

基于自适应模糊控制的分数阶混沌系统同步

陈晔 李生刚 刘恒

Synchronization of fractional-order chaotic systems based on adaptive fuzzy control

Chen Ye Li Sheng-Gang Liu Heng

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 170501 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.170501

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.170501>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I17>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

一类时变时滞混沌系统的参数辨识方法

A method of identifying parameters of a time-varying time-delay chaotic system

物理学报.2015, 64(24): 240506 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.240506>

基于最优滤波器的强混沌背景中谐波信号检测方法研究

Harmonic signal detection method from strong chaotic background based on optimal filter

物理学报.2015, 64(22): 220504 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.220504>

带有未知非对称控制增益的不确定分数阶混沌系统自适应模糊同步控制

Adaptive fuzzy synchronization for uncertain fractional-order chaotic systems with unknown non-symmetrical control gain

物理学报.2015, 64(7): 070503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.070503>

混沌海杂波背景下的微弱信号检测混合算法

Hybrid algorithm for weak signal detection in chaotic sea clutter

物理学报.2015, 64(4): 040506 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.040506>

基于线性矩阵不等式的一类新羽翼倍增混沌分析与控制

Analysis on a class of double-wing chaotic system and its control via linear matrix inequality

物理学报.2014, 63(21): 210502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.210502>

基于自适应模糊控制的分数阶混沌系统同步

陈晔¹⁾ 李生刚^{1)†} 刘恒¹⁾²⁾

1) (陕西师范大学数学与信息科学学院, 西安 710119)

2) (淮南师范学院数学与计算科学系, 淮南 232038)

(2016年4月13日收到; 2016年5月27日收到修改稿)

本文主要研究了带有未知外界扰动的分数阶混沌系统的同步问题. 基于分数阶 Lyapunov 稳定性理论, 构造了分数阶的参数自适应规则以及模糊自适应同步控制器. 在稳定性分析中主要使用了平方 Lyapunov 函数. 该控制方法可以实现两分数阶混沌系统的同步, 使得同步误差渐近趋于 0. 最后, 数值仿真结果验证了本文方法的有效性.

关键词: 分数阶自适应律, 自适应模糊控制, 分数阶混沌系统**PACS:** 05.45.Pq, 05.45.Xt**DOI:** 10.7498/aps.65.170501

1 引言

早在十七世纪初期微积分就已经被提出, 然而分数阶微积分理论及其应用却在近几十年才得到广泛的关注. 随着分数阶微积分理论的发展, 分数阶混沌系统的同步比整数阶在实际中更具有突出的应用价值和发展前景. 采用分数阶描述对象时, 能够更好地揭示对象的本质及其行为. 分数阶理论不仅为很多系统模型提供了新的工具, 而且在很多情况下, 具有常规整数阶理论设计的控制器无法实现的优越性, 可实现满意的鲁棒性、稳定性、良好的动态性能和控制精度, 同时也特别适合描述一些物理系统的动力学行为^[1-7]. 在复杂动态系统中, 应用分数阶微积分建立的模型往往比整数阶系统更加准确. 在实际模型中, 随着系统的运行, 外界环境的变化, 系统元器件的衰退及老化等原因使得所建模型不能精确地描述实际系统, 所以研究不确定分数阶系统的同步控制问题有着重要的理论价值和实际意义.

近年来, 混沌系统成为非线性领域研究的热点之一, 在其同步控制问题的研究中, 由于混沌系统对初始状态值非常敏感, 微小的初值变化就会引起

系统的轨线形状以及其稳定性的剧烈波动, 使得混沌系统的同步控制变得困难. 自从 Lorenz 发现第一个混沌吸引子, 至今对于混沌系统控制与同步的研究已经遍及许多领域. 在过去的 20 多年里, 已经出现很多混沌系统同步的方法, 如 PC 方法, 非线性耦合方法, 滑模方法, Lyapunov 直接法, 非线性控制, active 控制方法以及自适应反馈控制方法^[8-19]等. 本文采取自适应控制方法来研究分数阶混沌系统的同步, 其优点在于: 在各类控制系统中, 由于控制对象存在某些不确定性以及各种外界干扰, 包括环境或参数的改变, 亦或是受外界扰动的影响等其他复杂因素, 致使系统的控制无法满足性能的要求. 自适应控制通过自动调节控制器参数, 来消除复杂因素和不确定性的影响, 使得控制器与控制对象和环境相适应. 在本质上, 自适应控制是利用对系统性能有关因素的估计, 来补偿或克服某些不确定性和各种干扰. 因此, 自适应理论在分数阶混沌系统的同步过程中更具有研究意义.

目前, 关于分数阶混沌系统的稳定性和同步研究大部分都是通过设计控制器来消除误差系统中的非线性项, 从而实现混沌系统的稳定和同步的目的. 但是当遇到参数未知或者模型不确定的系统, 这种方法往往无法达到预期的目的. 然而, 在

† 通信作者. E-mail: shengganlinew@126.com

现实生活中,混沌系统的参数一般都是未知的或者不确定的. 本文就分数阶非线性混沌系统无外界扰动与伴有外界扰动的同步问题做了研究,通过模糊逻辑系统来逼近未知非线性函数,并利用平方 Lyapunov 函数对系统的稳定性做了分析.

本文的主要工作如下: 1) 利用 Lyapunov 稳定性理论,通过设计控制器及参数自适应律,给出分数阶非线性混沌系统同步的方法; 2) 构造并使用了平方 Lyapunov 函数,严格证明了系统在有外界扰动与无外界扰动情形下的稳定性; 3) 数值仿真中就两种情形实现了分数阶 Newton-Leipnik 系统与推广的分数阶 Lotka-Volterra 系统的同步,理论和仿真均证明了方法的有效性.

2 预备知识

我们常用的分数阶微积分的定义有三种,分别由 Grunwald-Letnikov, Riemann-Liouville (R-L), Caputo 给出. 本文选用 Caputo 给出的定义,因为 Caputo 定义的系统的初值与整数阶系统的一样,具有较好的物理意义. Caputo 分数阶积分的定义为

$${}_0D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (1)$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 为欧拉 Gamma 函数,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (2)$$

且有 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Caputo 分数阶微分的定义为

$${}_0D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \quad (3)$$

其中 $n-1 \leq \alpha < n$. 分数阶微分 (3) 式的 Laplace 变换为^[1]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}({}_0D_t^\alpha f(t)) &= \int_0^\infty e^{-st} {}_0D_t^\alpha f(t) dt \\ &= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0). \end{aligned} \quad (4)$$

为了便于讨论,下文中始终假设 $0 < \alpha < 1$.

为后面证明方便,首先给出一些将要用到的概念及结果.

定义 1^[2] 双参数 Mittag-Leffler 函数定义为

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (5)$$

其中 $\alpha, \beta > 0$, z 为复数,其 Laplace 变换为

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-at^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + a}. \quad (6)$$

引理 1^[2] 若 $\mathbf{x}(t) \in C^1[0, T]$ ($T > 0$), 则下面等式成立:

$${}_0D_t^{-\alpha} {}_0D_t^\alpha \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0), \quad (7)$$

$${}_0D_t^\alpha {}_0D_t^{-\alpha} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t). \quad (8)$$

引理 2 (分数阶 Lyapunov 第二方法)^[2] 设原点是如下分数阶非线性系统的平衡点:

$$D_t^\alpha \mathbf{x}(t) = f(t, \mathbf{x}(t)), \quad (9)$$

其中 $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 为系统变量. 若存在 Lyapunov 函数 $V(t, \mathbf{x}(t))$ 和正参数 h_1, h_2, h_3 使得

$$h_1 \|\mathbf{x}(t)\| \leq V(t, \mathbf{x}(t)) \leq h_2 \|\mathbf{x}(t)\|, \quad (10)$$

$$D_t^\alpha V(t, \mathbf{x}(t)) \leq -h_3 \|\mathbf{x}(t)\|, \quad (11)$$

则系统 (9) 是渐近稳定的.

