rev. E* **52** 1197
- [21] Chechkin A V, Gonchar V, Klafter J, Metzler R 2005 *Phys. Rev. E* **72** 010101
- [22] Lindner B 2010 *New J. Phys.* **12** 063026
- [23] Bao J D, Liu J 2013 *Phys. Rev. E* **88** 022153
- [24] Sagi Y, Brook M, Almog I, Davidson N 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 093002
- [25] Kessler D A, Barkai E 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 230602
- [26] Chechkin A V, Gonchar V, Klafter J, Metzler R, Tanatarov L 2002 *Chem. Phys.* **284** 233
- [27] Chechkin A V, Klafter J, Gonchar V, Metzler R, Tanatarov L 2003 *Phys. Rev. E* **67** 010102

Dynamical mechanism of Lévy flight driven by the nonlinear friction*

Liu Jian^{1)2)†} Chen Xiao-Bai¹⁾ Xu Deng-Hui¹⁾ Li Xiong¹⁾ Chen Xiao-Song²⁾ Yang Bo²⁾

1) (School of Science, Beijing Technology and Business University, Beijing 100048, China)

2) (State Key Laboratory of Theoretical Physics, Institute of Theoretical Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

(Received 13 April 2016; revised manuscript received 1 June 2016)

Abstract

As a basic problem, anomalous diffusions in various fields of physics and related science have been studied for several decades. One of the topic problems of anomalous diffusion is Lévy flight, which is employed as the statistical model to solve the problems in various fields. Therefore, studying the dynamical mechanism of Lévy flight, especially in the existence of external potential, is of importance for relative theoretical and experimental research. In this paper, within the framework of dynamical continuous time random walk method, the Lévy flight diffusive behaviors and dynamical mechanisms driven by nonlinear friction are studied in the force-free potential and periodic potential. The nonlinear friction instead of Stokes friction is considered in each step of Lévy random walker through the dynamical continuous time random walk method. In the force-free potential, the nonlinear friction term can be considered to be inharmonic potential in the velocity space which can restrain the velocity of random walker, so the anomalous superdiffusion of Lévy flight turns into a behavior in the normal case because of the strong dissipative effect of the nonlinear friction. Due to the introduction of the nonlinear friction, the velocity steady probability density distribution behaves as transitions between bimodal shape and unimodal shape, which is determined by the Lévy index μ and the friction indexes γ_0 and γ_2 . The bimodality is most pronounced at $\mu = 1$, with μ increasing the bimodality becomes weaker, and vanishes at $\mu = 2$ which is the Gaussian case. Besides, there is a critical value $\gamma_{0c} = 0.793701$, which also determines the bimodal behaviors. For $\gamma_0 = 0$ the bimodality is most pronounced, as γ_0 increases it smooths out and turns into a unimodal one for $\gamma_0 > \gamma_{0c}$. In the existence of periodic potential, the Lévy random walker can be captured by the periodical potential due to the introduction of nonlinear friction, which behaves as the mean square displacement $\langle \delta x^2(t) \rangle$ of the random walker and can reach a steady state quite quickly after a short lag time. However, the restraint is not equivalent to truncation procedures. Since the velocity of random walker obeys Lévy distribution, there is still extremely large jump length for random walker with extremely small probability. When the extremely large jump length is long enough and the barrier height U_0 is not comparably high, the random walker can cross the barrier height of the periodic potential and jump out of the periodic potential, which behaves as the mean square displacement $\langle \delta x^2(t) \rangle$ and a leap from a steady state to another one appears. However, the restraint on the random walker from the nonlinear friction always exists, so the random walker is captured again by the periodic potential, which means that the mean square displacement comes into a steady state again.

Keywords: dynamical continuous time random walk, nonlinear friction, Lévy flights, periodic potential

PACS: 05.40.Fb, 02.50.Ey, 05.40.Ca

DOI: 10.7498/aps.65.160502

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11547231, 61405003, 11404013).

† Corresponding author. E-mail: liujian@mail.bnu.edu.cn