

线性与非线性稳定性理论下液体射流空间发展的对比研究

吕明 宁智 阎凯

Comparative study on the spatial evolution of liquid jet under linear and nonlinear stability theories

Lü Ming Ning Zhi Yan Kai

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 166801 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.166801

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.166801>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I16>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

GeH/ π 层间弱相互作用调控锗烯电子结构的机制

Mechanisms on the GeH/ π interactions in germanene/germanane bilayer for tuning band structures

物理学报.2016, 65(9): 096801 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.096801>

单层硅 Si₆H₄Ph₂ 的稳定性和电子结构密度泛函研究

Density functional study on the stability and electronic structure of single layer Si₆H₄Ph₂

物理学报.2012, 61(24): 246801 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.246801>

容器内角处流体界面特性与 Surface Evolver 程序适用性的研究

The study on the mechanism of liquid surface in interior corner and the applicability of Surface Evolver

物理学报.2012, 61(16): 166801 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.166801>

线性与非线性稳定性理论下液体射流空间发展的对比研究*

吕明 宁智[†] 阎凯

(北京交通大学机械与电子控制工程学院, 北京 100044)

(2016年3月15日收到; 2016年6月6日收到修改稿)

分别基于线性和非线性稳定性理论, 建立了描述同轴旋转可压缩气体中含空泡液体射流稳定性的一阶与二阶色散方程, 并对色散方程进行验证分析; 在此基础上, 进行了射流表面一阶与二阶扰动及其发展的分析, 线性与非线性稳定性理论下射流空间发展的对比研究. 研究表明, 二阶扰动波的波长和振幅明显小于一阶扰动波; 沿射流方向, 射流表面的扰动发展主要由一阶扰动波的发展所主导; 随着轴向距离的增大, 二阶扰动波才开始逐渐对扰动的发展起一定的作用. 两种稳定性理论下射流表面的占优扰动模式不会发生改变; 采用非线性稳定性理论时, 可以反映一些实验中发现的射流表面出现“卫星液滴”的现象, 由于考虑了射流表面的二阶扰动, 射流界面振荡程度加剧.

关键词: 射流, 空间发展, 线性理论, 非线性理论

PACS: 68.03.-g, 68.03.Hj, 68.03.Kn

DOI: 10.7498/aps.65.166801

1 引言

在液体射流喷射过程中, 射流液体界面上的扰动波会不断发展, 从而引起射流在空间发展状态的变化以及分裂雾化等现象. 液体射流空间发展状态的研究将有助于加深对射流分裂雾化机理的认识.

目前, 基于稳定性理论的液体射流稳定性问题的研究可以分为两个分支: 线性稳定性理论研究和非线性稳定性理论研究^[1].

长期以来, 基于线性稳定性理论的液体射流稳定性研究一直是人们关注的主要热点^[2-5]. 线性稳定性理论研究的目的在于得到射流表面扰动波的最大扰动增长率、最不稳定性波数等射流稳定性信息. 线性稳定性理论研究的优势在于能简捷快速地对射流稳定性进行分析, 但由于其仅考虑了射流表面

一阶扰动对射流稳定性的作用, 因此对射流空间发展的预测并不准确^[6].

非线性稳定性理论研究与线性稳定性理论研究的最大区别在于考虑了射流表面高阶扰动对射流稳定性的作用, 因此可以更加准确地反映射流空间发展的变化. 目前, 人们已利用非线性稳定性理论对液体射流稳定性问题进行过大量研究^[7-19], 但对液体射流空间发展问题的分析相对较少. 尤其对线性与非线性稳定性理论下液体射流空间发展的对比研究尚有大量工作有待开展.

本文分别基于线性和非线性稳定性理论, 建立描述同轴旋转可压缩气体中含空泡液体射流稳定性的一阶与二阶色散方程, 并对色散方程进行验证分析; 在此基础上, 研究射流表面的一阶与二阶扰动及其发展, 对比分析线性与非线性稳定性理论下液体射流的空间发展情况.

* 国家自然科学基金(批准号: 51276011)、北京市自然科学基金(批准号: 3132016)、中国博士后科学基金(批准号: 2016M591061)和中央高校基本科研业务费(批准号: 2016JBM049)资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: zhining@bjtu.edu.cn

2 色散方程的建立及验证

假设研究对象为一束含空泡的圆柱形可压缩无黏液体射流喷射进入同轴旋转的可压缩无黏气体中,如图1所示.假定射流内的空泡与射流液体之间无滑移,空泡之间无相互作用,空泡与射流液体组成的混合相为连续介质^[20].

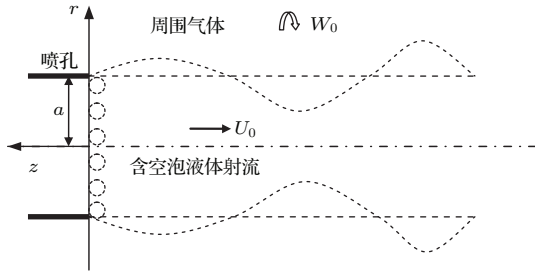


图1 射流示意图

Fig. 1. Schematic of liquid jet.

在图1中,将柱坐标系 (r, θ, z) 建立在喷嘴出口处,坐标原点设在喷嘴出口截面中心处,射流方向与 z 轴相反.射流半径为 a ,射流速度为 U_0 ,射流密度为 $\bar{\rho}_1$;射流周围气体在 z 轴方向无速度,旋转强度为 W_0 ,密度为 $\bar{\rho}_2$.

在图1所示的坐标系下,射流未受扰动时的基本流场(射流液体速度、射流外部气体速度、射流外部气体压力与射流液体压力之差、射流密度及射流中的音速)可以表示为

$$\bar{\mathbf{V}}_1 = (0, 0, -U_0), \quad 0 \leq r \leq a, \quad (1)$$

$$\bar{\mathbf{V}}_2 = (0, W_0/r, 0), \quad a < r < \infty, \quad (2)$$

$$\bar{p}_2(r) - \bar{p}_1 = -\frac{\sigma}{a} + \frac{1}{2}\bar{\rho}_2 W_0^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right),$$

$$\bar{p}_1 = \text{constant}, \quad (a < r < \infty), \quad (3)$$

$$\bar{\rho}_1 = \alpha \rho_v + (1 - \alpha) \rho_l, \quad (4)$$

$$c_1 = \left\{ \frac{\left[\frac{E_1 \bar{p}_1 k_v}{\bar{p}_1 k_v (1 - \alpha) + E_1 \alpha} \right]}{\left[\frac{\bar{p}_1 \alpha}{z_v R \bar{T}_1} + \rho_l (1 - \alpha) \right]} \right\}^{1/2}, \quad (5)$$

式中, $\bar{\mathbf{V}}_1$ 和 $\bar{\mathbf{V}}_2$ 分别为射流液体速度和射流周围气体速度; U_0 为射流液体轴向速度; W_0 为射流周围气体旋转强度; \bar{p}_1 为射流液体压力,假设为常数; $\bar{p}_2(r)$ 为射流周围气体压力; σ 为气液界面处表面张力系数; $\bar{\rho}_1$ 为射流密度; ρ_v 和 ρ_l 分别为空化气泡密度和射流液体密度; $\bar{\rho}_2$ 为射流周围气体密度;

c_1 为射流中的音速; \bar{T}_1 为射流液体温度; α 为空泡体积分数; k_v 和 z_v 分别为空化气泡的绝热指数与压缩因子; R 为摩尔气体常数; E_1 为射流液体弹性模数.物理量上的横线表示未受扰动物理量.