引理 3^[20] 设 $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 为连续可微函数, 则

$$\frac{1}{2} D_t^\alpha \mathbf{x}^T(t) \mathbf{x}(t) \leq \mathbf{x}^T(t) D_t^\alpha \mathbf{x}(t). \quad (12)$$

2.1 模糊系统

模糊逻辑系统主要由四部分组成: 知识库、模糊化、基于模糊规则的模糊推理和解模糊化. 其中第 i 条模糊规则的形式为

$$R^{(i)} : \text{If } x_1 \text{ is } F_1^i, x_2 \text{ is } F_2^i, \dots, \text{ and } x_n \text{ is } F_n^i,$$

$$\text{then } \hat{f}(x(t)) \text{ is } B^i \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

这里 $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ 和 $\hat{f}(x) \in \mathbb{R}$ 分别是模糊逻辑系统的输入和输出. F_j^i, B^i 是 \mathbb{R} 上的模糊集合. 模糊系统的输出可以表示为

$$\hat{f}(x(t)) = \frac{\sum_{j=1}^N \theta_j(t) \prod_{i=1}^n \mu_{F_i^j}(x_i(t))}{\sum_{j=1}^N \left[\prod_{i=1}^n \mu_{F_i^j}(x_i(t)) \right]}, \quad (13)$$

式中 $\theta_j(t)$ 是模糊隶属函数 μ_{B^j} 取最大值的点, 通常可设为 $\mu_{B^j}(\theta_j(t)) = 1$. 设模糊基函数为

$$p_j(\mathbf{x}(t)) = \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{F_i^j}(x_i(t))}{\sum_{j=1}^N \left[\prod_{i=1}^n \mu_{F_i^j}(x_i(t)) \right]}, \quad (14)$$

并且令

$$\varphi(\mathbf{x}(t)) = [p_1(\mathbf{x}(t)), p_2(\mathbf{x}(t)), \dots, p_N(\mathbf{x}(t))]^T, \quad (15)$$

$$\boldsymbol{\theta}(t) = [\theta_1(t), \theta_2(t), \dots, \theta_N(t)]^T, \quad (16)$$

则模糊系统的输出可以写成

$$\hat{f}(\mathbf{x}(t)) = \boldsymbol{\theta}^T(t)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}(t)). \quad (17)$$

定理 1 (万能逼近定理) 设 $f(x)$ 是紧集 Ω 上定义的连续函数, 则对 \forall 常数 $\varepsilon > 0$, 都存在合适的模糊逻辑系统逼近函数 $\hat{f}(x)$, 使得

$$\sup_{\Omega} |f(x) - \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})| \leq \varepsilon, \quad (18)$$

其中 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 是最优向量 $\boldsymbol{\theta}^*$ 的估计值.

3 同步控制器的设计及稳定性分析

3.1 问题描述

设分数阶驱动混沌系统和响应混沌系统分别为

$$D_t^\alpha \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + f(\mathbf{x}(t)), \quad (19)$$

$$D_t^\alpha \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{y}(t) + g(\mathbf{y}(t)) + u(t) + d(t), \quad (20)$$

其中 $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$, $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), \dots, y_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ 分别为驱动系统和响应系统的可测状态向量, $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为未知的非线性连续函数, $\mathbf{A}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是常矩阵, 用于表示驱动系统和响应系统的线性部分, $d(t) \in \mathbb{R}^n$ 是未知的外部扰动, $u(t) \in \mathbb{R}^n$ 是待设计的响应系统控制器.

假设 1 外部扰动 $d(t)$ 是一个有界连续函数, 即存在未知常数 $\rho_i > 0$ 使得

$$|d_i(t)| \leq \rho_i \quad (\forall t > 0). \quad (21)$$

定义同步误差为 $\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)$, 本文的主要目标是设计适当的自适应控制器 $U(t)$, 使同步误差渐近趋于 0, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}(t)\| = 0$.

3.2 控制器的设计及稳定性分析

同步误差的动态方程可表示为

$$\begin{aligned} & D_t^\alpha \mathbf{e}(t) \\ &= \mathbf{C}\mathbf{y}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + g(\mathbf{y}(t)) - f(\mathbf{x}(t)) \\ & \quad + u(t) + d(t) \\ &= \mathbf{C}\mathbf{e}(t) + \mathbf{C}\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + g(\mathbf{y}(t)) - f(\mathbf{x}(t)) \\ & \quad + u(t) + d(t) \\ &= \mathbf{C}\mathbf{e}(t) + (\mathbf{C} - \mathbf{A})\mathbf{x}(t) + g(\mathbf{y}(t)) - f(\mathbf{x}(t)) \\ & \quad + u(t) + d(t). \end{aligned} \quad (22)$$

令

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) &= h(\mathbf{z}(t)) \\ &= (\mathbf{C} - \mathbf{A})\mathbf{x}(t) + g(\mathbf{y}(t)) - f(\mathbf{x}(t)) \end{aligned} \quad (23)$$

为未知的非线性函数. 则 (22) 式可以写成

$$D_t^\alpha \mathbf{e}(t) = \mathbf{C}\mathbf{e}(t) + h(\mathbf{z}(t)) + u(t) + d(t). \quad (24)$$

由定理 1 知未知函数 $h(\mathbf{z}(t))$ 可以通过模糊逻辑系统 (17) 式近似为

$$\begin{aligned} \hat{h}_i(\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\theta}_i(t)) &= \boldsymbol{\theta}_i^T(t)\boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{z}(t)), \\ i &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (25)$$

其中 $\boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{z}(t))$ 是模糊基函数, $\boldsymbol{\theta}_i(t)$ 是模糊系统的可调参数. 令模糊系统的最优估计参数为 $\boldsymbol{\theta}_i^*$ (它是 $\sup_t |h_i(\mathbf{z}(t)) - \hat{h}_i(\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\theta}_i)|$ 的下确界, 通常可假设 $\boldsymbol{\theta}_i^*$ 是常数向量). 设模糊系统的参数误差和最优估计误差分别为

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_i(t) = \boldsymbol{\theta}_i(t) - \boldsymbol{\theta}_i^*, \quad (26)$$

$$\varepsilon_i(\mathbf{z}(t)) = h_i(\mathbf{z}(t)) - \hat{h}_i(\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\theta}_i^*), \quad (27)$$

由文献 [21, 22] 知, 我们可以假设模糊系统的估计误差有界, 即 $|\varepsilon_i(\mathbf{z}(t))| \leq \varepsilon_i^*$ ($\varepsilon_i^* > 0$ 是未知常数). 经过简单推导, 未知非线性函数的估计误差可以写为

$$\begin{aligned} & \hat{h}(\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\theta}(t)) - h(\mathbf{z}(t)) \\ &= \hat{h}(\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\theta}(t)) - \hat{h}(\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\theta}^*) + \hat{h}(\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\theta}^*) - h(\mathbf{z}(t)) \\ &= \hat{h}(\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\theta}(t)) - \hat{h}(\mathbf{z}(t), \boldsymbol{\theta}^*) - \varepsilon(\mathbf{z}(t)) \\ &= \boldsymbol{\theta}^T(t)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z}(t)) - \boldsymbol{\theta}^{*T}(t)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z}(t)) - \varepsilon(\mathbf{z}(t)) \\ &= \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T(t)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z}(t)) - \varepsilon(\mathbf{z}(t)). \end{aligned} \quad (28)$$

根据上面的讨论, 同步控制器 $u(t)$ 可以设计为

$$\begin{aligned} u(t) &= -\mathbf{K}\mathbf{e}(t) - \boldsymbol{\theta}^T(t)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z}(t)) - \mathbf{H}\text{sign}(\mathbf{e}(t)) \\ & \quad - \hat{\boldsymbol{\rho}}\text{sign}(\mathbf{e}(t)), \end{aligned} \quad (29)$$

其中 $\mathbf{K} = \text{diag}[k_1, k_2, \dots, k_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k_1, k_2, \dots, k_n > 0$ 是待设计参数; $\mathbf{H} = \text{diag}[\hat{\varepsilon}_1^*(t), \dots, \hat{\varepsilon}_n^*(t)]$, $\hat{\varepsilon}_i^*(t)$ 是未知常数 ε_i^* 的估计值; $\hat{\boldsymbol{\rho}} = \text{diag}[\hat{\rho}_1(t), \dots, \hat{\rho}_n(t)]$, $\hat{\rho}_i(t)$ 是未知常数 ρ_i 的估计值 ($i = 1, 2, \dots, n$). 同时本文设计如下的分数阶参数自适应律

$$D_t^\alpha \boldsymbol{\theta}_i(t) = \mu_i e_i(t) \boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{x}(t)), \quad (30)$$

$$D_t^\alpha \hat{\varepsilon}_i^*(t) = \sigma_i |e_i(t)|, \quad (31)$$

$$D_t^\alpha \hat{\rho}_i(t) = \gamma_i |e_i(t)|, \quad (32)$$

其中 $\mu_i, \sigma_i, \gamma_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ 为设计参数.

注1 本文设计分数阶参数自适应律来更新系统的可调参数, 这三组自适应律可以看作是一种特殊的积分自适应律, 如(31)式等价于下面的方程

$$\hat{\varepsilon}_i(t) = \hat{\varepsilon}_i(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \sigma_i(t-\tau)^{\alpha-1} |e_i(\tau)| d\tau. \quad (33)$$

注2 在上述控制器以及参数自适应率中, 设计参数 k_i 主要用来控制同步误差的收敛速度, k_i 越大, 同步误差收敛速度越快. 参数 μ_i , σ_i 和 γ_i 主要用来调节系统参数逼近最优值的速度, 参数越大, 逼近速度越快. 但这些参数的取值要根据实际情况设计合理选取, 如果参数取值过大了会增加控制器的负担.

下面先给出有关系统稳定性分析的一些结果.

引理4^[4] (分数阶单调性原理) 若 $D_t^\alpha \mathbf{x}(t) \leq 0$, 则 $\mathbf{x}(t)$ 在 $[0, +\infty]$ 上单调减少; 若 $D_t^\alpha \mathbf{x}(t) \geq 0$, 则 $\mathbf{x}(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加.

引理5^[23] 设 $V_1(t) = \frac{1}{2}x^2(t) + \frac{1}{2}y^2(t)$, 其中 $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}$ 具有连续的一阶导数, 如果存在常数 $k > 0$ 满足

$$D_t^\alpha V_1(t) \leq -kx^2(t), \quad (34)$$

则有下面不等式成立

$$x^2(t) \leq 2V_1(0)E_\alpha(-2kt^\alpha). \quad (35)$$

引理6 设 $V_2(t) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) + \frac{1}{2}\mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t)$, 其中 $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$ 具有连续的一阶导数, 如果存在常数 $h > 0$ 满足

$$D_t^\alpha V_2(t) \leq -h\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t), \quad (36)$$

则有 $\|\mathbf{x}(t)\|$ 和 $\|\mathbf{y}(t)\|$ 有界, 且 $\mathbf{x}(t)$ 渐近趋于0, 其中 $\|\cdot\|$ 表示 Euclid 范数.

证明1 由(36)式得:

$$D_t^\alpha V_2(t) \leq -h\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) \leq 0, \quad (37)$$

由引理4知 $V_2(t)$ 在 $[0, +\infty]$ 上单调减少, 则有

$$V_2(t) \leq V_2(0). \quad (38)$$

所以可以得到 $\|\mathbf{x}(t)\| \leq \sqrt{2V_2(0)}$ 和 $\|\mathbf{y}(t)\| \leq \sqrt{2V_2(0)}$, 即 $\|\mathbf{x}(t)\|$ 和 $\|\mathbf{y}(t)\|$ 有界. 下面证 $\mathbf{x}(t)$ 渐近趋于0.

$$D_t^\alpha V_2(t) \leq -h\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t), \quad (39)$$

两边同时取 α 阶积分得

$$V_2(t) - V_2(0) \leq -hD_t^{-\alpha}\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t). \quad (40)$$

又由于 $V_2(t) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) + \frac{1}{2}\mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t)$, 所以有

$\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) \leq 2V_2(t)$, 进一步有:

$$\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) \leq 2V_2(0) - 2hD_t^{-\alpha}\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t). \quad (41)$$

对于不等式(41)存在非负函数 $Z(t)$ 使得

$$\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) + Z(t) = 2V_2(0) - 2hD_t^{-\alpha}\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t). \quad (42)$$

对上式取 Laplace 变换可得:

$$\mathbf{X}^T(s)\mathbf{X}(s) = 2V_2(0)\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 2h} - \frac{s^\alpha}{s^\alpha + 2h}Z(s). \quad (43)$$

根据性质(6), (43)式的解为

$$\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) = 2V_2(0)E_{\alpha,1}(-2ht^\alpha) - Z(t) * [t^{-1}E_{\alpha,0}(-2ht^\alpha)], \quad (44)$$

其中 $*$ 为卷积. 因为 t^{-1} 和 $E_{\alpha,0}(-2ht^\alpha)$ 都是非负函数, 所以得证.

注3 若 $\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) \leq 2V_2(0)E_\alpha(-2ht^\alpha)$, 则由文献[1]知 $\mathbf{x}(t)$ 是 M-L 稳定的, 并且 $\mathbf{x}(t)$ 渐近趋于0, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$.

3.2.1 无外界扰动的混沌同步

首先我们考虑系统(19)和(20)在没有外界扰动(即 $d(t) = 0$)情形下的混沌同步.

将控制器(29)和(28)代入(24)式我们可以得到

$$\begin{aligned} D_t^\alpha \mathbf{e}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{e}(t) + h(\mathbf{z}(t)) - \mathbf{K}\mathbf{e}(t) \\ &\quad - \boldsymbol{\theta}^T(t)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z}(t)) - \mathbf{H}\text{sign}(\mathbf{e}(t)) \\ &= -(\mathbf{K} - \mathbf{C})\mathbf{e}(t) + h(\mathbf{z}(t)) \\ &\quad - \boldsymbol{\theta}^T(t)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z}(t)) - \mathbf{H}\text{sign}(\mathbf{e}(t)) \\ &= -\mathbf{P}\mathbf{e}(t) + \varepsilon(\mathbf{z}(t)) - \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T(t)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z}(t)) \\ &\quad - \mathbf{H}\text{sign}(\mathbf{e}(t)), \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{P} = \mathbf{K} - \mathbf{C}$, 可以选取适当的增益矩阵 \mathbf{K} 使 \mathbf{P} 为正定矩阵 (注意此时系统没有外界扰动, 所以控制器 $u(t)$ 里不含 $\rho\text{sign}(\mathbf{e}(t))$ 这一项). 两边同时左乘 $\mathbf{e}^T(t)$ 可以得到

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}^T(t)D_t^\alpha \mathbf{e}(t) \\ &= -\mathbf{e}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{e}(t) + \mathbf{e}^T(t)\varepsilon(\mathbf{z}(t)) \\ &\quad - \mathbf{e}^T(t)\tilde{\boldsymbol{\theta}}^T(t)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z}(t)) - \mathbf{e}^T(t)\mathbf{H}\text{sign}(\mathbf{e}(t)) \\ &= -\mathbf{e}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{e}(t) + \sum_{i=1}^n |e_i(t)|\varepsilon_i^* \\ &\quad - \sum_{i=1}^n e_i(t)\tilde{\theta}_i^T \boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{z}(t)) - \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^* |e_i(t)| \\ &= -\mathbf{e}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{e}(t) - \sum_{i=1}^n |e_i(t)|\tilde{\varepsilon}_i^* \end{aligned}$$

$$-\sum_{i=1}^n e_i(t) \tilde{\theta}_i^T \varphi_i(z(t)).$$

主要结果如下.

定理 2 在给定初始条件下, 在自适应控制器 (29) 和分数阶参数自适应规则 (30) 式和 (31) 式的作用下可实现驱动系统 (19) 和响应系统 (20) 的同步, 并且闭环系统内的所有变量有界.