2.1 线性稳定性理论下液体射流色散方程

考虑射流及气体可压缩性,忽略射流及气体黏性和重力,则射流液体及其周围气体满足如下连续性方程和Euler方程^[21]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + v_{ri} \frac{\partial \rho_i}{\partial r} + \frac{v_{\theta i}}{r} \frac{\partial \rho_i}{\partial \theta} + v_{zi} \frac{\partial \rho_i}{\partial z} \\ & + \rho_i \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_{ri}) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta i}}{\partial \theta} + \frac{\partial v_{zi}}{\partial z} \right) = 0, \quad (6) \\ & \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial v_{ri}}{\partial t} + v_{ri} \frac{\partial v_{ri}}{\partial r} + \frac{v_{\theta i}}{r} \frac{\partial v_{ri}}{\partial \theta} + v_{zi} \frac{\partial v_{ri}}{\partial z} \\ & - \frac{v_{\theta i}^2}{r} = -\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p_i}{\partial r}, \\ & \frac{\partial v_{\theta i}}{\partial t} + v_{ri} \frac{\partial v_{\theta i}}{\partial r} + \frac{v_{\theta i}}{r} \frac{\partial v_{\theta i}}{\partial \theta} + v_{zi} \frac{\partial v_{\theta i}}{\partial z} \\ & + \frac{v_{ri} v_{\theta i}}{r} = -\frac{1}{\rho_i r} \frac{\partial p_i}{\partial \theta}, \\ & \frac{\partial v_{zi}}{\partial t} + v_{ri} \frac{\partial v_{zi}}{\partial r} + \frac{v_{\theta i}}{r} \frac{\partial v_{zi}}{\partial \theta} + v_{zi} \frac{\partial v_{zi}}{\partial z} \\ & = -\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p_i}{\partial z}, \end{aligned} \right. \quad (7) \end{aligned}$$

式中,下标 $i = 1, 2$,分别代表液体射流和射流周围气体参数; v_r, v_θ 和 v_z 分别为径向、周向及轴向速度.

基于线性稳定性理论,对射流控制方程(6)式和(7)式进行线性扰动分析;利用式 $\partial p'_i / \partial \rho'_i = c_i^2$ 将扰动密度和扰动压力与声速联系起来^[22];结合基本流场表达式(1)–(3)整理并无量纲化后,可得一阶射流扰动控制方程组.

对于一阶液相:

$$\begin{aligned} & Ma_1^2 \left(\frac{\partial p'_{1,1}}{\partial t} - \frac{\partial p'_{1,1}}{\partial z} \right) + \left(\frac{v'_{r1,1}}{r} + \frac{\partial v'_{r1,1}}{\partial r} \right. \\ & \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial v'_{\theta 1,1}}{\partial \theta} + \frac{\partial v'_{z1,1}}{\partial z} \right) = 0, \quad (8) \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial v'_{r1,1}}{\partial t} - \frac{\partial v'_{r1,1}}{\partial z} = -\frac{\partial p'_{1,1}}{\partial r}, \\ & \frac{\partial v'_{\theta 1,1}}{\partial t} - \frac{\partial v'_{\theta 1,1}}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p'_{1,1}}{\partial \theta}, \\ & \frac{\partial v'_{z1,1}}{\partial t} - \frac{\partial v'_{z1,1}}{\partial z} = -\frac{\partial p'_{1,1}}{\partial z}, \end{aligned} \right. \quad (9)$$

对于一阶气相:

$$Ma_2^2 \left(\frac{\partial p'_{2,1}}{\partial t} + \frac{E}{r^2} \frac{\partial p'_{2,1}}{\partial \theta} \right) + Q \left(\frac{v'_{r2,1}}{r} + \frac{\partial v'_{r2,1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'_{\theta 2,1}}{\partial \theta} + \frac{\partial v'_{z2,1}}{\partial z} \right) = 0, \quad (10)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v'_{r2,1}}{\partial t} + \frac{E}{r^2} \frac{\partial v'_{r2,1}}{\partial \theta} - \frac{2E v'_{\theta 2,1}}{r^2} = -\frac{1}{Q} \frac{\partial p'_{2,1}}{\partial r}, \\ \frac{\partial v'_{\theta 2,1}}{\partial t} + \frac{E}{r^2} \frac{\partial v'_{\theta 2,1}}{\partial \theta} = -\frac{1}{Qr} \frac{\partial p'_{2,1}}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial v'_{z2,1}}{\partial t} + \frac{E}{r^2} \frac{\partial v'_{z2,1}}{\partial \theta} = -\frac{1}{Q} \frac{\partial p'_{2,1}}{\partial z}, \end{cases} \quad (11)$$

式中, ρ'_i 为扰动密度; $\rho'_{i,n}$ 为扰动密度的 n 阶分量; p'_i 为扰动压力; $p'_{i,n}$ 为扰动压力的 n 阶分量; $\mathbf{V}'_i = (v'_{ri}, v'_{\theta i}, v'_{zi})$, 为扰动速度; $\mathbf{V}'_{i,n}$ 为扰动速度的 n 阶分量; $E = W_0/(U_0 a)$, 为气体无量纲旋转强度; $Q = \bar{\rho}_2/\bar{\rho}_1$, 为气体与射流密度比; $Ma_1 = U_0/c_1$, 为射流马赫数; $Ma_2 = U_0/c_2$, 为气体马赫数.