证明 2 构造 Lyapunov 函数如下:

$$V(t) = \frac{1}{2} e^T(t) e(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu_i} \tilde{\theta}_i^T(t) \tilde{\theta}_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i} \tilde{\varepsilon}_i^{*T}(t) \tilde{\varepsilon}_i^*(t), \quad (45)$$

其中

$$\tilde{\theta}_i = \hat{\theta}_i - \theta_i, \quad (46)$$

$$\tilde{\varepsilon}_i^* = \hat{\varepsilon}_i^* - \varepsilon_i^*. \quad (47)$$

因为常数的 α 阶 Caputo 导数为 0, 所以有 $D_t^\alpha \tilde{\theta}_i(t) = D_t^\alpha \hat{\theta}_i(t)$, $D_t^\alpha \tilde{\varepsilon}_i^*(t) = D_t^\alpha \hat{\varepsilon}_i^*(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$. 根据引理 3, 对 $V(t)$ 取 α 阶导数得

$$\begin{aligned} D_t^\alpha V(t) &\leq e^T(t) D_t^\alpha e(t) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu_i} \tilde{\theta}_i^T(t) D_t^\alpha \theta_i(t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i} \tilde{\varepsilon}_i^{*T}(t) D_t^\alpha \varepsilon_i^*(t) \\ &\leq -e^T(t) P e(t) - \sum_{i=1}^n |e_i(t)| \tilde{\varepsilon}_i^* \\ &\quad - \sum_{i=1}^n e_i(t) \tilde{\theta}_i^T \varphi_i(z(t)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n e_i(t) \tilde{\theta}_i^T \varphi_i(z(t)) + \sum_{i=1}^n |e_i(t)| \tilde{\varepsilon}_i^* \\ &= -e^T(t) P e(t) \\ &\leq -\lambda_{\min} e^T(t) e(t), \quad (48) \end{aligned}$$

其中 λ_{\min} 是正定矩阵 P 的最小特征值. 由 (48) 式和引理 6 的证明可知同步误差 $e(t)$ 渐近趋于 0, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$.

由引理 5 可知 $\tilde{\theta}_i(t)$, $\tilde{\varepsilon}_i^*(t)$ 有界, 进一步 $\theta_i(t)$, $\hat{\varepsilon}_i^*(t)$ 有界. 由于驱动系统 (19) 是混沌系统, 所以 $x(t)$ 有界, 又 $e(t)$ 有界, 所以 $y(t)$ 有界. 由同步控制器可知 $u(t)$ 有界, 所以闭环系统所有信号都是有界的.

3.2.2 伴有外界扰动的混沌同步

我们考虑系统 (19) 和 (20) 在有外界扰动 (即 $d(t) \neq 0$) 情形下的混沌同步.

将控制器 (29) 和 (28) 代入 (24) 式我们可以得到

$$\begin{aligned} D_t^\alpha e(t) &= C e(t) + h(z(t)) + d(t) - K e(t) \\ &\quad - \theta^T(t) \varphi(z(t)) - H \text{sign}(e(t)) - \hat{\rho} \text{sign}(e(t)) \\ &= -P e(t) + \varepsilon(z(t)) - \tilde{\theta}^T(t) \varphi(z(t)) + d(t) \\ &\quad - H \text{sign}(e(t)) - \hat{\rho} \text{sign}(e(t)), \end{aligned}$$

其中 $P = K - C$ 是正定矩阵. 两边同时左乘 $e^T(t)$ 可以得到

$$\begin{aligned} e^T(t) D_t^\alpha e(t) &= -e^T(t) P e(t) + e^T(t) \varepsilon(z(t)) \\ &\quad - e^T(t) \tilde{\theta}^T(t) \varphi(z(t)) + e^T(t) d(t) \\ &\quad - e^T(t) H \text{sign}(e(t)) - e^T(t) \hat{\rho} \text{sign}(e(t)) \\ &\leq -e^T(t) P e(t) + \sum_{i=1}^n |e_i(t)| \varepsilon_i^* \\ &\quad - \sum_{i=1}^n e_i(t) \tilde{\theta}_i^T \varphi_i(z(t)) + \sum_{i=1}^n |e_i(t)| \rho_i \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \tilde{\varepsilon}_i^* |e_i(t)| - \sum_{i=1}^n \hat{\rho}_i |e_i(t)| \\ &= -e^T(t) P e(t) - \sum_{i=1}^n |e_i(t)| \tilde{\varepsilon}_i^* \\ &\quad - \sum_{i=1}^n e_i(t) \tilde{\theta}_i^T \varphi_i(z(t)) - \sum_{i=1}^n \tilde{\rho}_i |e_i(t)|. \end{aligned}$$

主要结果如下.

定理 3 在给定初始条件下, 在自适应控制器 (29) 式和分数阶参数自适应规则 (30) 式、(31) 式和 (32) 式的作用下可实现驱动系统 (19) 和响应系统 (20) 的同步, 并且闭环系统内的所有变量有界.

证明 3 构造 Lyapunov 函数如下:

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{2} e^T(t) e(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu_i} \tilde{\theta}_i^T(t) \tilde{\theta}_i(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i} \tilde{\varepsilon}_i^{*T}(t) \tilde{\varepsilon}_i^*(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\gamma_i} \tilde{\rho}_i^T(t) \tilde{\rho}_i(t), \quad (49) \end{aligned}$$

其中

$$\tilde{\theta}_i = \hat{\theta}_i - \theta_i, \quad (50)$$

$$\tilde{\varepsilon}_i^* = \hat{\varepsilon}_i^* - \varepsilon_i^*, \quad (51)$$

$$\tilde{\rho}_i = \hat{\rho}_i - \rho_i. \quad (52)$$

因为常数的 α 阶 Caputo 导数为0, 所以有 $D_t^\alpha \tilde{\theta}_i(t) = D_t^\alpha \theta_i(t)$, $D_t^\alpha \tilde{\varepsilon}_i^*(t) = D_t^\alpha \varepsilon_i^*(t)$, $D_t^\alpha \tilde{\rho}_i(t) = D_t^\alpha \rho_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$. 根据引理3, 对 $V(t)$ 取 α 阶导数得

$$\begin{aligned} & D_t^\alpha V(t) \\ & \leq e^T(t) D_t^\alpha e(t) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu_i} \tilde{\theta}_i^T(t) D_t^\alpha \theta_i(t) \\ & \quad + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i} \tilde{\varepsilon}_i^{*T}(t) D_t^\alpha \varepsilon_i^*(t) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\gamma_i} \tilde{\rho}_i^T(t) D_t^\alpha \rho_i(t) \\ & \leq -e^T(t) P e(t) - \sum_{i=1}^n |e_i(t)| \tilde{\varepsilon}_i^* \\ & \quad - \sum_{i=1}^n e_i(t) \tilde{\theta}_i^T \varphi_i(z(t)) - \sum_{i=1}^n \tilde{\rho}_i |e_i(t)| \\ & \quad + \sum_{i=1}^n |e_i(t)| \tilde{\varepsilon}_i^* + \sum_{i=1}^n e_i(t) \tilde{\theta}_i^T \varphi_i(z(t)) \\ & \quad + \sum_{i=1}^n \tilde{\rho}_i |e_i(t)| \\ & = -e^T(t) P e(t) \leq -\lambda_{\min} e^T(t) e(t), \end{aligned} \tag{53}$$

其中 λ_{\min} 是正定矩阵 P 的最小特征值. 由 (53) 式和引理6的证明可知同步误差 $e(t)$ 渐近趋于0, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$.

由引理5可知 $\tilde{\theta}_i(t)$, $\tilde{\varepsilon}_i^*(t)$, $\tilde{\rho}_i(t)$ 有界, 进一步 $\theta_i(t)$, $\varepsilon_i^*(t)$, $\rho_i(t)$ 有界. 由于驱动系统 (19) 是混沌系统, 所以 $x(t)$ 有界, 又 $e(t)$ 有界, 所以 $y(t)$ 有界. 由同步控制器可知 $u(t)$ 有界, 所以闭环系统所有信号都是有界的.