要建立色散方程, 需先给出射流扰动控制方程的边界条件. 分别将运动学和动力学边界条件进行线性扰动分析, 并无量纲化后得到:

$$\begin{cases} \hat{v}'_{r1,1} = (\omega_1 - ik_1) \hat{\eta}_1, \\ \hat{v}'_{r2,1} = (\omega_1 + im_1 E) \hat{\eta}_1, \end{cases} \quad (12)$$

$$\hat{p}'_{1,1} - \hat{p}'_{2,1} = We (k_1^2 + m_1^2 - 1) \hat{\eta}_1 + QE^2 \hat{\eta}_1, \quad (13)$$

式中, η_1 为气液交界面上扰动的一阶分量; ω_1 , k_1 和 m_1 分别为射流的一阶扰动频率、扰动波数以及角向模数; $We = \sigma/(\bar{\rho}_1 U_0^2 a)$, 为韦伯数的倒数.

利用简正模态法, 对一阶射流扰动控制方程组 (8)—(11) 式进行解析求解, 并将解析解代入到一阶边界条件 (12) 式和 (13) 式中, 得到齐次线性代数方程组, 令方程组系数矩阵的行列式为零, 并对行列式进行计算、整理, 从而得到描述液体射流稳定性的一阶色散方程:

$$\frac{(\omega_1 - ik_1)^2 I_{m_1}(n_1)}{n_1 I'_{m_1}(n_1)} - \frac{Q(\omega_1 + im_1 E)^2 K_{m_1}(n_2)}{n_2 K'_{m_1}(n_2)} + We (k_1^2 + m_1^2 - 1) + QE^2 = 0, \quad (14)$$

式中, I_{m_1} 和 K_{m_1} 分别为第一类和第二类 m_1 阶变形 Bessel 函数;

$$\begin{aligned} n_1 &= \left[k_1^2 + Ma_1^2 (\omega_1 - ik_1)^2 \right]^{0.5}; \\ n_2 &= \left[k_1^2 + Ma_2^2 (\omega_1 + im_1 E)^2 \right]^{0.5}. \end{aligned}$$

2.2 非线性稳定性理论下液体射流色散方程

基于非线性稳定性理论 [7], 对射流控制方程 (6) 和 (7) 式进行扰动分析; 利用式 $\partial p'_i/\partial \rho'_i = c_i^2$ 将扰动密度和扰动压力与声速联系起来 [22]; 忽略三阶及以上高阶小量; 整理并无量纲化后, 可得二阶射流扰动控制方程组.

对于二阶液相:

$$\begin{aligned} Ma_1^2 \left(\frac{\partial p'_{1,2}}{\partial t} - \frac{\partial p'_{1,2}}{\partial z} + \frac{v'_{r1,1} \partial p'_{1,1}}{\partial r} + \frac{v'_{\theta 1,1}}{r} \frac{\partial p'_{1,1}}{\partial \theta} + \frac{v'_{z1,1} \partial p'_{1,1}}{\partial z} \right) \\ + \left(\frac{v'_{r1,2}}{r} + \frac{\partial v'_{r1,2}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'_{\theta 1,2}}{\partial \theta} + \frac{\partial v'_{z1,2}}{\partial z} \right) \\ + Ma_1^2 p'_{1,1} \left(\frac{v'_{r1,1}}{r} + \frac{\partial v'_{r1,1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'_{\theta 1,1}}{\partial \theta} + \frac{\partial v'_{z1,1}}{\partial z} \right) = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v'_{r1,2}}{\partial t} + v'_{r1,1} \frac{\partial v'_{r1,1}}{\partial r} + \frac{v'_{\theta 1,1}}{r} \frac{\partial v'_{r1,1}}{\partial \theta} - \frac{\partial v'_{r1,2}}{\partial z} + v'_{z1,1} \frac{\partial v'_{r1,1}}{\partial z} - \frac{v'^2_{\theta 1,1}}{r} \right) \\ + Ma_1^2 p'_{1,1} \left(\frac{\partial v'_{r1,1}}{\partial t} - \frac{\partial v'_{r1,1}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p'_{1,2}}{\partial r}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v'_{\theta 1,2}}{\partial t} + v'_{r1,1} \frac{\partial v'_{\theta 1,1}}{\partial r} + \frac{v'_{\theta 1,1}}{r} \frac{\partial v'_{\theta 1,1}}{\partial \theta} - \frac{\partial v'_{\theta 1,2}}{\partial z} + v'_{z1,1} \frac{\partial v'_{\theta 1,1}}{\partial z} + \frac{v'_{r1,1} v'_{\theta 1,1}}{r} \right) \\ + Ma_1^2 p'_{1,1} \left(\frac{\partial v'_{\theta 1,1}}{\partial t} - \frac{\partial v'_{\theta 1,1}}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p'_{1,2}}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v'_{z1,2}}{\partial t} + v'_{r1,1} \frac{\partial v'_{z1,1}}{\partial r} + \frac{v'_{\theta 1,1}}{r} \frac{\partial v'_{z1,1}}{\partial \theta} - \frac{\partial v'_{z1,2}}{\partial z} + v'_{z1,1} \frac{\partial v'_{z1,1}}{\partial z} \right) \\ + Ma_1^2 p'_{1,1} \left(\frac{\partial v'_{z1,1}}{\partial t} - \frac{\partial v'_{z1,1}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p'_{1,2}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (18)$$

对于二阶气相:

$$\begin{aligned} Ma_2^2 \left(\frac{\partial p'_{2,2}}{\partial t} + \frac{E}{r^2} \frac{\partial p'_{2,2}}{\partial \theta} + v'_{r2,1} \frac{\partial p'_{2,1}}{\partial r} + \frac{v'_{\theta 2,1}}{r} \frac{\partial p'_{2,1}}{\partial \theta} + v'_{z2,1} \frac{\partial p'_{2,1}}{\partial z} \right) \\ + Q \left(\frac{v'_{r2,2}}{r} + \frac{\partial v'_{r2,2}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'_{\theta 2,2}}{\partial \theta} + \frac{\partial v'_{z2,2}}{\partial z} \right) \\ + Ma_2^2 p'_{2,1} \left(\frac{v'_{r2,1}}{r} + \frac{\partial v'_{r2,1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'_{\theta 2,1}}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial v'_{z2,1}}{\partial z} = 0, \quad (19)$$

$$Q \left(\frac{\partial v'_{r2,2}}{\partial t} + \frac{v'_{r2,1} \partial v'_{r2,1}}{\partial r} + \frac{E}{r^2} \frac{\partial v'_{r2,2}}{\partial \theta} + \frac{v'_{\theta2,1}}{r} \frac{\partial v'_{r2,1}}{\partial \theta} + \frac{v'_{z2,1} \partial v'_{r2,1}}{\partial z} - \frac{2E v'_{\theta2,2}}{r^2} - \frac{v'^2_{\theta2,1}}{r} \right) + M a_2^2 p'_{2,1} \left(\frac{\partial v'_{r2,1}}{\partial t} + \frac{E}{r^2} \frac{\partial v'_{r2,1}}{\partial \theta} - \frac{2E v'_{\theta2,1}}{r^2} \right) = - \frac{\partial p'_{2,2}}{\partial r}, \quad (20)$$