4 数值仿真

为了验证控制器的有效性, 仿真中研究了分数阶 Newton-Leipnik 系统与 Lotka-Volterra 系统的同步. 分数阶 Newton-Leipnik 系统的数学模型为:

$$\begin{cases} D_t^\alpha x_1(t) = -ax_1(t) + x_2(t) + 10x_2(t)x_3(t), \\ D_t^\alpha x_2(t) = -x_1(t) - 0.4x_2(t) + 5x_1(t)x_3(t), \\ D_t^\alpha x_3(t) = bx_3(t) - 5x_1(t)x_2(t), \end{cases} \tag{54}$$

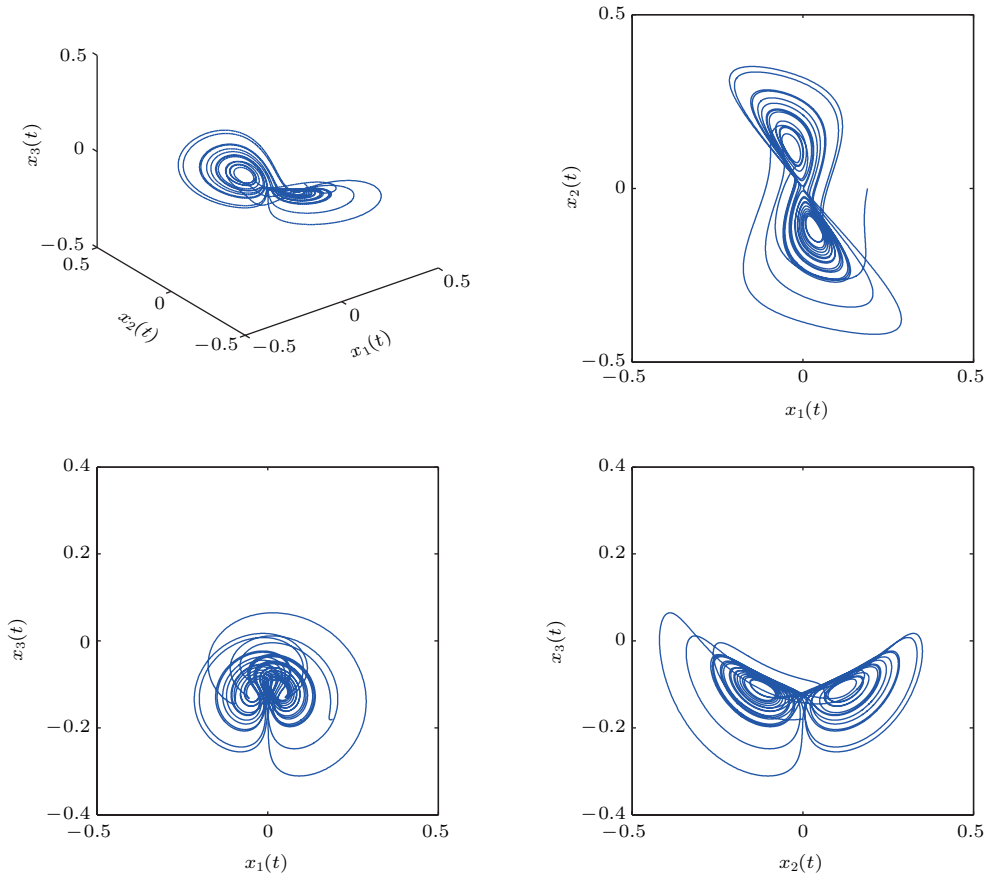


图1 分数阶 Newton-Leipnik 系统

Fig. 1. Fractional-order Newton-Leipnik system.

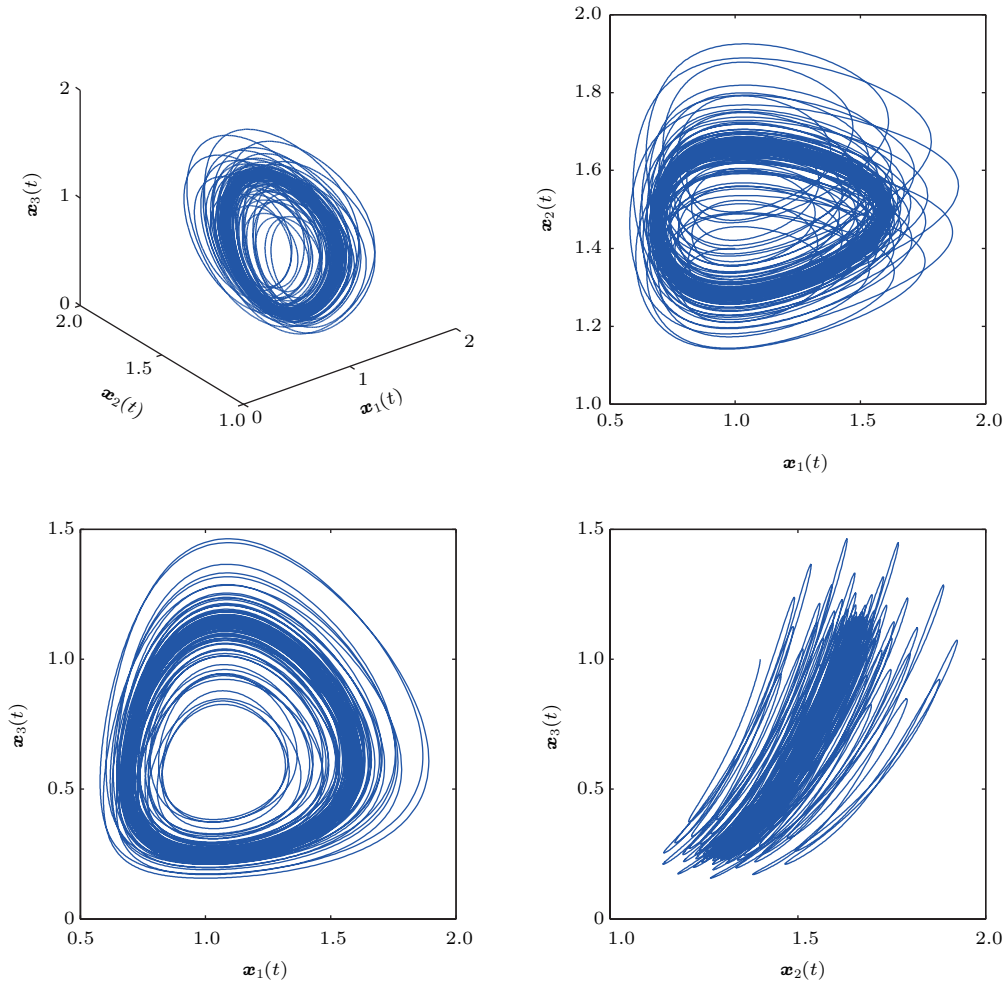


图2 分数阶 Lotka-Volterra 系统

Fig. 2. Fractional-order Lotka-Volterra system.

其中 α 为分数阶阶次; a, b 为控制参数; $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \mathbf{x}_3(t)$ 为系统的状态向量. 选取参数 $a = 0.4, b = 0.175$, 分数阶阶次 $\alpha = 0.95$, 初始值为 $[0.19, 0, -0.18]$, 此时存在如图1所示的混沌吸引子.

以系统(54)作为驱动系统, 响应系统为分数阶 Lotka-Volterra 系统, 系统模型为

$$\begin{cases} D_t^\alpha \mathbf{y}_1(t) = a\mathbf{y}_1(t) - b\mathbf{y}_1(t)\mathbf{y}_2(t) + e\mathbf{y}_1^2(t) - s\mathbf{y}_3(t)\mathbf{y}_1^2(t), \\ D_t^\alpha \mathbf{y}_2(t) = -c\mathbf{y}_2(t) + d\mathbf{y}_1(t)\mathbf{y}_2(t), \\ D_t^\alpha \mathbf{y}_3(t) = -p\mathbf{y}_3(t) + s\mathbf{y}_3(t)\mathbf{y}_1^2(t), \end{cases} \quad (55)$$

其中 α 为分数阶阶次; a, b, c, d, e, s, p 为控制参数; $\mathbf{y}_1(t), \mathbf{y}_2(t), \mathbf{y}_3(t)$ 为系统的状态向量. 选取参数 $a = 1, b = 1, c = 1, d = 1, e = 2, p = 3, s = 2.7$, 分数阶阶次 $\alpha = 0.95$, 初始值为 $[1, 1.4, 1]$, 此时存在如图2所示的混沌吸引子.