$$Q \left(\frac{\partial v'_{\theta2,2}}{\partial t} + v'_{r2,1} \frac{\partial v'_{\theta2,1}}{\partial r} + \frac{E}{r^2} \frac{\partial v'_{\theta2,2}}{\partial \theta} + \frac{v'_{\theta2,1}}{r} \frac{\partial v'_{\theta2,1}}{\partial \theta} + \frac{v'_{r2,1} v'_{\theta2,1}}{r} + v'_{z2,1} \frac{\partial v'_{\theta2,1}}{\partial z} \right) + M a_2^2 p'_{2,1} \left(\frac{\partial v'_{\theta2,1}}{\partial t} + \frac{E}{r^2} \frac{\partial v'_{\theta2,1}}{\partial \theta} \right) = - \frac{1}{r} \frac{\partial p'_{2,2}}{\partial \theta}, \quad (21)$$

$$Q \left(\frac{\partial v'_{z2,2}}{\partial t} + v'_{r2,1} \frac{\partial v'_{z2,1}}{\partial r} + \frac{E}{r^2} \frac{\partial v'_{z2,2}}{\partial \theta} + \frac{v'_{\theta2,1}}{r} \frac{\partial v'_{z2,1}}{\partial \theta} + v'_{z2,1} \frac{\partial v'_{z2,1}}{\partial z} \right) + M a_2^2 p'_{2,1} \left(\frac{\partial v'_{z2,1}}{\partial t} + \frac{E}{r^2} \frac{\partial v'_{z2,1}}{\partial \theta} \right) = - \frac{\partial p'_{2,2}}{\partial z}. \quad (22)$$

与建立一阶色散方程时类似, 在建立二阶色散方程时, 需先分别将运动学和动力学边界条件进行扰动分析. 忽略三阶及其以上的高阶项, 结合射流速度表达式(1)和(2), 并进行无量纲化处理得到二阶运动学和动力学边界条件:

$$\begin{cases} \hat{v}'_{r1,21} = (\omega_2 - 2ik_2) \hat{\eta}_{21}, \\ \hat{v}'_{r1,22} + \hat{\eta}_1 \hat{v}'_{r1,1} \\ = (2\omega_1 - 2ik_1) \hat{\eta}_{22} + (\omega_1 - ik_1) \hat{\eta}_1^2 \\ + im_1 \hat{v}'_{\theta1,1} \hat{\eta}_1 + ik_1 \hat{v}'_{z1,1} \hat{\eta}_1, \\ \hat{v}'_{r2,21} = (\omega_2 + 2im_2 E) \hat{\eta}_{21}, \\ \hat{v}'_{r2,22} + \hat{\eta}_1 \hat{v}'_{r2,1} \\ = (2\omega_1 + 2im_1) \hat{\eta}_{22} + \omega_1 \hat{\eta}_1^2 \\ + im_1 \hat{v}'_{\theta2,1} \hat{\eta}_1 + ik_1 \hat{v}'_{z2,1} \hat{\eta}_1, \\ \hat{p}'_{1,21} - \hat{p}'_{2,21} \\ = -We(1 - 4k_2^2 - 4m_2^2) \hat{\eta}_{21} + QE^2 \hat{\eta}_{21}, \\ (\hat{p}'_{1,22} - \hat{p}'_{2,22}) + 5\hat{\eta}_1 (\hat{p}'_{1,1} - \hat{p}'_{2,1}) \\ = We \left[(4k_1^2 + 4m_1^2 - 1) \hat{\eta}_{22} \right. \end{cases} \quad (23)$$

$$\left. - \frac{5}{2} \left(1 - \frac{11}{5} k_1^2 - m_1^2 \right) \hat{\eta}_1^2 \right] + QE^2 \left(\hat{\eta}_{22} + \frac{7}{2} \hat{\eta}_1^2 \right), \quad (25)$$

式中, η_2 为气液交界面上扰动的二阶分量; ω_2, k_2 和 m_2 分别为射流的二阶扰动频率、扰动波数以及角向模数.

利用扰动扩展方法[23], 对二阶射流扰动控制方程组进行解析求解, 并将解析解代入二阶边界条件(23)–(25)式中, 并令方程组系数矩阵的行列式为零, 即可得到描述液体射流稳定性的二阶色散方程, 鉴于色散方程的复杂性, 本文仅给出其简写形式:

$$f(k_2, \omega_2, m_2, We, E, Q, Ma_1, Ma_2) = 0, \quad (26)$$

本文采用具有超线性收敛性的弦截法[24]在数值符号计算软件 Mathematica 中对色散方程进行迭代求解.

将对一阶和二阶色散方程分别求解得到的扰动增长率、扰动波数及扰动频率等代入如下气液交界面上射流所受扰动(27)式中, 即可得到射流表面扰动的发展状态.

$$\begin{aligned} \eta(t, \theta, z) &= \sum_{n=1}^{n=\infty} \eta_0^n \eta_n(t, \theta, z) \\ &= \eta_0 \eta_1(t, \theta, z) + \eta_0^2 \eta_2(t, \theta, z) + \dots \\ &= \eta_0 \hat{\eta}_1(r) \exp[\omega_1 t + i(k_1 z + m_1 \theta)] \\ &\quad + \eta_0^2 \hat{\eta}_{21}(r) \exp[\omega_2 t + i(2k_2 z + 2m_2 \theta)] \\ &\quad + \eta_0^2 \hat{\eta}_{22}(r) \exp[2\omega_1 t + i(2k_1 z + 2m_1 \theta)] \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (27)$$

将(27)式的计算结果代入如下气液界面方程(28)式中, 则可得到液体射流的界面发展状态, 即射流形态.

$$F(t, r, \theta, z) = r - a - \eta(t, \theta, z) = 0. \quad (28)$$

令发展一段时间后的射流半径为零, 则可以求得同轴旋转可压缩气体中液体射流的分裂长度, 本文中分裂长度的计算主要用来进行色散方程及其求解方法的验证.

2.3 色散方程的验证分析

首先, 对基于线性稳定性理论建立的一阶色散方程(14)式进行验证. 一阶色散方程中既考虑了流体的旋转及可压缩性, 还考虑了空化气泡的影响.

若只考虑扰动为轴对称的不可压缩液体(无空化气泡)射流射入无旋不可压缩流体内的情况,即令 $m = 0, E = 0, Ma_1 = Ma_2 = 0, \alpha = 0$, 则色散方程(14)式退化为

$$\frac{(\omega - ik)^2 I_0(k)}{I_1(k)} + \frac{Q\omega^2 K_0(k)}{K_1(k)} + kWe(k^2 - 1) = 0, \quad (29)$$

(29)式即为Lin和Lian^[25]推导的描述轴对称扰动条件下射流稳定性的色散方程。

若忽略周围气体旋转及空化气泡,即令 $E = 0, \alpha = 0$, 则色散方程(14)退化为

$$\frac{(\omega - ik)^2 I_m(n_1)}{n_1 I'_m(n_1)} - \frac{Q\omega^2 K_m(n_2)}{n_2 K'_m(n_2)} + We(k^2 + m^2 - 1) = 0, \quad (30)$$

退化后的色散方程(30)式与Zhou和Lin^[2]推导的描述射流稳定性的色散方程一致。

通过以上两种情况下的比较,可以在一定程度上说明一阶色散方程的正确性。

接下来,为了对二阶色散方程进行验证,采用文献^[26]中的实验条件进行计算,并与文献提供的实验结果数据进行对比,如图2所示。文献^[26]中给出的是水射流射入静止空气中的射流分裂实验。

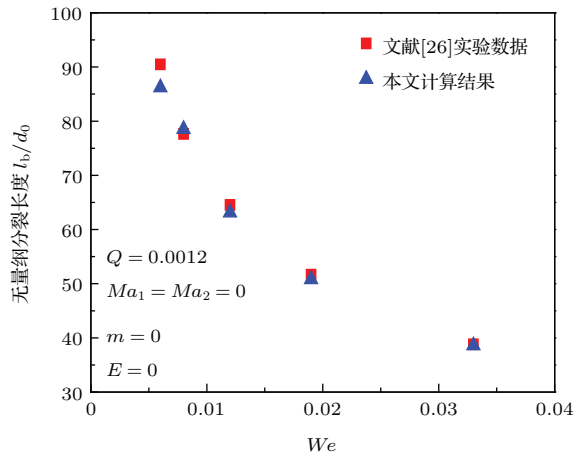


图2 计算结果与文献^[26]实验数据的比较

Fig. 2. Comparison of the calculation results with the experimental data in the Ref. ^[26].

从图2的对比结果可以发现,利用二阶色散方程得到的液体射流分裂长度计算结果与实验结果的变化趋势及数值比较符合,从而验证了二阶色散方程及其求解方法的正确性。

3 两种理论下射流空间发展的对比分析

与线性稳定性理论相比,非线性稳定性理论的优势在于除了可以考虑射流表面的一阶扰动外,还可考虑高阶扰动对射流空间发展的作用。本文基于非线性稳定性理论建立的射流稳定性色散方程即可体现二阶扰动的作用。一阶扰动与二阶扰动及其对射流空间发展的作用必然会有所不同;接下来将分别对线性与非线性稳定性理论下射流的空间发展进行比较。采用的相关参数如表1所列。

表1 计算时采用的相关参数
Table 1. Parameters used in the calculation.

参数	单位	参数值
液滴密度	kg/m ³	848
液滴黏度	Pa·s	2.936 × 10 ⁻³
表面张力系数	N/m	2.689 × 10 ⁻²
空气密度	kg/m ³	1.193
空气黏度	Pa·s	1.845 × 10 ⁻⁵
空气初始压力	Pa	1.0 × 10 ⁵
空化气泡密度	kg/m ³	1.087 × 10 ⁻²
空化气泡黏度	Pa·s	1.810 × 10 ⁻⁶
空化气泡半径	m	5 × 10 ⁻⁶
温度	K	300

3.1 射流表面的一阶与二阶扰动及其发展

射流表面的扰动及其发展会直接影响到射流空间的发展。为了分析射流表面一阶扰动与二阶扰动的不同,图3给出了一定射流条件下,射流表面一阶扰动、二阶扰动及一阶与二阶共存时的扰动发展状况。需要说明的是,在图3中,一阶扰动对应的是采用线性稳定性理论时射流表面的扰动;一阶与二阶共存时的扰动对应的是采用非线性稳定性理论时射流表面的扰动。通过二阶扰动,可以体现和反映非线性稳定性理论与线性稳定性理论下射流扰动的不同。

从图3(a)和图3(b)中可以看到,沿射流方向,射流表面的二阶扰动与一阶扰动的波形类似,但二阶扰动波的波长明显小于一阶扰动波的波长,且二阶扰动波的无量纲扰动振幅明显小于一阶扰动波的无量纲扰动振幅。

对比图 3(a) 和图 3(b) 还可以发现, 射流表面的一阶扰动波从射流初始即迅速发展, 无量纲扰动振幅迅速增长; 而二阶扰动波在较长的一段无量纲轴向距离内, 其无量纲扰动振幅的发展一直比较缓慢, 之后才有所变化. 正是这一特点决定了射流表面一阶与二阶共存时扰动波的发展状态; 如图 3(c) 所示, 射流初期, 射流表面一阶与二阶共存时的扰动发展几乎完全由一阶扰动的发展所决定.

从图 3(d) 中可以看到, 沿射流方向, 射流表面一阶与二阶共存时的扰动发展主要由一阶扰动波的发展所主导; 随着无量纲轴向距离的增大, 二阶扰动波才开始逐渐对一阶与二阶共存时的扰动发展起一定的作用. 二阶扰动波的作用主要体现在三个方面: 使波峰处的无量纲扰动振幅明显增大; 使波谷处的无量纲扰动振幅有所减小, 甚至会导致波谷处出现起伏; 使扰动波的波形发生一定程度的改变, 即波峰部分变窄, 波谷部分变宽.