4.1 无外界扰动的混沌同步

为了实现驱动系统(54)和响应系统(55)在没有外界扰动的条件下(即 $d_i(t) = 0, i = 1, 2, 3$)同步, 在数值仿真中选取增益矩阵 $\mathbf{K} = \text{diag}[3, 3, 3]$, 则矩阵

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3 - a & 0 & 0 \\ 0 & 3 + c & 0 \\ 0 & 0 & 3 + p \end{pmatrix}. \quad (56)$$

所以在仿真过程中只要 $a < 3, c > -3$ 和 $p > -3$, 则可以得到矩阵 \mathbf{P} 正定. 同步控制器为

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1(t) = -3e_1(t) - \theta_1^T \boldsymbol{\varphi}_1(t) - \hat{\epsilon}_1^* \text{sign}(e_1(t)), \\ \mathbf{u}_2(t) = -3e_2(t) - \theta_2^T \boldsymbol{\varphi}_2(t) - \hat{\epsilon}_2^* \text{sign}(e_2(t)), \\ \mathbf{u}_3(t) = -3e_3(t) - \theta_3^T \boldsymbol{\varphi}_3(t) - \hat{\epsilon}_3^* \text{sign}(e_3(t)), \end{cases} \quad (57)$$

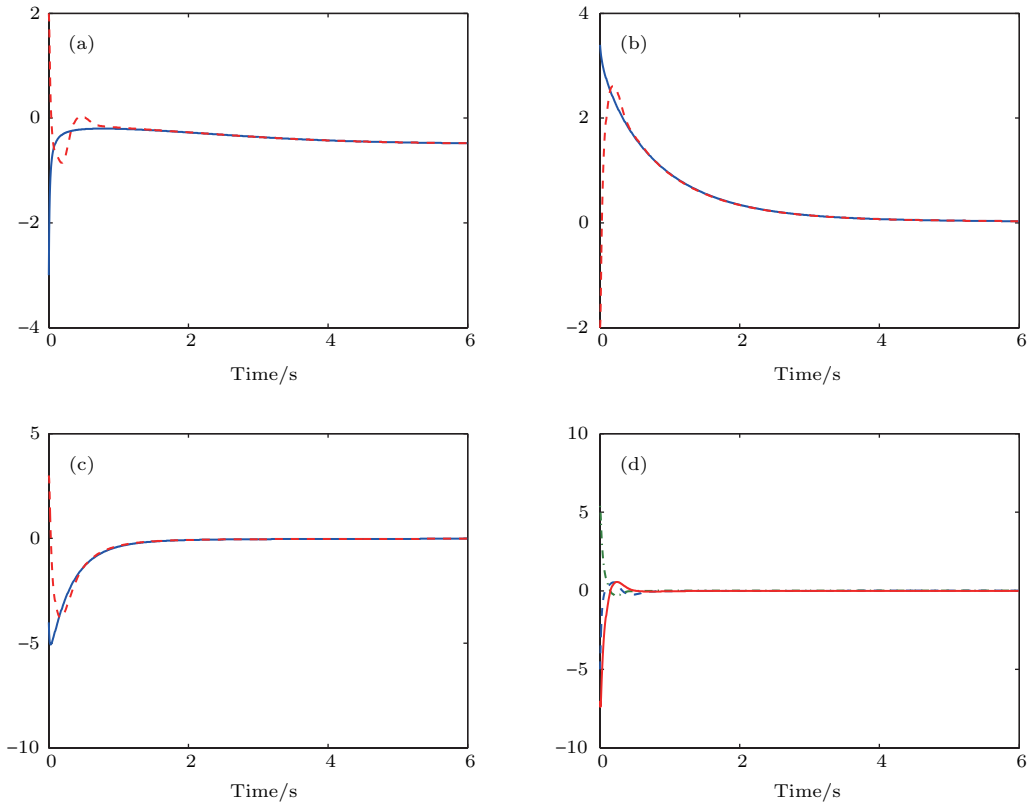


图3 同步结果 (a) $x_1(t)$ (实线) 和 $y_1(t)$ (虚线); (b) $x_2(t)$ (实线) 和 $y_2(t)$ (虚线); (c) $x_3(t)$ (实线) 和 $y_3(t)$ (虚线); (d) 同步误差 $e_1(t)$ (虚线), $e_2(t)$ (点划线), $e_3(t)$ (实线)

Fig. 3. Synchronization results in (a) $x_1(t)$ (solid line) and $y_1(t)$ (dotted line); (b) $x_2(t)$ (solid line) and $y_2(t)$ (dotted line); (c) $x_3(t)$ (solid line) and $y_3(t)$ (dotted line); (d) synchronization errors $e_1(t)$ (dotted line), $e_2(t)$ (dot dash line) and $e_3(t)$ (solid line).

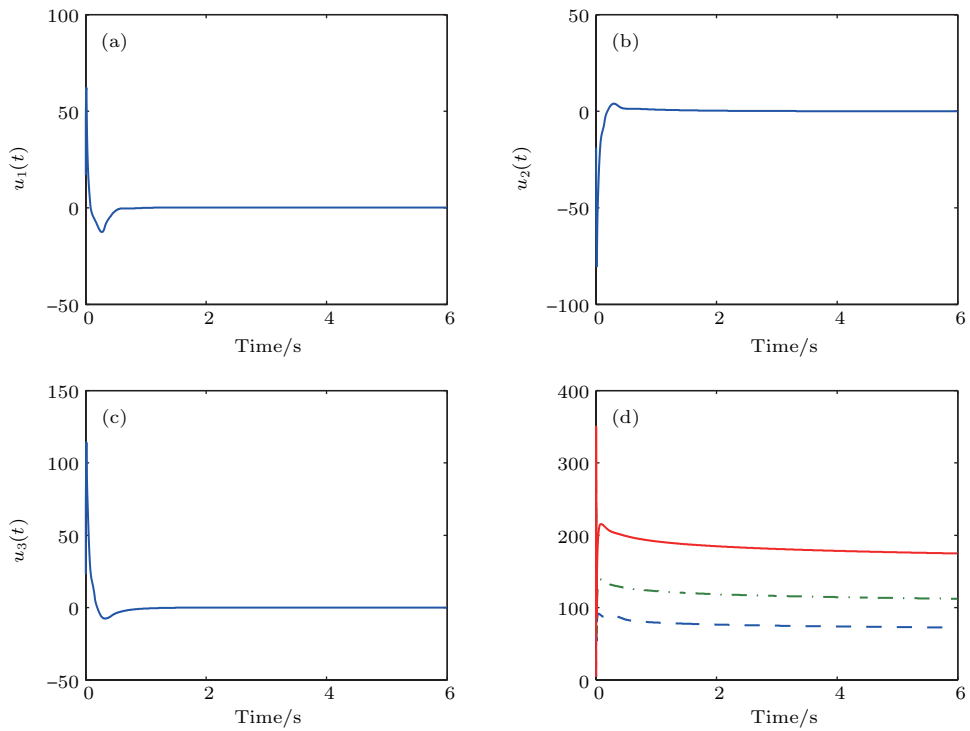


图4 控制量和模糊系统参数 (a) $u_1(t)$; (b) $u_2(t)$; (c) $u_3(t)$; (d) $\|\theta_1(t)\|$ (虚线), $\|\theta_2(t)\|$ (点划线), $\|\theta_3(t)\|$ (实线)

Fig. 4. Controlled variables and fuzzy system parameters in (a) $u_1(t)$; (b) $u_2(t)$; (c) $u_3(t)$; (d) $\|\theta_1(t)\|$ (dotted line), $\|\theta_2(t)\|$ (dot dash line), and $\|\theta_3(t)\|$ (solid line).