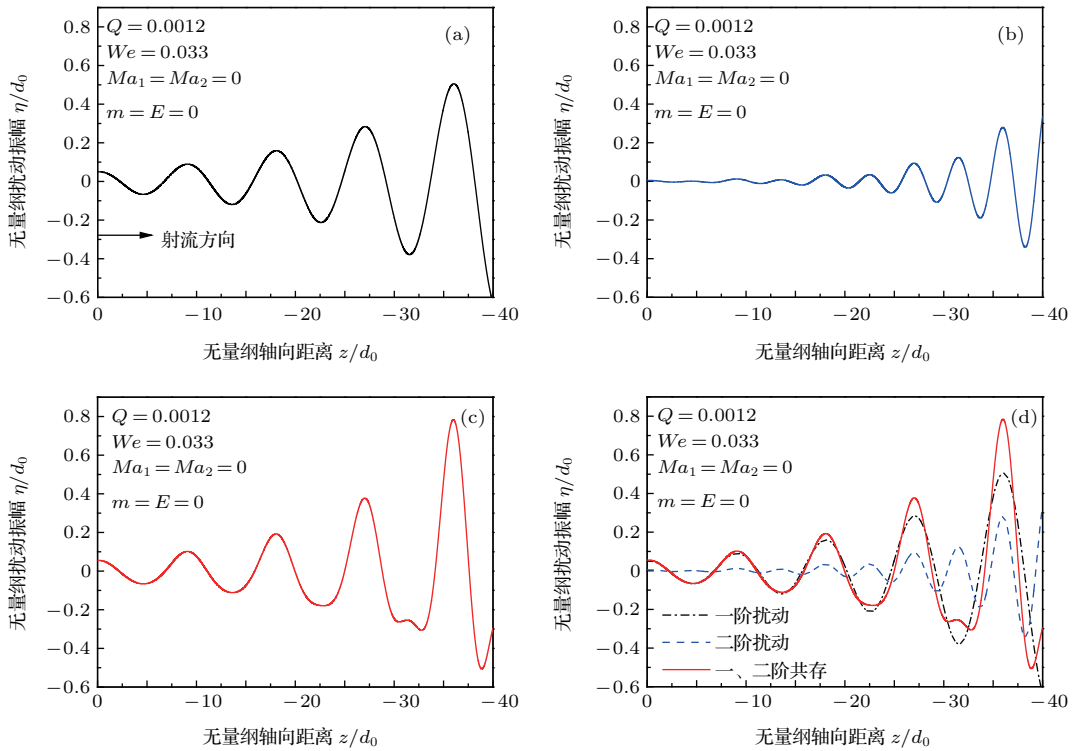


图 3 射流表面一阶、二阶及一阶与二阶共存时扰动的发展 (a) 一阶扰动 (η_0); (b) 二阶扰动 (η_0^2); (c) 一、二阶共存时扰动 ($\eta_0 + \eta_0^2$); (d) 三种扰动对比
 Fig. 3. Spatial evolution of disturbance amplification with first order (η_0), second order (η_0^2) and first + second order ($\eta_0 + \eta_0^2$): (a) First order disturbance (η_0); (b) second order disturbance (η_0^2); (c) first + second order disturbance ($\eta_0 + \eta_0^2$); (d) comparative of three types of disturbance.

3.2 两种理论下射流形态的比较

在线性稳定性理论 (只考虑一阶扰动) 和非线性稳定性理论 (考虑一阶与二阶共存时扰动) 下, 射流表面扰动波的发展存在一定的不同, 这势必会导致射流界面的发展 (即射流形态) 的不同.

图 4(a) 和图 4(b) 给出了在一定射流条件下 ($Q = 0.0012$, $We = 0.033$, $Ma_1 = Ma_2 = 0$, $E = 0$), 分别采用线性稳定性理论和非线性稳定性理论时液体射流分裂前一段距离内的三维空间发展. 由于整个射流分裂过程较长, 为了更清晰

地展示射流形态的变化, 图 4 仅给出了射流分裂前一段距离内的射流空间发展. 在射流空间发展过程中, 如果在扰动作用下射流半径为零, 说明射流在此处发生分裂.

对比图 4(a) 和图 4(b) 可以看到, 无论是采用线性稳定性理论还是非线性稳定性理论, 射流的横截面均为圆形, 且射流液面的扰动波形为轴对称形; 说明两种稳定性理论下射流表面的占优扰动模式不会发生改变, 均为轴对称扰动占优.

对比图 4(a) 和图 4(b) 还可以看到, 与采用线性稳定性理论时射流的空间发展不同, 采用非线性

稳定性理论时, 在射流的空间发展过程中, 在两个主液滴之间会出现凸起, 有学者将该凸起称为“卫星液滴”, 这一现象与已有的实验结果 [22] 一致; 说明非线性稳定性理论可以更好地预测射流空间发展的细节. 究其原因是因为非线性稳定性理论考虑了非线性扰动的作用; 由于一阶扰动波与二阶扰动波的波长及波幅均不相同, 当一阶扰动波的波谷与二阶扰动波的波峰相遇时, 即有可能导致卫星液滴的出现, 这一点从图 3(d) 中也可以看出. 另外, 采用非线性稳定性理论时, 主液滴的形状也发生了较大的改变, 即由类椭球形向类球形转变.

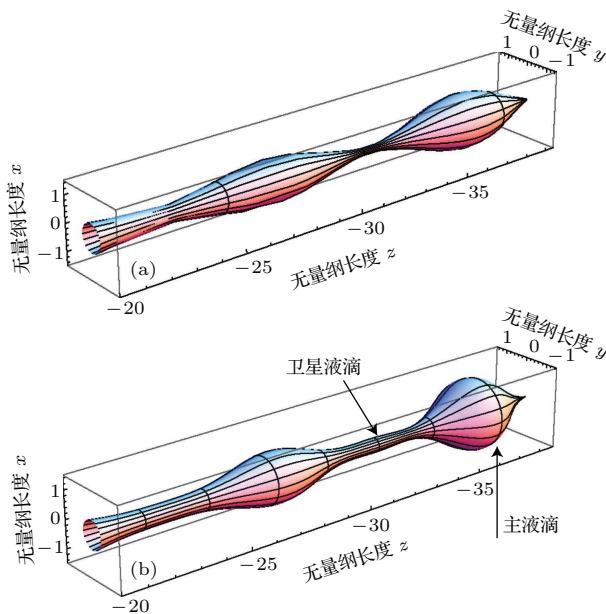


图 4 (网刊彩色) 射流三维空间发展的比较 ($Q = 0.0012$, $We = 0.033$, $Ma_1 = Ma_2 = 0$, $E = 0$) (a) 线性稳定性理论; (b) 非线性稳定性理论

Fig. 4. (color online) Comparison of the three-dimensional spatial evolution of the liquid jet: (a) Linear stability theory; (b) nonlinear stability theory.

为了更直观地进行线性与非线性稳定性理论下射流界面振荡情况的比较, 图 5(a) 和图 5(b) 给出了在相同的射流条件下分别采用线性和非线性稳定性理论时液体射流界面的二维空间发展.

通过图 5 可以清晰地看到, 与采用线性稳定性理论时的结果相比, 采用非线性稳定性理论时的射流无量纲半径的变化幅度更大, 这在射流分裂前的一段距离内尤其明显, 说明采用非线性稳定性理论时, 由于考虑了射流表面的二阶扰动, 从而使得射流界面振荡更加剧烈.