参数的自适应规则分别为: $D_t^\alpha \theta_1(t) = \mu_1 e_1(t) \varphi_1(\mathbf{x}(t))$, $D_t^\alpha \theta_2(t) = \mu_2 e_2(t) \varphi_2(\mathbf{x}(t))$, $D_t^\alpha \hat{\epsilon}_1^*(t) = \sigma_1 |e_1(t)|$, $D_t^\alpha \hat{\epsilon}_2^*(t) = \sigma_2 |e_2(t)|$, $D_t^\alpha \hat{\epsilon}_3^*(t) = \sigma_3 |e_3(t)|$.

在仿真中, 模糊系统的输入变量为 $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$, 为了减少模糊系统的运算, 在仿真中我们用 $\mathbf{e}(t)$ 代替 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{y}(t)$. 对于 $e_1(t)$, $e_2(t)$ 和 $e_3(t)$, 本文各选取了4个均匀分布在 $[-3, 3]$ 上的高斯型模糊隶属函数 (它们的数学期望分别为 $-3, -1, 1, 3$), 它们的参数为 $([1.1], [-3, -1, 1, 3])$. 于是在模糊系统参与逼近运算的模糊规则数为 $4^3 = 64$. 模糊系统可调参数的初值 $\theta_1(0)$, $\theta_2(0)$ 和 $\theta_3(0)$ 均选为64维的随机向量.

控制器里的其他参数为 $a = 1, c = 1, p = 3, \sigma_i = 0.8, \mu_i = 700, \alpha = 0.95$, 模糊系统逼近误差的估计值初值为 $\hat{\epsilon}_1^*(0) = \hat{\epsilon}_2^*(0) = 1.8, \hat{\epsilon}_3^*(0) = 1.5$. 仿真结果见图3和图4. 从仿真结果可以看出, 同步误差快速收敛; 控制量波动范围小, 变化平稳; 混沌系统参数变化曲线光滑有界. 可以说, 本文设计的同步控制器有较好的控制效果及鲁棒性.

4.2 伴有外界扰动的混沌同步

为了实现驱动系统(54)和响应系统(55)同步, $d_1(t) = 0.15 \sin(t), d_2(t) = 0.05 \cos(t), d_3(t) = 0.1 \cos(t)$. 增益矩阵 $\mathbf{K} = \text{diag}[3, 3, 3]$, 同样可以保证矩阵 \mathbf{P} 正定. 同步控制器为

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1(t) = -3\mathbf{e}_1(t) - \theta_1^T \varphi_1(t) - \hat{\epsilon}_1^* \text{sign}(e_1(t)) \\ \quad - \hat{\rho}_1 \text{sign}(e_1(t)), \\ \mathbf{u}_2(t) = -3\mathbf{e}_2(t) - \theta_2^T \varphi_2(t) - \hat{\epsilon}_2^* \text{sign}(e_2(t)) \\ \quad - \hat{\rho}_2 \text{sign}(e_2(t)), \\ \mathbf{u}_3(t) = -3\mathbf{e}_3(t) - \theta_3^T \varphi_3(t) - \hat{\epsilon}_3^* \text{sign}(e_3(t)) \\ \quad - \hat{\rho}_3 \text{sign}(e_3(t)). \end{cases} \quad (58)$$

参数的自适应规则分别为

$$\begin{aligned} D_t^\alpha \theta_1(t) &= \mu_1 e_1(t) \varphi_1(\mathbf{x}(t)), \\ D_t^\alpha \theta_2(t) &= \mu_2 e_2(t) \varphi_2(\mathbf{x}(t)), \\ D_t^\alpha \theta_3(t) &= \mu_3 e_3(t) \varphi_3(\mathbf{x}(t)); \end{aligned}$$

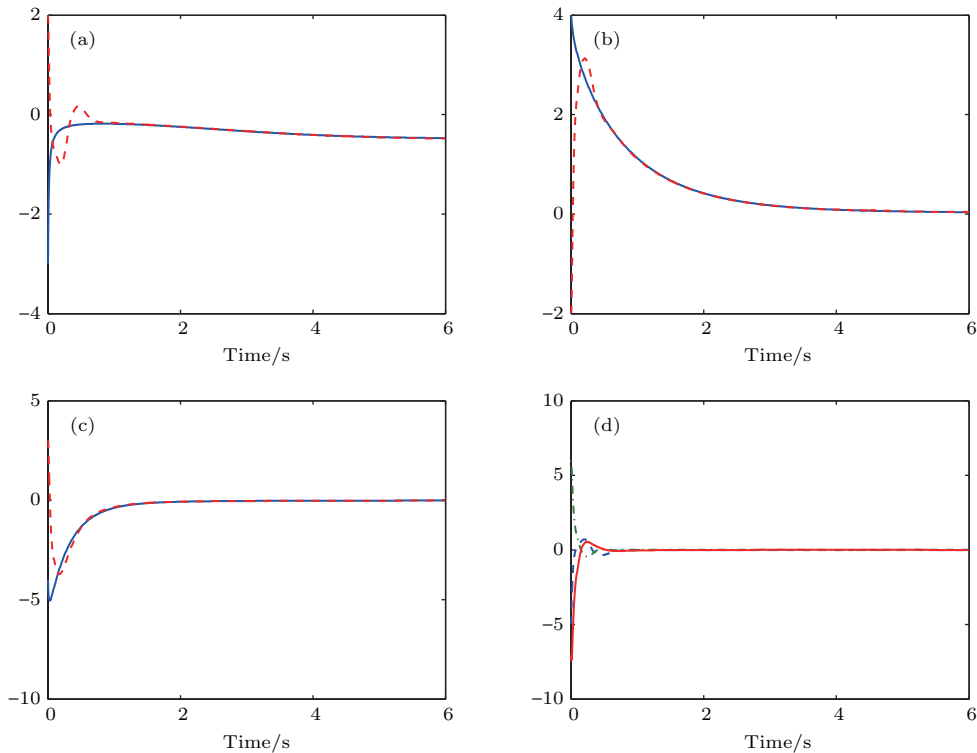


图5 同步结果 (a) $x_1(t)$ (实线) 和 $y_1(t)$ (虚线); (b) $x_2(t)$ (实线) 和 $y_2(t)$ (虚线); (c) $x_3(t)$ (实线) 和 $y_3(t)$ (虚线); (d) 同步误差 $e_1(t)$ (虚线), $e_2(t)$ (点划线), $e_3(t)$ (实线)

Fig. 5. Synchronization results in (a) $x_1(t)$ (solid line) and $y_1(t)$ (dotted line); (b) $x_2(t)$ (solid line) and $y_2(t)$ (dotted line); (c) $x_3(t)$ (solid line) and $y_3(t)$ (dotted line); (d) synchronization errors $e_1(t)$ (dotted line), $e_2(t)$ (dot dash line) and $e_3(t)$ (solid line).