为了进一步探究两种稳定性理论下液体射流形态的不同, 图 6 和图 7 分别给出了射流韦伯数变

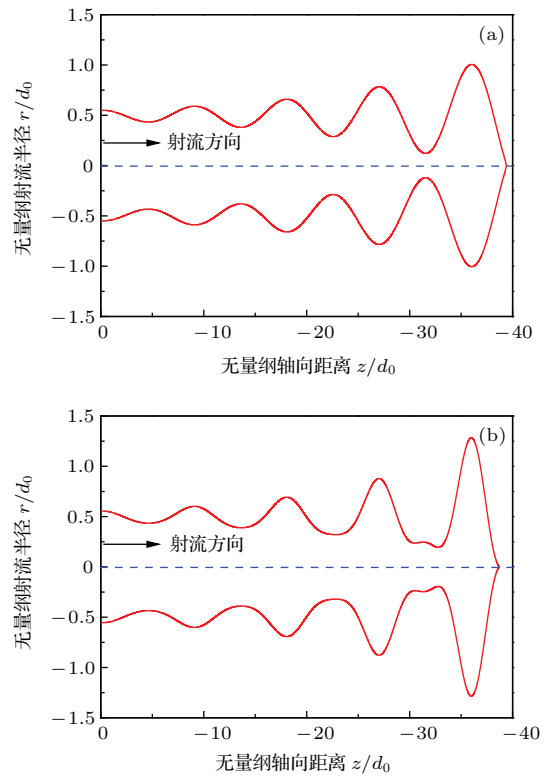


图 5 射流二维空间发展的比较 ($Q = 0.0012$, $We = 0.033$, $Ma_1 = Ma_2 = 0$, $E = 0$) (a) 线性稳定性理论; (b) 非线性稳定性理论

Fig. 5. Comparison of the two-dimensional spatial evolution of the liquid jet: (a) Linear stability theory; (b) nonlinear stability theory.

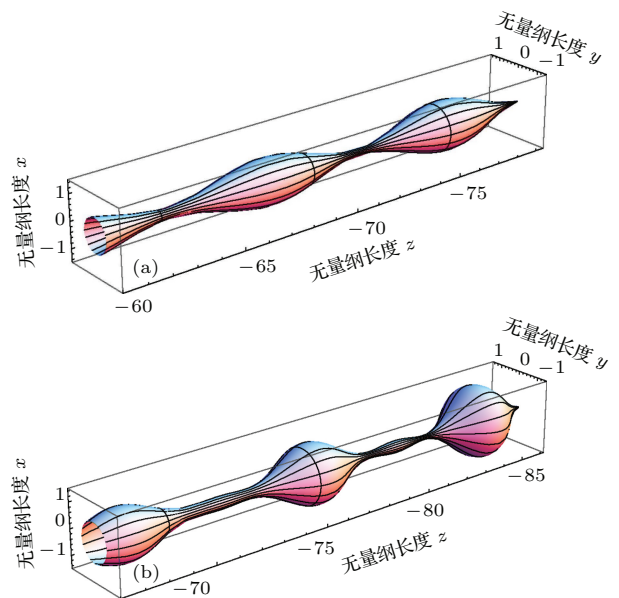


图 6 (网刊彩色) 韦伯数变化后射流三维空间发展的比较 ($Q = 0.0012$, $We = 0.006$, $Ma_1 = Ma_2 = 0$, $E = 0$) (a) 线性稳定性理论; (b) 非线性稳定性理论

Fig. 6. (color online) Comparison of the three-dimensional spatial evolution of the liquid jet after We number changed: (a) Linear stability theory; (b) nonlinear stability theory.

化后 ($We = 0.006$), 采用线性稳定性理论和非线性稳定性理论时射流分裂前一段距离内三维空间发展的比较和二维空间发展的比较.

从图 6 中可以看到, 射流条件改变后, 两种稳定性理论下的射流表面占优扰动模式没有发生变化; 采用非线性稳定性理论时, 在射流的空间发展过程中仍会出现卫星液滴, 且出现了不止一个. 图 7 同样反映出射流表面的二阶扰动确实会加剧射流界面的振荡程度, 且主液滴的形状会由类椭球形向类球形转变.

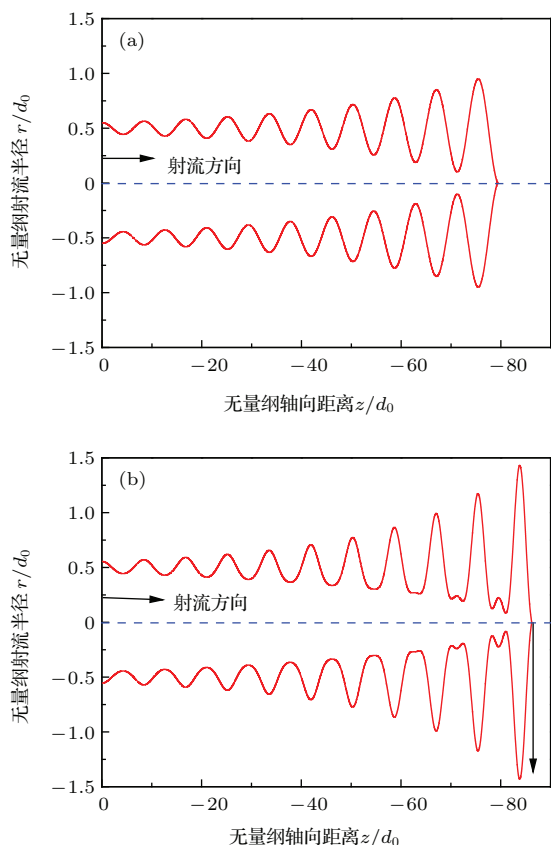


图 7 韦伯数变化后射流二维空间发展的比较 ($Q = 0.0012$, $We = 0.006$, $Ma_1 = Ma_2 = 0$, $E = 0$) (a) 线性稳定性理论; (b) 非线性稳定性理论

Fig. 7. Comparison of the two-dimensional spatial evolution of the liquid jet after We number changed: (a) Linear stability theory; (b) nonlinear stability theory.

4 结 论

与线性稳定性理论相比, 非线性稳定性理论的优势在于除了可以考虑射流表面的一阶扰动外, 还可考虑高阶扰动对射流空间发展的作用, 非线性稳定性理论可以更好地预测射流空间发展的细节. 本文取得了以下结论.

1) 分别基于线性和非线性稳定性理论, 建立了

描述同轴旋转可压缩气体中含空泡液体射流稳定性的一阶与二阶色散方程, 并对色散方程的正确性进行了验证分析.

2) 利用建立的色散方程, 进行了射流表面一阶与二阶扰动及其发展的分析. 研究表明, 二阶扰动波的波长和振幅明显小于一阶扰动波. 沿射流方向, 射流表面的扰动发展主要由一阶扰动波的发展主导; 随着轴向距离的增大, 二阶扰动波才开始逐渐对扰动的发展起一定的作用.

3) 利用建立的色散方程, 进行了线性与非线性稳定性理论下射流空间发展的比较. 研究表明, 两种稳定性理论下射流表面的占优扰动模式不会发生改变; 采用非线性稳定性理论时, 可以反映一些实验中发现的射流表面出现“卫星液滴”的现象, 由于考虑了射流表面的二阶扰动, 射流界面振荡程度加剧.

参考文献

- [1] Yi S J 1996 *Ph. D. Dissertation* (Dalian: Dalian University of Technology) (in Chinese) [易世君 1996 博士学位论文 (大连: 大连理工大学)]
- [2] Zhou Z W, Lin S P 1992 *J. Propul. Power* **8** 736
- [3] Ozgen S, Uzol O 2012 *J. Fluid Eng.* **134** 1
- [4] Turner M R, Sazhin S S, Healey J J 2012 *Fuel* **97** 288
- [5] Liang X, Deng D S, Nave J C 2011 *J. Fluid Mech.* **683** 235
- [6] Cao J M 2014 *J. Circ. Syst.* **2** 165 (in Chinese) [曹建明 2014 新能源进展 **2** 165]
- [7] Jazayeri S A, Li X G 2000 *J. Fluid Mech.* **406** 281
- [8] Yang L J, Wang C, Fu Q F 2013 *J. Fluid Mech.* **735** 249
- [9] Yuen M C 1968 *J. Fluid Mech.* **33** 151
- [10] Nayfeh A H 1970 *Phys. Fluids* **13** 841
- [11] Lafrance P 1975 *Phys. Fluids* **18** 428
- [12] Ibrahim A A, Jog M A 2006 *Phys. Fluids* **18** 114101
- [13] Ibrahim A A, Jog M A 2008 *Int. J. Multiphase Flow* **34** 647
- [14] Rangel R H, Sirignano W A 1988 *Phys. Fluids* **31** 1845
- [15] Lozano A, Olivares A G, Dopazo C 1998 *Phys. Fluids* **10** 2188
- [16] Ibrahim E A, Lin S P 1992 *J. Appl. Mech.* **59** 291
- [17] Tharakan T J, Ramamurthi K, Balakrishnan M 2002 *Acta Mech.* **156** 29
- [18] Ibrahim A A 2006 *Ph. D. Dissertation* (Cincinnati: University of Cincinnati)
- [19] Yan K, Jog M A, Ning Z 2013 *Acta Mech.* **224** 3071
- [20] Hadji L, Schreiber W 2007 *J. Phys. Nat. Sci.* **1** 1
- [21] Potter M C, Wiggert D C 2009 *Mechanics of Fluids* (3rd Ed.) (Stamford: Cengage Learning) p213
- [22] Lin S P 2003 *Breakup of Liquid Sheets and Jets* (Cambridge: Cambridge University Press) p109

- [23] Zhou H, Zhao G F 2004 *Hydrodynamic Stability* (Beijing: National Defence Industry Press) p23 (in Chinese)
[周恒, 赵耕夫 2004 流动稳定性 (北京: 国防工业出版社) 第23页]
- [24] Li Q Y, Wang N C, Yi D Y 2008 *Numerical Analysis* (Beijing: Tsinghua University Press) p228 (in Chinese)
- [李庆扬, 王能超, 易大义 2008 数值分析 (第5版) (北京: 清华大学出版社) 第228页]
- [25] Lin S P, Lian Z W 1990 *AIAA J.* **28** 120
- [26] Sallam K A, Dai Z, Faeth G M 2002 *Int. J. Multiphase Flow* **28** 427

Comparative study on the spatial evolution of liquid jet under linear and nonlinear stability theories*

Lü Ming Ning Zhi[†] Yan Kai

(School of Mechanical, Electronic and Control Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

(Received 15 March 2016; revised manuscript received 6 June 2016)

Abstract

In the injecting process of liquid jet, the disturbance wave on jet interface will grow continually, leading to the spatial development and atomization of liquid jet. Studying the spatial evolution of liquid jet will help to deepen the understanding of the mechanism of jet breakup and atomization. In this paper, based on the linear and nonlinear stability theories, the first-order and second-order dispersion equations describing the stability of liquid jet with cavitation bubbles in a coaxial swirling compressible airstream are built, respectively, and the dispersion equation and its solving method are verified by the data in the literature. On this basis, the developments of first-order and second-order disturbance are analyzed, and the spatial evolutions of liquid jet are compared under linear and nonlinear stability theories. The results show that the wavelength and amplitude of the second-order disturbance are much smaller than those of the first-order disturbance. The disturbance development on jet surface is mainly dominated by the development of the first-order disturbance along the axial direction. With the increasing of axial distance, the second-order disturbance gradually begins to play a role in the developing of disturbance. The role of second-order disturbance is mainly reflected in three aspects, i. e. , obviously increasing the disturbance amplitude at wave crest, reducing the disturbance amplitude at wave trough (sometimes ups and downs occur), and changing the waveform to a certain degree. The dominant disturbance mode on jet surface will not change under two kinds of theories. By using the nonlinear stability theory, satellite droplets which are found on jet surface in experiments can be reflected, and the shape of main droplet changes obviously from the ellipsoid to sphere. Also, the change of dimensionless radius of liquid jet is greater by nonlinear stability theory than by linear stability theory, which indicates that the oscillation extent of jet surface increases due to considering the second-order disturbance. Therefore, compared with the linear stability theory, the nonlinear stability theory has the advantage that it considers the effects of high-order disturbance on the spatial evolution of liquid jet in addition to the first-order disturbance on jet surface. The nonlinear stability theory can predict the spatial development of liquid jet in more detail than the linear stability theory.

Keywords: jet, spatial evolution, linear theory, nonlinear theory

PACS: 68.03.-g, 68.03.Hj, 68.03.Kn

DOI: 10.7498/aps.65.166801

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51276011), the Natural Science Foundation of Beijing, China (Grant No. 3132016), the China Postdoctoral Science Foundation (Grant No. 2016M591061), and the Fundamental Research Funds for the Central Universities of Ministry of Education of China (Grant No. 2016JBM049).

[†] Corresponding author. E-mail: zhining@bjtu.edu.cn