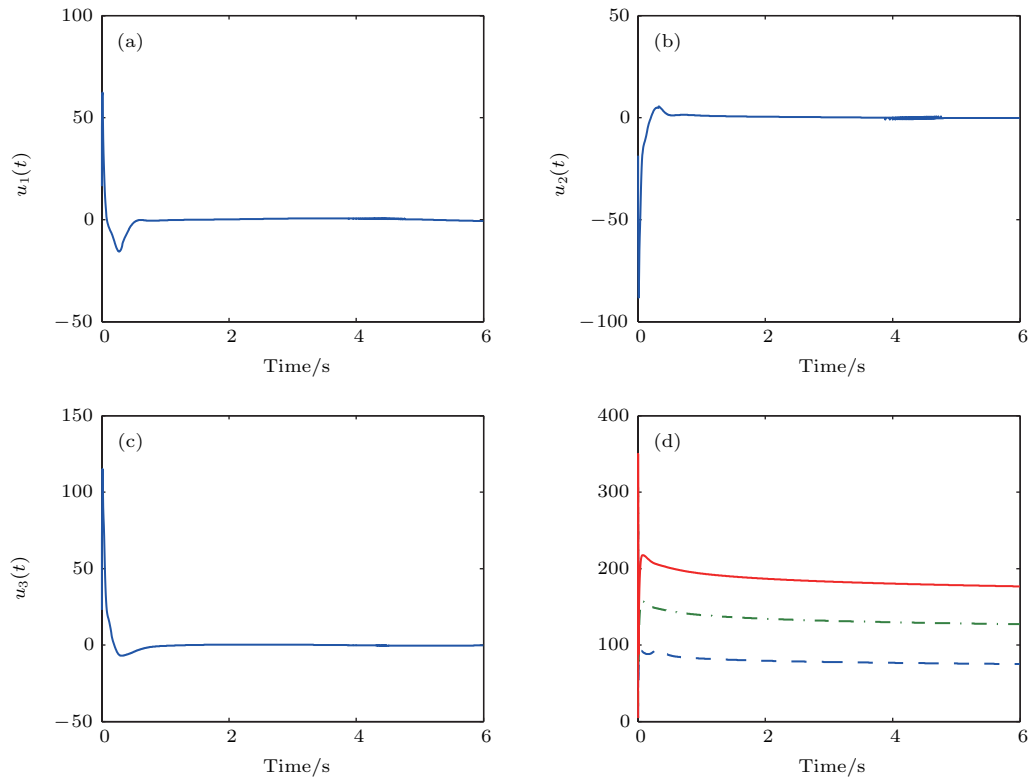


图6 控制量和模糊系统参数 (a) $u_1(t)$; (b) $u_2(t)$; (c) $u_3(t)$; (d) $\|\theta_1(t)\|$ (虚线), $\|\theta_2(t)\|$ (点划线), $\|\theta_3(t)\|$ (实线)

Fig. 6. Controlled variables and fuzzy system parameters in (a) $u_1(t)$; (b) $u_2(t)$; (c) $u_3(t)$; (d) $\|\theta_1(t)\|$ (dotted line), $\|\theta_2(t)\|$ (dot dash line), and $\|\theta_3(t)\|$ (solid line).

$$\begin{aligned} D_t^\alpha \hat{e}_1^*(t) &= \sigma_1 |e_1(t)|, \\ D_t^\alpha \hat{e}_2^*(t) &= \sigma_2 |e_2(t)|, \\ D_t^\alpha \hat{e}_3^*(t) &= \sigma_3 |e_3(t)|; \\ D_t^\alpha \hat{\rho}_1(t) &= \gamma_1 |e_1(t)|, \\ D_t^\alpha \hat{\rho}_2(t) &= \gamma_2 |e_2(t)|, \\ D_t^\alpha \hat{\rho}_3(t) &= \gamma_3 |e_3(t)|. \end{aligned}$$

对于模糊系统的模糊隶属函数以及可调参数的选取同上. 控制器里的其他参数为: $a = 1, c = 1, p = 3, \sigma_i = 0.5, \mu_i = 700, \gamma_i = 0.8, \alpha = 0.95$, 系统外部扰动 $d_i(t)$ 上界值为 $\rho_1 = 1, \rho_2 = 0.8, \rho_3 = 1.2$, 其估计值初值为 $\hat{\rho}_1(0) = \hat{\rho}_2(0) = \hat{\rho}_3(0) = 1$. 仿真结果如图5和图6所示.

5 结 论

本文基于Lyapunov稳定性理论设计了自适应模糊同步控制器和分数阶参数自适应率, 实现了分数阶非线性混沌系统在无外界扰动和伴有外界扰动条件下的同步, 并且成功地利用平方Lyapunov函数的分数阶导数证明了系统的稳定性. 本文的方

法具有广泛的实用性, 利用本文方法可以将很多整数阶混沌系统的控制与同步推广到分数阶. 如何在更严格的条件下 (如饱和输入及非线性死区, 系统模型伴有随机扰动或者参数不确定) 实现分数阶混沌系统的同步仍是我们的研究方向.

参考文献

- [1] Li Y, Chen Y, Podlubny I 2009 *Automatica* **45** 3690
- [2] Podlubny I 1999 *Fractional Differential Equations* (New York: Academic Press)
- [3] Yuan L G, Yang Q G 2012 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul* **17** 305
- [4] Wen B, Cao M S, Hou Z L, Song W L, Zhang L, Lu M M, Jin H B, Fang X Y, Wang W Z, Yuan J 2013 *Carbon* **65** 124
- [5] Zhang R, Tian G, Yang S, Cao H 2015 *ISA Trans.* **56** 102
- [6] Yin C, Cheng Y, Chen Y, Stark B, Zhong S 2015 *Nonlinear Dyn.* **82** 39
- [7] Huang S, Zhang R, Chen D 2016 *J. Computat. Nonlinear Dyn.* **11** 031007
- [8] Pecora M L, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [9] Yu H J, Liu Y Z 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3029 (in Chinese) [于洪洁, 刘延柱 2005 物理学报 **54** 3029]

- [10] Wang H, Han Z Z, Xie Q Y, Zhang W 2009 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **14** 2239
- [11] Yu N, Ding Q, Chen H 2007 *J. Commun.* **28** 73 (in Chinese) [于娜, 丁群, 陈红 2007 通信学报 **28** 73]
- [12] Marino R, Tomei P 1996 *Nonlinear control design: geometric, adaptive and robust. Prentice Hall International (UK) Ltd.*
- [13] Yue Q, Yang J, Li G H, Li G D, Xu W, Chen J S, Wang S N 2005 *Inorg. Chem.* **44** 5241
- [14] Li R, Zhang G J, Yao H, Zhu T, Zhang Z H 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 230501 (in Chinese) [李睿, 张广军, 姚宏, 朱涛, 张志浩 2014 物理学报 **63** 230501]
- [15] Kim S, Park P, Jeong C 2010 *IET Control Theory Appl.* **4** 1828
- [16] Becker R, Rannacher R 1996 *East-West J. Numer. Math.* **4** 237
- [17] Boulkroune A, Bouzeriba A, Bouden T 2016 *Neurocomputing* **173** 606
- [18] Mathiyalagan K, Park J H, Sakthivel R 2015 *Complexity* **21** 114
- [19] Liu H, Li S G, Sun Y G, Wang H X 2015 *Chin. Phys. B* **24** 090505
- [20] Liu H, Li S, Wang H, Huo Y, Luo J 2015 *Entropy* **17** 7185
- [21] Boulkroune A, Tadjine M, M'Saad M, Farza M 2010 *Fuzzy Sets and Systems* **161** 797
- [22] Tong S, Wang T, Tang J T 2000 *Fuzzy Sets and Syst.* **111** 169
- [23] Liu H, Li S G, Sun Y G, Wang H X 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 070503 (in Chinese) [刘恒, 李生刚, 孙业国, 王宏兴 2014 物理学报 **64** 070503]

Synchronization of fractional-order chaotic systems based on adaptive fuzzy control

Chen Ye¹⁾ Li Sheng-Gang^{1)†} Liu Heng¹⁾²⁾

1) (Department of Mathematics and Information Sciences, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, China)

2) (Department of Mathematics and Computational Sciences, Huainan Normal University, Huainan 232038, China)

(Received 13 April 2016; revised manuscript received 27 May 2016)

Abstract

In this paper the synchronization problem for fractional-order chaotic system with unknown external disturbance is investigated by adaptive fuzzy control. Based on the fractional Lyapunov stability theorem, an adaptive fuzzy controller, which is accompanied with fractional adaptation law, is established. Fuzzy logic system is used to approximate an unknown nonlinear function. The fuzzy approximation error can be canceled by the proposed fractional adaptation law. Just like the stability analysis in an integer-order chaotic system, the quadratic Lyapunov function is used to analyze the stability of the fractional-order closed-loop system. The control method can realize good synchronization performances between two fractional-order chaotic systems, and the synchronization error tends to zero asymptotically. Besides, the proposed controller can also guarantee the boundedness of all signals in the closed-loop system. Finally, the numerical simulation results illustrate the effectiveness of the proposed control method for fractional-order chaotic system in the presence of the external disturbances.

Keywords: fractional-order adaptation law, adaptive fuzzy control, fractional-order chaotic system

PACS: 05.45.Pq, 05.45.Xt

DOI: 10.7498/aps.65.170501

† Corresponding author. E-mail: shengganglinew@126.com